

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης

1. Η έννοια της Συνάρτησης

A. Ορισμός Συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης εισήχθηκε στα μαθηματικά από τον **Leibniz** το 1694. Στον **Euler**, το 1748, οφείλεται ο όρος “συνάρτηση” (function) καθώς και ο συμβολισμός $f(x)$.

Ο LEONARD EULER
(1707–1783)

ήταν ο μεγαλύτερος μαθηματικός του 18ου αιώνα και ο παραγωγικότερος όλων των εποχών

Έστω A υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

Πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A λέγεται μια διαδικασία f , με την οποία κάθε στοιχείο x του A αντιστοιχίζεται σε ένα και μοναδικό πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$
(2018 E–2019)

- Για να οριστεί μια συνάρτηση f αρκεί να δοθούν δύο στοιχεία:
α) το πεδίο ορισμού της
β) η τιμή της $f(x)$, για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

► Το πεδίο ορισμού A μιας συνάρτησης f συμβολίζεται συνήθως με D_f

► Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή $f(A) = \{y / y = f(x), x \in A\}$

Β. Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

► Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο.

Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$ λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται με C_f

► Επειδή κάθε στοιχείο x του A αντιστοιχίζεται σε ένα και μοναδικό πραγματικό αριθμό y , δεν υπάρχουν σημεία της C_f με την ίδια τετμημένη.

Άρα κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο

ΠΡΟΣΟΧΗ

► Όταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , τότε :

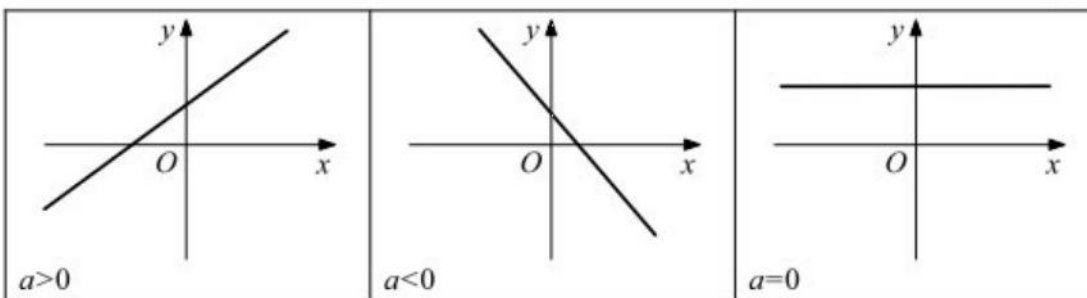
α) Το σύνολο A των τετμημένων της C_f είναι το πεδίο ορισμού της f

β) Το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων της C_f είναι το σύνολο τιμών της f

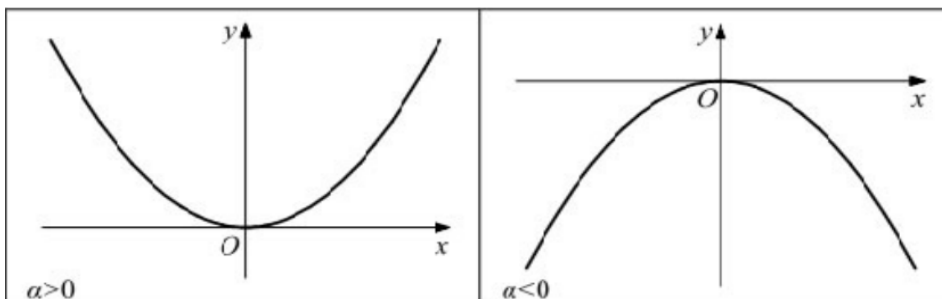
γ) Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f

► Γραφικές Παραστάσεις Βασικών Συναρτήσεων

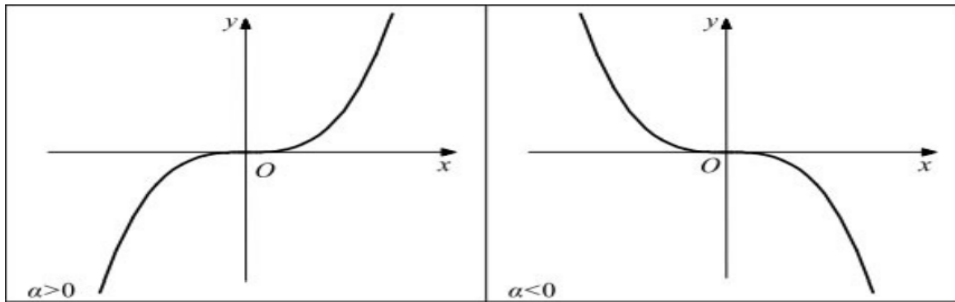
① Η ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \alpha x + \beta$



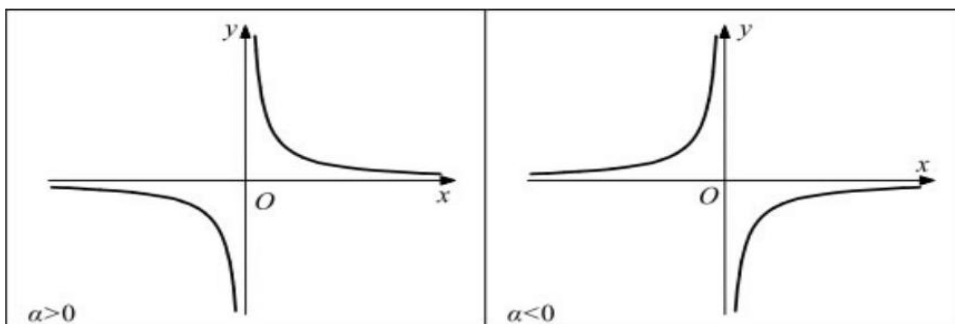
② Η ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$



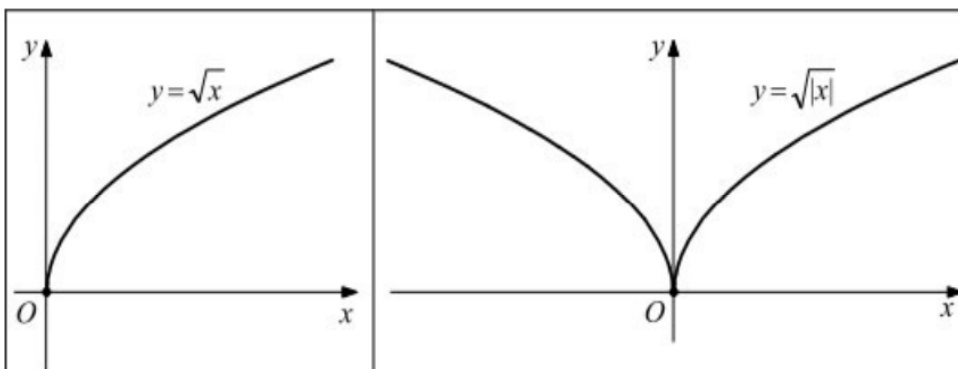
③ Η ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \alpha x^3$, $\alpha \neq 0$



④ Η ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$

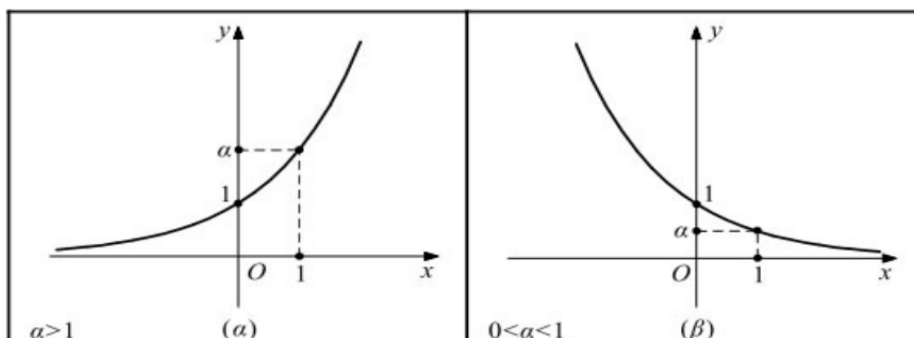


⑤ ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ $f(x) = \sqrt{x}$ ΚΑΙ $f(x) = \sqrt{|x|}$

