

Γραμμικά συστήματα εξισώσεων

(επανάληψη εννοιών και μεθόδων επίλυσης)

- Μια εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **γραμμική εξίσωση**.

Παραδείγματα

$$x - \frac{2}{3}y = \sqrt{2}, \quad 3x - 2y = 1$$

- Λύση της γραμμικής εξίσωσης** ονομάζεται κάθε διατεταγμένο ζεύγος αριθμών που την επαληθεύει. Δηλαδή αν οι αριθμοί του ζεύγους που είναι λύση της γραμμικής εξίσωσης, αντικαταστήσουν τις μεταβλητές x και y προκύπτει μια αληθής ισότητα.

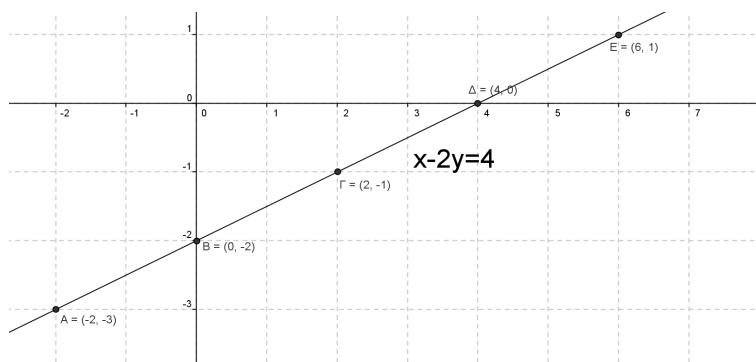
Παράδειγμα

Τα διατεταγμένα ζεύγη $(-3, 1)$ και $(-12, -2)$ είναι λύσεις της γραμμικής εξίσωσης $x - 3y = -6$ γιατί: $-3 - 3(1) = -3 - 3 = -6$ και $-12 - 3(-2) = -12 + 6 = -6$.

Το διατεταγμένο ζεύγος $(1, -1)$ δεν είναι λύση της γραμμικής εξίσωσης γιατί $1 - 3(-1) = 1 + 3 = 4 \neq -6$.

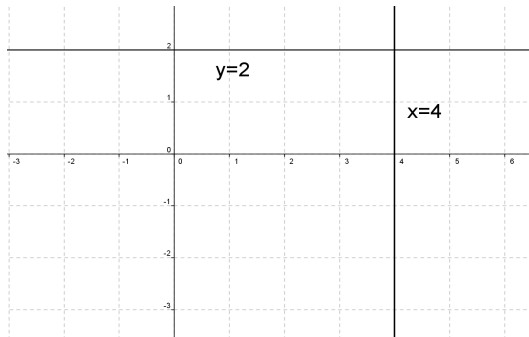
Γραφική αναπαράσταση γραμμικής εξίσωσης

- Καθώς γνωρίζουμε τα διατεταγμένα ζεύγη αν τοποθετηθούν σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων αντιστοιχούν σε σημεία. Οπότε κάθε λύση της γραμμικής εξίσωσης αν τοποθετηθεί σε σύστημα συντεταγμένων θα αντιστοιχεί επίσης σε ένα σημείο. Τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η **ευθεία έχει εξίσωση** τη γραμμική εξίσωση από την οποία προέκυψε.



Η ευθεία με εξίσωση $2x - y = 4$ και μερικά σημεία που ανήκουν σε αυτή

- **Ειδικές περιπτώσεις**



Ευθείες παράλληλες στους άξονες

Ευθεία παράλληλη με τον άξονα $x'x$. Τα σημεία που ανήκουν στην ευθεία αυτή έχουν σταθερή τη δεύτερη συντεταγμένη, δηλ. την τεταγμένη.

Οπότε έχουν εξίσωση $y = k$ όπου $k \in \mathbb{R}$.

Ευθεία παράλληλη με τον άξονα $y'y$. Τα σημεία που ανήκουν στην ευθεία αυτή έχουν σταθερή την πρώτη συντεταγμένη, δηλ. την τετμημένη.

Οπότε έχουν εξίσωση $x = k$ όπου $k \in \mathbb{R}$.

