

Επανάληψη από την ύλη της Γ! Γυμνασίου (αλγεβρική επίλυση γραμμικών συστημάτων)

Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ονομάζουμε ένα

$$\text{σύστημα της μορφής } \left. \begin{array}{l} ax + \beta y = \gamma \\ a'x + \beta'y = \gamma' \end{array} \right\} \text{ π.χ. } \left. \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{array} \right\}$$

Λύση του γραμμικού συστήματός ονομάζουμε κάθε ζεύγος αριθμών της μορφής (x, y) όπου αν αντικαταστήσουμε τις τιμές στη θέση των μεταβλητών θα επαληθεύονται και οι δύο εξισώσεις ι.

1η Μέθοδος Επίλυσης : Με αντικάσταση

Στη μέθοδο αυτή επιλέγουμε μια εξίσωση την οποία λύνουμε ως προς έναν άγνωστο. Βολεύει να επιλέγουμε εκείνη την εξίσωση στη οποία ένας τουλάχιστον από τους αγνώστους έχει συντελεστή 1 δηλ. ο άγνωστος είναι μόνος του.

Στο παραπάνω παράδειγμα λύνουμε αρχικά την πρώτη εξίσωση ως προς y.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y = 1 - 2x \\ x - 2y = 3 \end{array} \right\}$$

Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση το y κάνουμε πράξεις και βρίσκουμε το x

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x - 2(1 - 2x) = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x - 2 + 4x = 3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ 5x = 5 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x = 1 \end{array} \right\}$$

Αντικαθιστούμε στην 1η εξίσωση το x και βρίσκουμε το y

$$\left. \begin{array}{l} 2 + y = 1 \\ x = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y = -1 \\ x = 1 \end{array} \right\}$$

Γράφουμε τη λύση στη μορφή (x,y)=(1,-1)

2η Μέθοδος Επίλυσης : Με Αντίθετους συντελεστές

Δημιουργούμε αντίθετους συντελεστές σε έναν από τους δύο αγνώστους πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη κάθε εξίσωσης με τους κατάλληλους αριθμούς. Στο παράδειγμα μας θα δημιουργήσουμε αντίθετους συντελεστές στο y πολλαπλασιάζοντας την 1η εξίσωση με 2

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot 2x + 2y = 2 \\ x - 2y = 3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 4x + 2y = 2 \\ x - 2y = 3 \end{array} \right\}$$

Προσθέτω κατά μέλη τις εξισώσεις
$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y = 2 \\ x - 2y = 3 \end{array} \right\}$$
$$5x = 5 \Leftrightarrow x = 1$$

Αντικαθιστώ την τιμή του x σε μια από τις δύο εξισώσεις και βρίσκω το

y άρα $\left. \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = -1 \\ x = 1 \end{array} \right\}$ οπότε $(x,y)=(1,-1)$

Στην παραπάνω περίπτωση λέμε ότι το σύστημα έχει

Μοναδική Λύση $(x,y)=(1,-1)$

Σύστημα αδύνατο

Να λυθεί το σύστημα $\left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 4 \\ -x + \frac{3}{2}y = 1 \end{array} \right\}$ με απαλοιφή παρονομαστών το

σύστημα γράφεται $\left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 4 \\ -2x + 3y = 2 \end{array} \right\}$

υπάρχουν αντίθετοι συντελεστές οπότε προσθέτουμε κατά μέλη

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 4 \\ -2x + 3y = 2 \end{array} \right\} \text{ άρα το σύστημα } \mathbf{αδύνατο.}$$
$$0x + 0y = 6$$

Σύστημα αόριστο

Να λυθεί το σύστημα
$$\left. \begin{array}{l} 4x - 3y = 12 \\ x - \frac{3}{4}y = 3 \end{array} \right\}$$
 με απαλοιφή παρονομαστών το

σύστημα γράφεται
$$\left. \begin{array}{l} 4x - 3y = 12 \\ 4x - 3y = 12 \end{array} \right\}$$
 παρατηρούμε ότι τελικά οι δύο

εξισώσεις ταυτίζονται. Χρησιμοποιώ αντίθετους συντελεστες και πολλαπλασιάζω τη δεύτερη εξίσωση με -1 προσθέτω και έχω

$$\left. \begin{array}{l} 4x - 3y = 12 \\ \underline{-4x + 3y = -12} \\ 0x + 0y = 0 \end{array} \right\} \text{ οπότε λέμε ότι το σύστημα είναι } \mathbf{\text{αόριστο}}$$

Προσοχή! Στο αόριστο σύστημα οι δύο εξισώσεις του συστήματος ταυτίζονται και συνεπώς έχει άπειρες λύσεις. Δηλαδή άπειρα ζευγάρια (x, y) που επαληθεύουν την εξίσωση

Καθώς κάθε λύση πρέπει να επαληθεύει την εξίσωση είναι φανερό ότι δεν είναι οποιοδήποτε ζεύγος αριθμών λύση του συστήματος, αλλά μόνο εκείνα που αντικαθιστώντας τις τιμές στις μεταβλητές επαληθεύονται και οι δύο εξισώσεις π.χ $(0, -4)$ ή $(3, 0)$ ή $(6, 4)$ ή $(-3, -8)$
Πως βρίσκουμε αυτά τα ζεύγη;

Λύνουμε την εξίσωση ως προς μια μεταβλητή $4x - 3y = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12 + 3y}{4}$

Δίνοντας τιμές στο y υπολογίζουμε το x και έτσι έχουμε βρει μια λύση του συστήματος. Έτσι λέμε ότι το σύστημα είναι ΑΟΡΙΣΤΟ και έχει

λύσεις της μορφής $\left(\frac{12 + 3y}{4}, y \right), y \in \mathbb{R}$.

Θα μπορούσαμε να λύσουμε την εξίσωση ως προς y

$$4x - 3y = 12 \Leftrightarrow y = \frac{4x - 12}{3}$$

οπότε δίνοντας τιμές στο x υπολογίζουμε το y . και συνεπώς το σύστημα

έχει λύσεις της μορφής $\left(x, \frac{4x - 12}{3} \right), x \in \mathbb{R}$