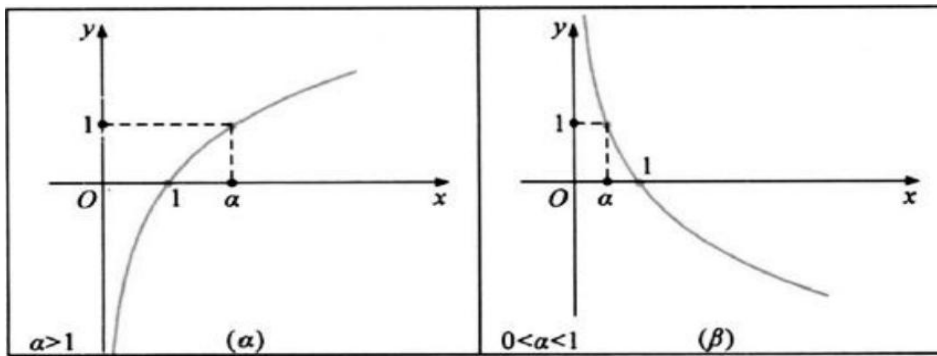


Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$

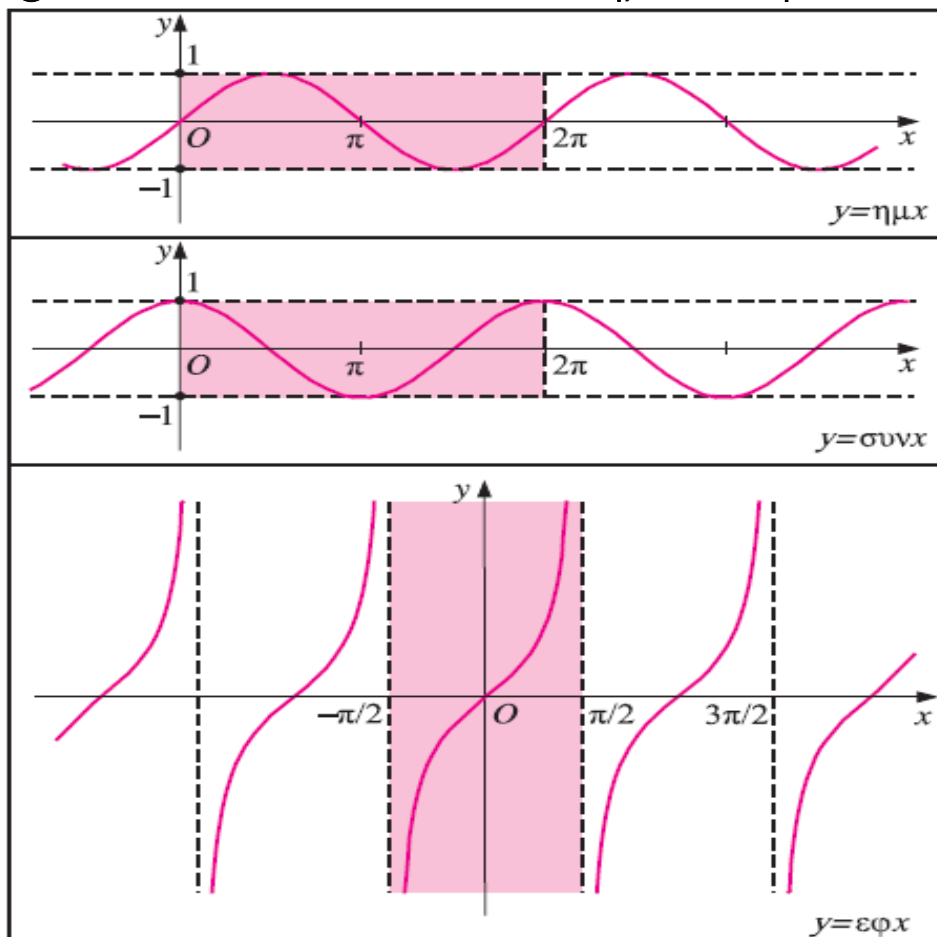
⑥ Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$



⑦ Η ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \log_{\alpha} x$, $0 < \alpha \neq 1$



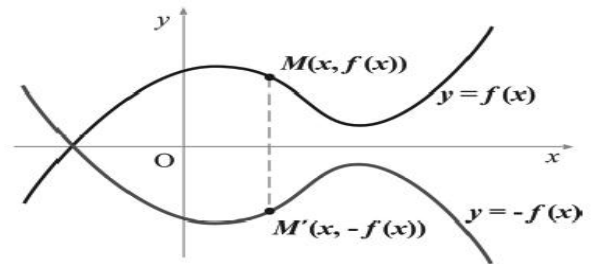
⑧ ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\epsilon\phi x$



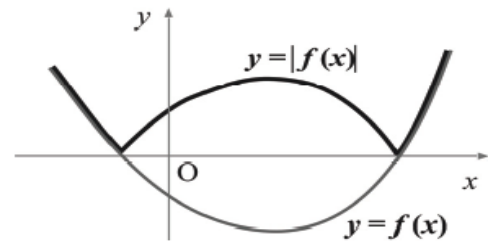
► Όταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , μπορούμε να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$

① Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$ της γραφικής παράστασης της f .

γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$ ως προς τον άξονα $x'x$.



② Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.



► Μετατόπιση Γραφικών Παραστάσεων

① Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + \kappa$ με $\kappa > 0$ προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά κ μονάδες προς τα πάνω.

② Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) - \kappa$ με $\kappa > 0$ προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά κ μονάδες προς τα κάτω.

③ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x + \kappa)$ με $\kappa > 0$ προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της C_f κατά κ μονάδες αριστερά.

④ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x - \kappa)$ με $\kappa > 0$ προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της C_f κατά κ μονάδες δεξιά.

Άρτιες - Περιττές Συναρτήσεις

► Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **άρτια** όταν:

- για κάθε $x \in A$ το $-x \in A$
- ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$

→ Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$

► Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **άρτια** όταν:

- για κάθε $x \in A$ το $-x \in A$
- ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$

→ Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον

Γ. Ισότητα Συναρτήσεων

Δύο συναρτήσεις f, g λέγονται **ίσες** όταν :

- ▶ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- ▶ για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$ **(2007–2012 E–2016)**

Δ. Πράξεις μεταξύ Συναρτήσεων

● Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$.

Αν είναι $A \cap B \neq \emptyset$, τότε με πεδίο ορισμού το $A \cap B$ ορίζουμε τις παρακάτω συναρτήσεις :

- ▶ **άθροισμα**, η οποία συμβολίζεται με $f + g$ και έχει τύπο $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- ▶ **διαφορά**, η οποία συμβολίζεται με $f - g$ και έχει τύπο $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- ▶ **γινόμενο**, η οποία συμβολίζεται με $f \cdot g$ και έχει τύπο $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

● Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$.