- **Ερώτηση:** Πως αναγνωρίζουμε αν ένα σημείο με γνωστές συντεταγμένες βρίσκεται σε ευθεία με γνωστή εξίσωση;

Απάντηση: Από τα προηγούμενα γνωρίζουμε ότι κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε ένα διατεταγμένο ζευγάρι αριθμών που αποτελεί και τη λύση της γραμμικής εξίσωσης.

Οπότε αν οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν τη γραμμική εξίσωση τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία.

Παράδειγμα

Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(4, -2)$, $B(2, -3)$, $\Gamma(-1, -2)$ ανήκουν στην ευθεία $x - 2y = 8$.

Λύση

Για το σημείο A : $4 - 2 \cdot (-2) = 4 + 4 = 8$ άρα το A ανήκει στην ευθεία.

Για το σημείο B : $2 - 2 \cdot (-3) = 2 + 6 = 8$ άρα το B ανήκει στην ευθεία.

Για το σημείο Γ : $-1 - 2 \cdot (-2) = -1 + 4 = 3 \neq 8$, άρα το Γ δεν ανήκει στην ευθεία.

- **Ερώτηση :** Πως σχεδιάζουμε σε σύστημα συντεταγμένων ευθεία με γνωστή εξίσωση;

Απάντηση : Καθώς γνωρίζουμε, από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία. Τα σημεία της ευθείας αντιστοιχούν στο ζευγάρι των συντεταγμένων τους, το οποίο είναι και λύση της γραμμικής εξίσωσης. Οπότε προσδιορίζουμε δύο σημεία βρίσκοντας δύο λύσεις της αντίστοιχης γραμμικής εξίσωσης. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε την ευθεία που διέρχεται από αυτά.

Παράδειγμα

Να σχεδιάσετε σε σύστημα συντεταγμένων την ευθεία με εξίσωση $5x - 2y = 10$.

Λύση

Βρίσκουμε δύο λύσεις της γραμμικής εξίσωσης.

Για $x = 0$ $5 \cdot 0 - 2y = 10 \Leftrightarrow -2y = 10 \Leftrightarrow y = -5$ οπότε

$A(0, -5)$.

Για $y = 0$ $5x - 2 \cdot 0 = 10 \Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = 2$ οπότε

$B(2, 0)$.

Τοποθετούμε τα σημεία σε σύστημα συντεταγμένων και σχεδιάζουμε την ευθεία που διέρχεται από αυτά.

- **Ερώτηση** : Πως βρίσκουμε τα σημεία τομής ευθείας γνωστής εξίσωσης με τους άξονες;

Απάντηση: Το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα

$x'x$ έχει τη δεύτερη συντεταγμένη, δηλ. την τεταγμένη, ίση με το 0 και επιπλέον οι συντεταγμένες αυτού του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Άρα για να βρω σημείο τομής με τον $x'x$ θέτω στην εξίσωση της ευθείας $y=0$.

Με το ίδιο σκεπτικό, βρίσκουμε το σημείο τομής της ευθείας με τον $y'y$ θέτοντας στην εξίσωση της ευθείας $x=0$.

Παράδειγμα

Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με εξίσωση $4x + 3y = 12$ με τους άξονες.

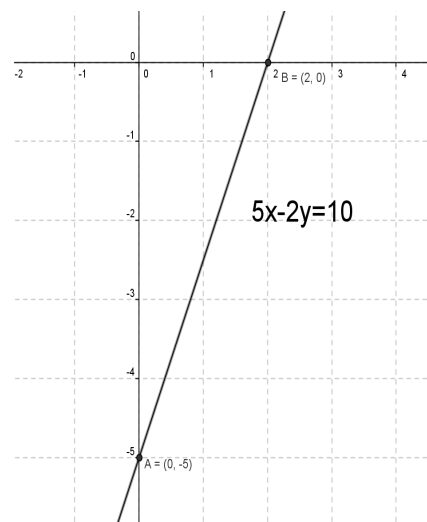
Λύση

Για το σημείο τομής με τον $x'x$. Θέτω στην εξίσωση της ευθείας όπου $y=0$.