Αν είναι $A \cap B \neq \emptyset$, τότε με πεδίο ορισμού το $A \cap B - \{x/g(x) = 0\}$ ορίζουμε τη συνάρτηση **πηλίκο**

η οποία συμβολίζεται με $\frac{f}{g}$ και έχει τύπο: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Ασκήσεις

A. Εύρεση πεδίου ορισμού συνάρτησης

1.1 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

$$\alpha) f(x) = \frac{2x-1}{x^2+2x-3}$$

$$\beta) f(x) = \frac{x+4}{|2x-3|-5}$$

$$\gamma) f(x) = \sqrt{x^2-3x-4}$$

$$\delta) f(x) = \ln(-x^2+3x+10)$$

$$\epsilon) f(x) = \frac{5^x-4}{\sqrt{3-|x+1|}}$$

$$\zeta) f(x) = \frac{e^x}{\ln(x-2)}$$

1.2 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

$$\alpha) f(x) = \frac{5x}{x^3-x^2-2x}$$

$$\beta) f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$$

$$\gamma) f(x) = \sqrt{\frac{x-5}{x+2}}$$

$$\delta) f(x) = \frac{5}{3-|x-2|}$$

1.3 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

$$\alpha) f(x) = \sqrt{5-|x+1|}$$

$$\beta) f(x) = \sqrt{|2x+1|-7}$$

$$\gamma) f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-4}\right)$$

$$\delta) f(x) = \frac{x+1}{x^3-3x^2+x+2}$$

1.4 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

$$\alpha) f(x) = \frac{1}{x^2-x-2} + \frac{5}{x-3}$$

$$\beta) f(x) = \sqrt{x^2-4}$$

$$\gamma) f(x) = \sqrt{12-x-x^2}$$

$$\delta) f(x) = \ln(1-x^2)$$

1.5 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

$$\alpha) f(x) = \frac{x-2}{e^{2x}-e^x-2}$$

$$\beta) f(x) = \frac{4}{\ln(x-1)-1}$$

$$\gamma) f(x) = \ln(e^x-1)$$

$$\delta) f(x) = \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x-2}}$$

1.6 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

$$\alpha) f(x) = \frac{\sqrt{4-|3-x|}}{\ln x}$$

$$\beta) f(x) = \log(|x|-3)$$

$$\gamma) f(x) = \frac{e^x}{e^x-e^{-x}}$$

$$\delta) f(x) = (\sqrt{x}-1)^{\sqrt{x}-2}$$

1.7 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

$$\alpha) f(x) = \frac{\sqrt{x-7}}{x^2-9x+8}$$

$$\beta) f(x) = \frac{\sqrt{x^3-8}}{2^x-16}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-9x+8} + \ln(81-x^2)$$

1.8 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

$$\alpha) f(x) = \ln \frac{x-1}{x+2}$$

$$\beta) f(x) = \frac{x^2+1}{\ln x-1}$$

$$\gamma) f(x) = \sqrt{\ln(x-3)}$$

1.9 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

$$\alpha) f(x) = \frac{5x-7}{2\eta\mu x-2\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\beta) f(x) = \frac{x^2+8}{\sigma\varphi x-\sqrt{3}}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\epsilon\varphi x-1}$$

$$\delta) f(x) = \frac{\ln(1+x)}{2^x-1}$$

$$\epsilon) f(x) = \ln(x^2+x-2) + \ln \frac{x+3}{3-x}$$

1.10 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2+5x+2}{x^3+8}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq \frac{1}{4}$

Domain of definition
ή απλώς **domain**
το πεδίο ορισμού
στα Αγγλικά

1.11 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$

B. Τιμή Συνάρτησης στο x_0

1.12 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τις τιμές $f(-3)$ και $f(f(2))$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 8$.

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\frac{f(\alpha + \beta) - f(\alpha - \beta)}{\alpha\beta}$ με $\alpha, \beta \neq 0$

1.13 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 10x + 2\alpha}{x^3 + \alpha}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 3$.

- α) Να βρείτε την τιμή του α και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 1$.

1.14 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(x + \alpha)}{\ln(\beta - x)}$ για την οποία ισχύει $f(-1) = 1$ και $f(-6) = 0$. Να βρείτε:

- α) τους αριθμούς α και β β) το πεδίο ορισμού της f

Γ. Συναρτήσεις Πολλαπλού Τύπου

1.15 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{αν } x \leq 4 \\ x^2 - 1, & \text{αν } 4 < x \leq 10 \end{cases}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και να υπολογίσετε τις τιμές $f(-3)$, $f(4)$, $f(10)$.

1.16 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x + \alpha, & \text{αν } -6 \leq x < -1 \\ x^2 + \beta, & \text{αν } -1 \leq x < 7 \end{cases}$ για την οποία ισχύει $f(-2) = 5$ και $f(5) = 24$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
β) Να βρείτε τους αριθμούς α και β
γ) Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$ και $f(f(-3))$
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$.

1.17 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x, & x \geq 2 \\ \alpha x - 8, & x \leq 2 \end{cases}$. Να βρείτε τον αριθμό α

1.18 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \alpha \ln x + \beta, & \text{αν } x > 0 \\ \alpha e^x - \beta, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ για την οποία ισχύει $f(0) = -1$ και $f(1) = 3$. Να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
β) τους αριθμούς α και β

1.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{αν } x \leq 1 \\ 1 - x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$, $f(f(4))$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(\sin \alpha) = \frac{7}{4}$
δ) Να βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $f(\lambda^2 - 4\lambda + 6) = -10$

Δ. Εύρεση Τύπου Συνάρτησης – Συναρτησιακές Σχέσεις

1.20 Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f για την οποία ισχύει: $3f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 5x^2, \forall x \neq 0$.

1.21 Να βρείτε τον τύπο της f για την οποία ισχύει: $f(x) + x \leq 2x^2 \leq f(x+1) - 3x - 1, x \in \mathbb{R}$.

1.22 Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f για την οποία ισχύει: $f(x) + 2f(3-x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.

1.23 Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f για την οποία ισχύει: $f(x) + x \leq x^2 \leq f(x+1) - x, x \in \mathbb{R}$.

1.24 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) + 3f(2-x) = -4x, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
α) την τιμή $f(1)$ β) τον τύπο της συνάρτησης f

1.25 Να βρείτε τον τύπο της f για την οποία ισχύει: $f(x) + 3x \leq x^2 \leq f(x-2) + 7x - 10, x \in \mathbb{R}$

1.26 Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x \cdot y) = f(x) + f(y), x, y > 0$. Να δείξετε:
α) $f(1)=0$ β) $f(y) = -f\left(\frac{1}{y}\right), y > 0$ γ) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y), x, y > 0$ δ) $f(x^3) = 3f(x), x > 0$

1.27 Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f για την οποία ισχύει: $f(x-3) - 2f(1-x) = x^2 - 2x, x \in \mathbb{R}$

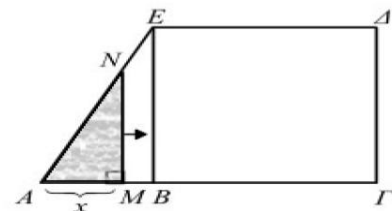
1.28 Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f για την οποία ισχύει: $f^2(x) = 4e^x(f(x) - e^x), x \in \mathbb{R}$.

1.29 Να βρείτε τον τύπο της $f: \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x+1}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

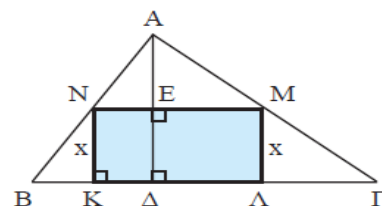
1.30 Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει περίμετρο 8 cm και η βάση του είναι x cm.
Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του x .

1.31 Σύρμα μήκους 20 cm κόβεται σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x cm, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο ισόπλευρο τρίγωνο. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του x (Σχολικό)

1.32 Στο παρακάτω σχήμα το ΕΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 2 και $AB = 1$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου συναρτήσει του x , όταν το σημείο Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ. (Σχολικό)



1.33 Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ με ύψος x cm είναι εγγεγραμμένο σε τρίγωνο ΑΒΓ βάσης $B\Gamma = 10$ cm και ύψους $AD = 5$ cm. Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε και η περίμετρος Ρ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x (Σχολικό)



Ε. Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

1.34 Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^2 + 2x - 8$ β) $f(x) = |2x - 1| - 5$ γ) $f(x) = \ln(x - 2)$

δ) $f(x) = e^x + 2$ ε) $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

1.35 Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \ln^2 x - \ln x$ β) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ γ) $f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2$ δ) $f(x) = e^{x^2-x-2} - 1$

1.36 Να βρείτε την σχετική θέση με τον άξονα $x'x$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

α) $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$ β) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ γ) $f(x) = \frac{9x^2 - 9x - 4}{3x + 1}$

1.37 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$:

α) $f(x) = x^3 - 4x$ β) $f(x) = 1 - \ln x$ γ) $f(x) = 2e^x - 2$

1.38 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$:

α) $f(x) = \frac{x+1}{x^3-3x^2-4x+12}$ β) $f(x) = \ln(x+1) + \ln(1-x)$

1.39 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) - 2f^2(x) + 4f(x) = -x^2 + x - 1$.

Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα των $x'x$

1.40 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f^3(x) - 2f^2(x) + 5f(x) = -e^{2x} - e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$

1.41 Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ και $g(x) = x^2 + x + 1$

β) $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^2 + x - 1$

γ) $f(x) = x \ln x - 2x$ και $g(x) = x$

δ) $f(x) = 3^{2x+5}$ και $g(x) = 3^{x+2} + 2$

1.42 Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $g(x) = \frac{6}{x}$ β) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$, $g(x) = x^2 + x + 2$

1.43 Να βρείτε την σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων f και g :

α) $f(x) = x^3 + x$ και $g(x) = 3x^2 - 2$ β) $f(x) = \ln^2 x$ και $g(x) = \ln x + 2$

γ) $f(x) = g(x) + x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

1.44 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g όταν:

α) $f(x) = x^2$ και $g(x) = 6x - 8$ β) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$ και $g(x) = x^2 - 4x + 1$

γ) $f(x) = x^2 - e^x$ και $g(x) = x^2 e^x - 1$

1.45 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-12}$. Να βρεθούν:

α) το πεδίο ορισμού της f β) τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες

γ) τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

1.46 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2+x+3}{x-2}$ και $g(x) = x^2 + 2x$. Να βρεθούν:

α) τα κοινά σημεία των C_f , C_g

β) τα διαστήματα που η C_g βρίσκεται πάνω από την C_f

1.47 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$ και $g(x) = 2^{x+1} - 8$. Να βρεθούν:

α) τα κοινά σημεία των C_f , C_g β) τα διαστήματα που η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g

1.48 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x + 2$ και η ευθεία $\varepsilon: 6x - y - 4 = 0$. Να βρεθούν:

α) τα κοινά σημεία των C_f και της ε β) τα διαστήματα που η C_f βρίσκεται πάνω από την ε .

1.49 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ \ln x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f :

α) με τον άξονα $x'x$ β) με την ευθεία $y = 1$

1.50 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\lambda x + 5}{x^2 + \lambda x + 1}$. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε:

α) η f να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ β) η C_f να διέρχεται από το σημείο $A(1, \lambda + 1)$

1.51 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + 2\alpha$ και $g(x) = 2\beta x^2 + 5x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Να βρεθούν οι αριθμοί α, β ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινά σημεία πάνω στις ευθείες $x = 1$ και $x = -2$.
Κατόπιν να βρεθούν όλα τα κοινά σημεία των C_f, C_g

1.52 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ και $g(x) = x^3 - 3x^2 + \beta - 6\alpha$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -3 και η C_g τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -6 να βρείτε :

α) τους αριθμούς α και β β) τα διαστήματα που η C_f είναι κάτω από την C_g

1.53 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x - \alpha)e^x + \beta$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1 και την ευθεία $x = 1$ στο σημείο με τεταγμένη 2. Να βρείτε :

α) τις τιμές των α και β β) τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = 2x$

1.54 Δίνεται η $f(x) = x^2 + \alpha x + \alpha - 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-3, 5)$, να βρείτε :

α) τον πραγματικό αριθμό α

β) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

γ) τα σημεία τομής της C_f με την γραφική παράσταση της $g(x) = -4x + 1$

δ) τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της $h(x) = \frac{2x^2 - |x - 3|}{2}$

1.55 Δίνεται η $f(x) = \ln(x^2 - 2x + \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να βρείτε:

α) τον πραγματικό αριθμό α και το πεδίο ορισμού της f

β) τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$

γ) τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = 2\ln 3$.

1.56 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \leq 1 \\ |x - 2| + \alpha + 1, & x > 1 \end{cases}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(1, -3)$, να βρείτε :

α) τον πραγματικό αριθμό α

β) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

1.57 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{\alpha - x}{\alpha + x}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(1, -\ln 3)$

α) Να βρείτε :

α1) τον πραγματικό αριθμό α

α2) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

1.58 Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f(x) = x^3 - 4x + \alpha$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) τον αριθμό α

β) τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

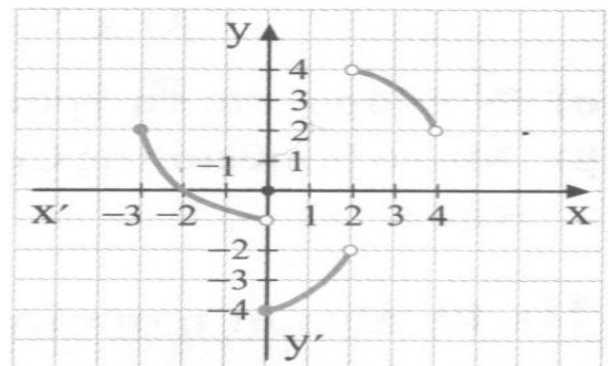
γ) τα σημεία τομής της C_f με τη γραφική παράσταση της $g(x) = -4x^2 - 3x + 4$

1.59 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε: $2xf(x) - x f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 - 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε :

α) τον τύπο της συνάρτησης f

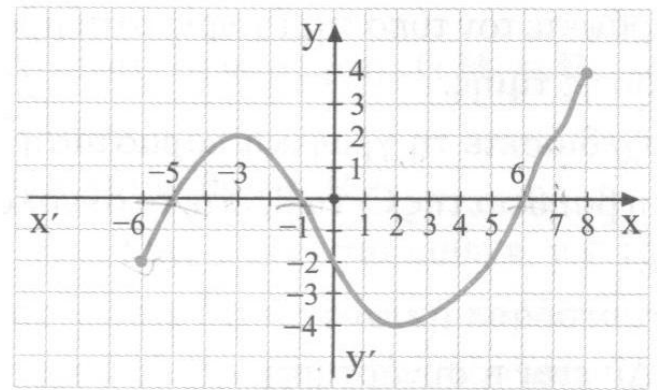
β) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

γ) τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

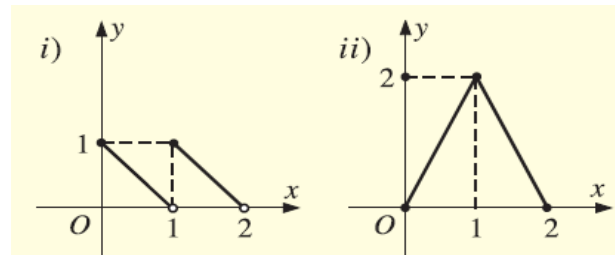


1.66 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- γ) Να βρείτε τις τιμές $f(7)$, $f(f(4))$ και $f(f(6))$
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$, $f(x) = -2$
- ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$
- ζ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f^2(x) + 2f(x) - 3 = 0$
- η) Να βρείτε τα x ώστε να ισχύει $f^2(x) \leq 2f(x)$