$$4x + 3 \cdot 0 = 12 \Leftrightarrow x = 3 \quad \text{Άρα } A(3, 0).$$

Για το σημείο τομής με τον $y'y$. Θέτω στην εξίσωση της ευθείας όπου $x=0$.

$$4 \cdot 0 + 3y = 12 \Leftrightarrow y = 4 \quad \text{Άρα } B(0, 4).$$



Γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

- Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις και ζητάμε τις κοινές λύσεις τους τότε λέμε ότι έχουμε ένα **γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με δύο αγνώστους** ή αλλιώς γραμμικό σύστημα 2×2 . Κάθε διατεταγμένο ζευγάρι αριθμών που είναι λύση και των δύο εξισώσεων αποτελεί και **τη λύση του συστήματος**.
- Μάθαμε ότι κάθε γραμμική εξίσωση μπορεί, σε σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων, να αναπαρασταθεί με μία ευθεία.

Από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι δύο ευθείες στο επίπεδο:

- μπορεί να έχουν ένα κοινό σημείο, όποτε είναι τεμνόμενες,
- μπορεί να μην έχουν κοινό σημείο, οπότε είναι παράλληλες,
- μπορεί να ταυτίζονται, οπότε έχουν άπειρα κοινά σημεία.

Άρα ένα γραμμικό σύστημα 2×2 είναι δυνατόν

- να έχει μοναδική λύση,
- να μην έχει λύση, δηλαδή να είναι αδύνατο,
- να έχει άπειρες λύσεις που αντιστοιχούν στα σημεία της ευθείας.

Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος 2×2

- Ο προσδιορισμός της λύσης ενός γραμμικού συστήματος μπορεί να γίνει με σχεδιασμό των ευθειών που αντιστοιχούν στις δύο εξισώσεις. Όμως η μέθοδος αυτή δεν μας παρέχει μεγάλη ακρίβεια. Οπότε, για να προσδιορίσουμε με ακρίβεια τη λύση ενός γραμμικού συστήματος θα χρησιμοποιήσουμε αλγεβρικές μεθόδους.

ΠΡΟΣΟΧΗ : Πριν εφαρμόσουμε οποιαδήποτε μέθοδο πρέπει να φέρουμε και τις δύο εξισώσεις στη μορφή $ax + by = \gamma$ $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$

- **Μέθοδος αντικατάστασης** . Με τη μέθοδο αυτή :
 - λύνουμε τη μία εξίσωση ως προς έναν άγνωστο,
 - αντικαθιστούμε το άγνωστο αυτό στην άλλη εξίσωση, με αποτέλεσμα να προκύψει εξίσωση πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε,

- ο αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα σε μια από τις αρχικές εξισώσεις και λύνοντας βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.

Παράδειγμα

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα
$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ x - 3y &= 1 \end{aligned}$$

Λύση

Λύνουμε τη δεύτερη εξίσωση ως προς x : $x = 1 + 3y$

Αντικαθιστούμε το x στην πρώτη εξίσωση :

$$2 \cdot (1 + 3y) - y = 4 \Leftrightarrow 2 + 6y - y = 4 \Leftrightarrow 5y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{5} = 0,4$$

- ο Αντικαθιστούμε το y στη δεύτερη εξίσωση :

$$x - 3 \cdot \frac{2}{5} = 1 \Leftrightarrow 2x - 15 = 2 \Leftrightarrow 2x = 17 \Leftrightarrow x = \frac{17}{2} = 8,5$$

- ο Η λύση είναι το διατεταγμένο ζεύγος $(2,5, 8,5)$

- **Μέθοδος αντιθέτων συντελεστών.** Με τη μέθοδο αυτή :

- ο δημιουργούμε αρχικά αντίθετους συντελεστές στις μεταβλητές x ή y των δύο εξισώσεων. Για να το πετύχουμε πολλαπλασιάζουμε τη μία , ή και τις δύο εξισώσεις με τους κατάλληλους αριθμούς,
- ο προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και έτσι προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία και λύνουμε,
- ο αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα σε μια από τις αρχικές εξισώσεις και λύνοντας βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.