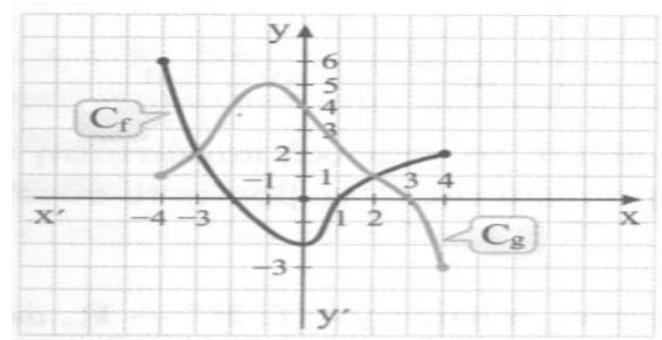


1.67 Να προσδιορίσετε την συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι: **(Σχολικό)**



1.68 Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f , g
- β) Να βρείτε τις τιμές $f(g(0))$, $g(f(0))$
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$
- δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > g(x)$
- ε) Να λύσετε την ανίσωση $g(x) \leq 0$



1.69 Να κάνετε τη γραφική παράσταση των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$ β) $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$

1.70 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & -3 \leq x \leq -1 \\ -x + 1, & -1 < x \leq 2 \end{cases}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
- β) Να σχεδιάσετε τη C_f
- γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

1.71 Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση

α) $f(x) = 1 + \frac{|x|}{x}$ β) $f(x) = x \cdot |x|$ γ) $f(x) = \begin{cases} -x + 3, & x < 1 \\ x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ δ) $f(x) = |\ln x|$

Και από τη γραφική παράσταση να βρείτε το σύνολο τιμών της f **(Σχολικό)**

1.72 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 2 \\ x^2 - 5, & x > 2 \end{cases}$

- α) Να βρεθούν οι τιμές $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$
- β) Να σχεδιάσετε τη C_f

1.73 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$

α) Να σχεδιάσετε τη C_f

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

1.74 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + \alpha x - 1$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(2, 1)$:

α) Να βρείτε τον αριθμό α

β) Να σχεδιάσετε τη C_f

Ζ. Ισότητα Συναρτήσεων

1.75 Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις

α) $f(x) = \frac{e^{3x} - 2xe^x}{xe^x}$, $g(x) = \frac{e^{2x}}{x} - 2$

β) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2|x|}$, $g(x) = 1 - \frac{2}{|x|}$

1.76 Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις

α) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $g(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)^2}$

β) $f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-4|x|}$, $g(x) = 1 + \frac{4}{|x|}$

γ) $f(x) = \sqrt{x} + 3$, $g(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

1.77 Να αποδείξετε ότι είναι ίσες οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2+2x+4}$, $g(x) = (x+3)^2 - x^2 - 5x - 11$

1.78 Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f = g$. Στην περίπτωση που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο να ισχύει $f(x) = g(x)$

α) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$ και $g(x) = \sqrt{x+2}\sqrt{x-3}$

β) $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{x^2-1}$, $g(x) = \frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$

γ) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{1-x}\right)$ και $g(x) = 2\ln x - \ln(1-x)$

1.79 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $(f(x) + g(x))^2 = 4f(x) \cdot g(x)$.
Να δείξετε ότι $f = g$

1.80 Δίνονται οι $f, g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $\frac{(f(x))^2 + (g(x))^2}{2x} = f(x) + g(x) - x$, $\forall x \neq 0$.

Να δείξετε ότι $f = g$

1.81 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f^2(x) + g^2(x) + 8x^2 \leq 4x(f(x) + g(x))$.
Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

1.82 Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ για τις οποίες οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2(x-1) + \beta x(x-2) + \gamma$ και $g(x) = x^3 + 3x^2 - 8x + 5$ είναι ίσες.

1.83 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\lambda x^2 - 3x + \lambda}{x - \lambda^2}$ και $g(x) = \frac{x^2 - (\lambda + 2)x + 2\lambda - 1}{x - 3\lambda + 2}$

Να βρείτε για ποια τιμή του λ οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

1.84 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{(\lambda + 1)x - 2\lambda - 1}{x - 2\lambda^2 + \lambda - 2}$ και $g(x) = \frac{[(1-\lambda)^8 + \lambda]x + (\lambda - 3)^5 - 4}{x - \lambda^2 - 2\lambda}$

Να βρείτε για ποια τιμή του λ οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

1.85 Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι ίσες οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{-\lambda x^3 + 3x - 4}{x^2 - \lambda x + 4}$ και $g(x) = -\lambda x - 1$

1.86 Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε οι $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x - \alpha + 2}$, $g(x) = \frac{x^2 - (\alpha + \beta - 1)x + 2\alpha - 3}{x + \beta - 1}$ να είναι ίσες.

1.87 Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε οι $f(x) = \frac{2x + 5}{x^2 - 7x + 10}$, $g(x) = \frac{\alpha}{x - 2} + \frac{\beta}{x - 5}$ να είναι ίσες.

1.88 Δίνεται η $f(x) = \alpha - 5 - \frac{\alpha}{|x|}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-3, -1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης καθώς και τον αριθμό α .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

γ) Να βρείτε για ποια τιμή του x η C_f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της $g(x) = |x| - 4$

δ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και $h(x) = \frac{x^2 - 36}{x^2 + 6|x|}$ είναι ίσες.

Η. Πράξεις μεταξύ Συναρτήσεων

1.89 Δίνονται οι $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$

1.90 Δίνονται οι $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{6-x}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$

1.91 Δίνονται οι $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{2-x}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$

1.92 Δίνονται οι $f(x) = \frac{x^2-9}{x+2}$ και $g(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$

1.93 Δίνονται οι $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ και $g(x) = \sqrt{1-2x}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$

1.94 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x - 3$, $g(x) = e^x - 2$. Να λύσετε την ανίσωση: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) \geq 0$

1.95 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (Σχολικό)

1.96 Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{x^2+\alpha}{x-2}$ και $g(x) = \frac{7x+5\alpha}{2-x}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = -3$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α

β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $C_{f \cdot g}$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$

2. Σύνθεση Συναρτήσεων

Ορισμός Σύνθεσης Συναρτήσεων

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g** και τη συμβολίζουμε με **$g \circ f$** , τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ και πεδίο ορισμού $A_{g \circ f} = \{x \in A / f(x) \in B\}$

- ▶ Η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_{g \circ f} \neq \emptyset$ δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$
- ▶ Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.
- ▶ Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $h \circ g \circ f$.

Ασκήσεις

A. Ορισμός Σύθεσης Συναρτήσεων

2.1 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{2-x}$ και $g(x) = x^2 + 2x - 6$. Να ορίσετε την fog .

2.2 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, $g(x) = \frac{x-3}{x-2}$. Να ορίσετε, αν ορίζονται, τις fog , gof , $f \circ f$.

2.3 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$, $g(x) = \frac{x-1}{x}$. Ισχύει $fog = gof$;

2.4 Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$. Να ορίσετε την συνάρτηση gog .

2.5 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{2-x}$ και $g(x) = \ln x$. Να ορίσετε, αν ορίζονται, τις fog και gof .

2.6 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-2}$ και $g(x) = \ln(6-2x)$. Να ορίσετε τις fog και gof .

2.7 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x}{x+1}$ και $g(x) = \sqrt{2x+8}$. Να ορίσετε, αν ορίζονται, τις fog και gof .

2.8 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$ και $g(x) = \ln(x-1)$. Να ορίσετε τις fog , gof , $f \circ f$.

2.9 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(1-e^x)$ και $g(x) = \ln x^2$. Να ορίσετε την συνάρτηση fog .

2.10 Να ορίσετε την συνάρτηση gof αν:

α) $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{x}$ β) $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ (Σχολικό)

2.11 Δίνονται οι $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$. Να ορίσετε, αν ορίζονται, τις fog , gof (Σχολικό)

2.12 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x-1$ και $g(x) = x^2 - 2x + 3$. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων fog και gof .

2.13 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{2x-1}$ και $g(x) = \ln(9-x^2)$.

α) Να ορίσετε την συνάρτηση gof .

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της gof με τον άξονα $x'x$.

2.14 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x + \alpha$ και $g(x) = 3x + 2\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 1$, να βρείτε τον αριθμό α και να δείξετε ότι $fog = gof$.

2.15 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) αν οι συναρτήσεις f, g είναι περιττές, τότε και η fog είναι περιττή.

β) αν η συνάρτηση f είναι άρτια και η g είναι περιττή, τότε η fog είναι άρτια.

Composite function
of f and g ,
η σύνθεση της f με
την g

2.16 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+3}$ και $g(x) = x^2 + 1$

- α) Να ορίσετε, αν ορίζονται, τις $f \circ g$ και $g \circ f$
- β) Να εξετάσετε αν η $f \circ g$ είναι άρτια ή περιττή
- γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $g \circ f$

2.17 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$, $g(x) = \ln(x - 1)$. Να βρείτε :

- α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων και να απλοποιήσετε τον τύπο της f
- β) την συνάρτηση $g \circ f$
- γ) τα διαστήματα στα οποία η $C_{g \circ f}$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$

2.18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x + \alpha}{x + 1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-2, 3)$.

- α) Να βρείτε τον αριθμό α
- β) Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ f$
- γ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $(f \circ f)(x)$ και $g(x) = \frac{-x - 1}{x^2 + x}$ είναι ίσες

2.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \alpha}{x + 1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ της οποίας η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$

στο σημείο με τετμημένη 1

- α) Να βρείτε τον αριθμό α
- β) Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ f$
- γ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $(f \circ f)(x)$ και $g(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$ είναι ίσες

2.20 Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x^3$, $x > 0$.

- α) Να βρείτε τη συνάρτηση f .
- β) Αν $g(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ να βρείτε τη συνάρτηση $g \circ f$ καθώς και τα σημεία τομής της με τους άξονες.

2.21 Δίνονται οι $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{\alpha - x}{x + 3}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η C_g διέρχεται από το σημείο $A(-5, -4)$:

- α) να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α
- β) να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ g$
- γ) να αποδείξετε ότι η $f \circ g$ είναι περιττή

2.22 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{x}{1 - x}$. Να ορίσετε την $f \circ g$. (**ΘΕΜΑ 2017**)

2.23 Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + 1$ και $g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x - 2}$
Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$ (**ΘΕΜΑ 2019Ε**)

2.24 Δίνονται οι συναρτήσεις $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$, $g(x) = e^x$

Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ (**ΘΕΜΑ 2020**)

B. Αποσύνθεση Συναρτήσεων

2.25 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 6x + 10$ και $f(x) = 3x + 1$
Να βρείτε την συνάρτηση $g(x)$.

2.26 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $(f \circ g)(x) = \eta\mu^2 x + x^4 + 1$ και $f(x) = 2x - 5$
Να βρείτε την συνάρτηση $g(x)$.

2.27 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $(f \circ g)(x) = x^2 + 4$ και $f(x) = e^{2x-5}$
Να βρείτε την συνάρτηση $g(x)$.

2.28 Δίνονται οι συναρτήσεις f και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $(f \circ g)(x) = 2x + 1$ και $f(x) = \ln x, x > 0$.
Να βρείτε την συνάρτηση $g(x)$.

2.29 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $(f \circ g)(x) = x + 8$ και $f(x) = e^{x+1}$.
Να βρείτε την συνάρτηση $g(x)$.

2.30 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 14x + 13$ και $g(x) = 2x - 3$.
Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$.

2.31 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 11x + 16$ και $g(x) = x - 3$
Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$.

2.32 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $(f \circ g)(x) = \frac{2-x}{2+x}, x > 0$ και $g(x) = \ln x$.
Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$.

2.33 Να βρείτε την συνάρτηση $g(x)$, αν $(g \circ f)(x) = \frac{x}{2x^2 + 2x + 1}$ και $f(x) = 2x + 1$

2.34 Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$, αν $(g \circ f)(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$ και $g(x) = x - 2$

2.35 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 1$ και $g(x) = 2x + 1$
α) Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$.
β) Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ f$

2.36 Να βρείτε την συνάρτηση $g(x)$ ώστε να ισχύει
α) $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 2x + 1$ και $f(x) = 1 - 2x$ β) $(g \circ f)(x) = x + 2$ και $f(x) = e^x - 1$

2.37 Να βρείτε την συνάρτηση $g(x)$ ώστε να ισχύει
α) $(f \circ g)(x) = x^2 + 3$ και $f(x) = x^3 - 1$ β) $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 3\eta\mu x + 1$ και $f(x) = 3x + 1$

2.38 Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$ ώστε να ισχύει
α) $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 2$ και $g(x) = x + 1$ β) $(f \circ g)(x) = \sqrt{1+x^2}$ και $g(x) = -x^2$ (Σχολικό)

2.39 Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$ αν $f(e^x) = 3x^2 - 2x + 4, x \in \mathbb{R}$

2.40 Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$ αν $f(2x - 1) = 4x^2 - 6x + 3, x \in \mathbb{R}$

2.41 Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$ αν $f(\ln x) = x^2 + 3\ln x + 1, x > 0$

2.42 Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f(2x - 3) = x^2 - 3x + 2, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε :
α) τον τύπο της f β) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

2.43 Δίνονται οι $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(g \circ f)(x) = 3x^2 - 6x + 10$ και $g(x) = 3x - 2$. Να βρείτε :

- α) τη συνάρτηση f
 β) τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g

2.44 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4$ και $f(x) = 2x - 1$

- α) Να βρείτε την συνάρτηση $g(x)$.
 β) Να βρείτε τα διαστήματα που η $C_{g \circ f}$ βρίσκεται πάνω από την C_g

2.45 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
 β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή
 γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = f(f(0))$
 δ) Αν επιπλέον ισχύει $(g \circ f)(x) = \frac{1+x}{1-x}$ να βρείτε να τον τύπο της g

2.46 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(g \circ f)(x) = 2e^x(e^x + 1) - 15$ και $g(x) = 2x - 3$

- α) Να ορίσετε τη συνάρτηση f
 β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
 γ) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $h(x) = \ln(x + 6)$ και $\varphi(x) = x + \ln(e^x + 1)$. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $h \circ f$ και φ είναι ίσες.

Γ. Εύρεση Πεδίου Ορισμού Σύνθεσης

2.47 Δίνεται η συνάρτηση $f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(2x - 3)$

2.48 Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(\ln x)$

2.49 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

- α) $f(3x - 2)$ β) $f(\ln x)$ γ) $f(e^x)$

2.50 Δίνεται η συνάρτηση $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $g(x) = f(x^2 - 5)$

2.51 Δίνεται η συνάρτηση $f: [1, 9] \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

- α) $h(x) = f(4x^2 - 7)$ β) $g(x) = f(\ln x)$ γ) $\varphi(x) = f(3 - x)$

2.52 Δίνεται η συνάρτηση $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = \frac{e^{x+1}}{e^{x+1} + 1}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g \circ f$
 β) Αν επιπλέον ισχύει $(g \circ f)(x) = \frac{2+x}{3+x}$, να βρείτε τη συνάρτηση f
 γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x + 2}{e^x - 1}$
 γ₁) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της h και να απλοποιήσετε τον τύπο της.
 γ₂) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ h$
 γ₃) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f \circ h$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Δ. Εύρεση τιμής $f(x_0)$ όταν είναι γνωστή η $f \circ f$

2.53 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = 3x - 2, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

2.54 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = x^2 + x, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

2.55 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ώστε $(f \circ f)(x) = 3x^2 + 2x - 80, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή $f(5)$.