Παράδειγμα

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα
$$\begin{aligned} \frac{3x}{2} - \frac{4y}{3} &= -\frac{1}{6} \\ \frac{x+2}{4} - \frac{y}{3} &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Λύση

Αρχικά θα φέρουμε και τις δύο εξισώσεις στη μορφή : $ax + by = \gamma$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Για να το πετύχουμε αυτό αρχίζουμε με απαλοιφή παρονομαστών

$$\begin{aligned} 6 \cdot \frac{3x}{2} - 6 \cdot \frac{4y}{3} &= 6 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \\ 12 \cdot \frac{x+2}{4} - 12 \cdot \frac{y}{3} &= 12 \cdot \frac{5}{6} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 9x - 8y &= -1 \\ 3 \cdot (x+2) - 4y &= 10 \end{aligned} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} 9x - 8y &= -1 \\ 3x + 6 - 4y &= 10 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 9x - 8y &= -1 \\ 3x - 4y &= 4 \end{aligned} \quad (1).$$

Ξεκινάμε με τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών. Θα φτιάξουμε αντίθετους συντελεστές στη μεταβλητή y, οπότε πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση με το -2 και έχουμε :

$$\begin{aligned} 9x - 8y &= -1 \\ -2 \cdot 3x - (-2) \cdot 4y &= -2 \cdot 4 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 9x - 8y &= -1 \\ -6x + 8y &= -8 \end{aligned} \quad \text{με πρόσθεση κατά μέλη :}$$

$$9x - 6x = -1 - 8 \Leftrightarrow 3x = -9 \Leftrightarrow x = -3$$

Αντικαθιστούμε το $x = -3$ στη δεύτερη εξίσωση της σχέσης (1) και έχουμε :

$$3 \cdot (-3) - 4y = 4 \Leftrightarrow -9 - 4y = 4 \Leftrightarrow -4y = 13 \Leftrightarrow y = -\frac{13}{4}$$

Οπότε η λύση του συστήματος είναι το διατεταγμένο ζεύγος $\left(-3, -\frac{13}{4}\right)$

- **Δύο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις :**

i) Σύστημα αδύνατο ii) σύστημα με άπειρο πλήθος λύσεων

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ \circ \text{ Να λυθεί το σύστημα } x - \frac{y}{2} &= 1 \end{aligned}$$

Λύση

Με απαλοιφή παρονομαστών η δεύτερη εξίσωση γίνεται : $2x - y = 2$

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ \text{οπότε το σύστημα γράφεται } 2x - y &= 2 \end{aligned}$$

πολλαπλασιάζουμε με -1 τη δεύτερη εξίσωση και έτσι αλλάζουν τα πρόσημα

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 4 \\ -2x + 4y &= -2 \end{aligned} \quad \text{με πρόσθεση κατά μέλη θα προκύψει}$$

$0 + 0 = 2$ που είναι αδύνατο άρα και το σύστημα είναι επίσης **ΑΔΥΝΑΤΟ**.

Παρατήρηση : Αφού το σύστημα είναι αδύνατο αυτό σημαίνει ότι οι δύο ευθείες που παριστάνουν οι γραμμικές εξισώσεις του συστήματος είναι μεταξύ τους παράλληλες.

- ο Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{array}{l} 3x - 6y = 12 \\ x - 2y = 4 \end{array}$$

Λύση

Λύνουμε με αντίθετους συντελεστές. Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη εξίσωση με το -3

οπότε έχουμε :
$$\begin{array}{l} 3x - 6y = 12 \\ -3x + 6y = -12 \end{array}$$
 με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$0 + 0 = 0$ που είναι μια αληθής ισότητα οπότε το γραμμικό σύστημα **έχει άπειρες λύσεις**. Οι λύσεις αυτές θα είναι διατεταγμένα ζεύγη που αντιστοιχούν στις συντεταγμένων των σημείων της ευθείας $3x - 6y = 12$.

Παρατήρηση : Αφού το σύστημα έχει για λύση κάθε σημείο της ευθείας αυτό σημαίνει ότι οι δύο ευθείες που παριστάνουν οι γραμμικές εξισώσεις του συστήματος ταυτίζονται. Δηλαδή έχει πέσει η μία πάνω στην άλλη.