2.56 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = 3x + 4, x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $(f(3x + 4)) = 3f(x) + 4, x \in \mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή $f(-2)$.

Ε. Εύρεση Μεταβλητών στην Σύνθεση

2.57 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax - 1$ και $g(x) = 7x - \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι ίσες.

2.58 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax + 1, g(x) = (3\alpha - 2)x + \alpha^2 - 1, \alpha \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε για ποιες τιμές του α ισχύει $f \circ g = g$.

2.59 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x - 1$ και $g(x) = 3ax + 1, \alpha \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι ίσες.

2.60 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x + 3, g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, h(x) = 4x^2 + \beta x + 2\gamma$.

Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β, γ για τους οποίους ισχύει $g \circ f = h$

2.61 Δίνεται η $f(x) = \frac{3 - \alpha x}{2 - x}$. Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \neq 2$ να ισχύει $(f \circ f)(x) = x$

2.62 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + 1$ και $g(x) = \alpha x + 2, \alpha \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι ίσες. (Σχολικό)

2.63 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(g \circ f)(x) = 3x^2 - 9x + 10$ και $g(x) = 3x - 2$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση f

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \alpha x + \beta$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ οι συναρτήσεις $f \circ h$ και $h \circ f$ είναι ίσες.



Ο Λέοναρντ Όιλερ (1707 – 1783) ήταν πρωτοπόρος Ελβετός μαθηματικός και φυσικός.

Θεωρείται ως ο κατ' εξοχήν μαθηματικός του 18ου αιώνα, και ένας από τους σημαντικότερους μαθηματικούς που έχουν υπάρξει ποτέ.

Στον **Euler**, το 1748, οφείλεται ο όρος “συνάρτηση” (function) καθώς και ο συμβολισμός $f(x)$.

3. Μονοτονία Συνάρτησης

A. Ορισμός Γνησίως Αύξουσας

Η συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$

B. Ορισμός Γνησίως Φθίνουσας

Η συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$

ΠΡΟΣΟΧΗ

► Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη** στο Δ .

► Η συνάρτηση f λέγεται **αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) \leq f(x_2)$

► Η συνάρτηση f λέγεται **φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) \geq f(x_2)$

Γ. Ορισμός Ολικού Μεγίστου

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 **ολικό μέγιστο** το $f(x_0)$ όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
(2010 Ε–2014)

ΠΡΟΣΟΧΗ

► Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται **ολικά ακρότατα** της f .

► Άλλες συναρτήσεις παρουσιάζουν μόνο μέγιστο, άλλες μόνο ελάχιστο, άλλες μέγιστο και ελάχιστο και άλλες ούτε μέγιστο, ούτε

Δ. Ορισμός Ολικού Ελαχίστου

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 **ολικό ελάχιστο** το $f(x_0)$ όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

Ασκήσεις

A. Υπολογισμός Παραγώγων Βασικών Συναρτήσεων

3.1 Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

$$\alpha) f(x) = 3x + 7 \quad \beta) f(x) = x^2 + 5x + 2016 \quad \gamma) f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

$$\delta) f(x) = 3e^x + 2\ln x + 7\sqrt{x} \quad \epsilon) f(x) = 3\sin x + 2\eta\mu x + \frac{4}{x} - 2^x$$

3.2 Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

$$\alpha) f(x) = xe^x \quad \beta) f(x) = x\ln x \quad \gamma) f(x) = x^2\eta\mu x \quad \delta) f(x) = x^3\ln x \quad \epsilon) f(x) = (x^2 - 2x)e^x$$

3.3 Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

$$\alpha) f(x) = \frac{2x}{x+1} \quad \beta) f(x) = \frac{3x-1}{2x+5} \quad \gamma) f(x) = \frac{x^2-3x}{2x+3} \quad \delta) f(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

$$\epsilon) f(x) = \frac{x-3}{e^x} \quad \zeta) f(x) = \frac{x}{\ln x} \quad \eta) f(x) = \frac{\eta\mu x}{\sin x}$$

3.4 Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

$$\alpha) f(x) = \ln(x^2 - 3x) \quad \beta) f(x) = \eta\mu(2x + 3) \quad \gamma) f(x) = \sin(x^2 + 5x)$$

$$\delta) f(x) = e^{x^2 - 5x + 3} \quad \epsilon) f(x) = \sqrt{4x - 5} \quad \zeta) f(x) = (3x - 2)^5$$

B. Μελέτη Μονοτονίας

3.5 Να μελετηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :

$$\alpha) f(x) = 2x^3 + 6x - 1 \quad \beta) f(x) = e^x + \ln x$$

$$\gamma) f(x) = -x^5 - x^3 - \ln x$$

3.6 Να μελετηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :

$$\alpha) f(x) = 1 - 3x + \sqrt{1 - 2x} \quad \beta) f(x) = 4e^{3-x} + 2020 \quad \gamma) f(x) = x^5 - \frac{1}{2x}$$

3.7 Να μελετηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία :

$$\alpha) f(x) = \sqrt{1-x} \quad \beta) f(x) = 2\ln(x-2) - 1 \quad \gamma) f(x) = 3e^{1-x} + 1$$

$$\delta) f(x) = (x-1)^2 - 1, \quad x \leq 1 \quad (\text{Σχολικό})$$

$$3.8 \text{ Ομοίως: } \alpha) f(x) = x^2 + \sqrt{x} \quad \beta) f(x) = \frac{2}{x} - \ln x + 1 \quad \gamma) f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x - 4x$$

$$3.9 \text{ Ομοίως: } \alpha) f(x) = \ln(x-1) - e^{2-x} \quad \beta) f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad \gamma) f(x) = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x}$$

$$3.10 \text{ Ομοίως: } \alpha) f(x) = \frac{3x}{2+x} \quad \beta) f(x) = \frac{x+1}{x-3} \quad \gamma) f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$$

Strictly increasing
(decreasing) function
η γνησίως αύξουσα
(φθίνουσα) συνάρτηση

3.11 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + ax^3 + a - 25$ της οποίας η C_f διέρχεται από το $M(-2, 0)$

- α) Να βρείτε την τιμή του a .
- β) Να βρείτε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$
- γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

3.12 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x + 2, & x < 0 \end{cases}$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $[0, +\infty)$
- β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f
- γ) Να εξετάσετε αν η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$

3.13 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha + \beta x^3, & x \leq 1 \\ \alpha - 1 + \beta x, & x > 1 \end{cases}$ της οποίας η C_f διέρχεται από τα

σημεία $A(-1, 4)$ και $B(3, -1)$.

- α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β
- β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα
- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

3.14 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες, τότε και η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.
- β) αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως φθίνουσες τότε η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.
- γ) αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g γνησίως αύξουσα, τότε οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσες.

3.15 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h = \frac{f}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

3.16 Έστω οι συναρτήσεις f, g που είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ .

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι γνησίως αύξουσες.

3.17 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία:

- α) $A(2, 5)$ και $B(4, 3)$
- β) $\Gamma(-1, 6)$ και $\Delta(3, 8)$

3.18 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν η C_f τέμνει τους άξονες $x'x, y'y$ στα σημεία με τετμημένη -2 και τεταγμένη 1 αντίστοιχα τότε:

- α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
- β) Αν g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να εξετάσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις $g \circ g, f \circ g$.

3.19 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 2f(x) = 5x + 2, x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

3.20 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + e^{f(x)} = 2x - 3, x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Γ. Μονοτονία και Ανισώσεις

3.21 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία β) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{1}{x^2+5} - \frac{1}{2x^2+1} < \ln \frac{x^2+5}{2x^2+1}$

3.22 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία β) Να λυθεί η ανίσωση $\ln(x^2 + x + 1) + x^2 < \ln(x + 2) + 1$

3.23 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{2007} + 2007^x$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

β) Να λύσετε την ανίσωση $2007^{3x-1} - 2007^{x+3} > (x+3)^{2007} - (3x-1)^{2007}$

3.24 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

β) Να λύσετε την ανίσωση $(x^3 + x^2)^3 - (x+1)^3 > 2(x+1 - x^3 - x^2)$

3.25 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2x$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία β) Να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{4}{9}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x < 2x$

3.26 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία β) Να λύσετε την $2^{3x-x^2} - x^2 < 2^{6-2x} - 5x + 6$

3.27 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + 4x$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία β) Να λύσετε την ανίσωση $2^{1-x} + 4 < 4x + 6$

3.28 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

β) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{2x^2+3} - \frac{1}{x^2+2x+6} > \sqrt{2x^2+3} - \sqrt{x^2+2x+6}$

3.29 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(1 + e^x)$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία β) Να λύσετε την ανίσωση $(x-1)^2 > \ln \frac{1+e^{2x}}{1+e^{x^2}}$

3.30 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - 2x$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία β) Να λύσετε την $e^{x^2-1} + 4x^2 < e^{x-x^2} + 2(1+x)$

3.31 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία β) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2} + \ln x > e^x$

3.32 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln x$, $x > 0$, $\alpha \in (0, 1)$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να λύσετε την ανίσωση $\alpha^{x^2+x+4} - \alpha^{x^2+9} < \ln(x^2+x+4) - \ln(x^2+9)$

3.33 Δίνεται η $f(x) = \alpha^x + x + 1$, $\alpha > 1$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να λύσετε την $\alpha^{x^2-9} - \alpha^{x-3} < 6 + x - x^2$

3.34 Να λύσετε την ανίσωση $e^{1-x} < 1 + \ln x$

3.35 Να λύσετε την ανίσωση $5x^3 + \ln x < \frac{2}{x} + 3$

3.36 Να λύσετε την ανίσωση $e^x + 3x > \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3.37 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \ln x$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

β) Να βρείτε για ποια τιμή του x η C_f βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της ευθείας $y = 1$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $(3|x| + 1)^2 - (2|x| + 3)^2 > \ln \frac{2|x| + 3}{3|x| + 1}$

3.38 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x + 2)$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^4 + 1) - f(x^2 + 1) > 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln \frac{3x}{x^2 + 2} < x^2 - 3x + 2$

3.39 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^x$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

β) Να αποδείξετε ότι $e^3 - e^x < \ln \frac{x}{3}$ για κάθε $x > 3$

3.40 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 8e^{2-x} - 2x$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 4$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $8(e^{2-x^2} - e^{2-x}) > -2x(1-x)$

3.41 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - x^3$

α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία

β) Να λυθούν οι ανισώσεις :

β1) $e^x(x^3 + 1) < 1$ β2) $f(f(x)) < \frac{1}{e} - 1$ β3) $e^{-x} - \frac{2}{x} < x^3 - \ln^3 2$

3.42 Δίνεται η $f(x) = e^x + \ln(x + 1) - 1$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

β) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2} + \ln(x^2 + 1) > 1$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2} - e^{x+2} > \ln \frac{x+3}{x^2+1}$

3.43 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \sqrt{5^x + 1}$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

β) Να λυθεί η ανίσωση $(3x + 18)^3 - (7x + 12)^3 < \frac{5^{7x+12} - 5^{3x+18}}{\sqrt{5^{7x+12}+1} + \sqrt{5^{3x+18}+1}}$

3.44 Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-2, -3)$, να λύσετε την ανίσωση $2f(x^2 - 3x) + 6 \leq 0$.

3.45 Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$.

Να λύσετε την ανίσωση : $(f \circ f)(x^2 + x) < (f \circ f)(x + 1)$

3.46 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + 2\alpha x - 3$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο 1 :

α) να βρείτε τον αριθμό α

β) να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

γ) να λύσετε την ανίσωση $f(f(x) + 3x^2 + 3) + 3 > 0$.

3.47 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^5 + \alpha x + 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $K(-1, 4)$:

α) να βρείτε τον αριθμό α

β) να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

γ) να λύσετε την ανίσωση $(f \circ f)(x) > 2$.

3.48 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-2, 11)$:

α) να βρείτε τον αριθμό α

β) να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

γ) να λύσετε την ανίσωση $3^x(x + 4) < 1$.

δ) να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{1}{3}\right)^{2|x|} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2|x|+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|+2} + 2|x| - 2$

3.49 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με f γνησίως φθίνουσα και g γνησίως αύξουσα

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση $f \circ g$

β) Να λύσετε την ανίσωση : $(f \circ g)(x^2 - 4x) \geq (f \circ g)(x - 4)$

3.50 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες είναι γνησίως φθίνουσες .

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι γνησίως φθίνουσα

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 + 3) - f(3x + 1) > g(3x + 1) - g(x^2 + 3)$

3.51 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(5, 13)$ και $B(7, 11)$ τότε :

α) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x) - 6) < f(7) + 2$

3.52 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0, 2)$ και $B(2, -3)$ τότε :

α) να βρείτε το είδος μονοτονίας της f

β) να λυθεί η ανίσωση $f\left(f(e^{2x} - 3e^x + 2)\right) < -3$

3.53 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-4, 3)$ και $B(3, -2)$ τότε :

α) να βρείτε το είδος μονοτονίας της f

β) να βρείτε το είδος μονοτονίας της $f \circ f$

γ) να λυθεί η ανίσωση $f\left(f(e^x - 1 - 5)\right) > -2$.

3.54 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2, -1)$ και $B(5, 2)$ τότε :

α) να βρείτε το είδος μονοτονίας της f

β) να λύσετε την ανίσωση $2^{f^2(x)} \leq 4 \cdot 2^{f(x)}$

3.55 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(-2, 7)$ τότε :

- α) να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
- β) να λυθεί η ανίσωση $f(f(|x| - 4) - 6) - 5 < 0$
- γ) να λυθεί η ανίσωση $f(x) \cdot (f(x) - 12) < -35$
- δ) να λυθεί η ανίσωση $f(2x - 1) + f(x + 3) < f(5 - x) + f(7 - x)$

3.56 Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
- β) Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 - 2x) - f(3x - 6) > x^2 - 5x + 6$

3.57 Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 8$

- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^3 - f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- β) Να λυθεί η ανίσωση $8x^3 < f(2x)$

3.58 Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

Να δείξετε ότι $f(x) + f(3x) < f(2x) + f(7x)$

3.59 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - e^{x+1}$

- α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
- β) Να μελετηθεί η $f \circ f$ ως προς την μονοτονία
- γ) Για κάθε $x < 0$ να δείξετε ότι $f(5^x) < f(7^x)$

3.60 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

- α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
- β) Για κάθε θετικό ακέραιο n , να αποδείξετε ότι: $f(5^n) + f(7^n) > f(6^n) + f(8^n)$
- γ) Για κάθε θετικό ακέραιο x , να αποδείξετε ότι: $f(2x) + 1 > f(3x) + f(e^x)$

3.61 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 8x$

- α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
- β) Για κάθε $x > 1$ να αποδείξετε ότι: $f(x^3) + f(2^x) > f(x^2) + f(2)$
- γ) Για κάθε $x < 0$ να αποδείξετε ότι: $f(3^x) + f(5^x) > f(2^x) + f(4^x)$

3.62 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^3) < f(3x - 2)$

3.63 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως φθίνουσα και $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(3 - x) + f(x + 5) = 0$

Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2 + 2x - 4) < 0$.

3.64 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(6 - x) + f(x + 4) = 0$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα
- β) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2 + x + 5) > 0$.

3.65 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ με $x \neq 1$ ισχύει $\ln \frac{x^2 + 1}{2x} > e^{2x} - e^{x^2 + 1}$

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln \left(\frac{x+1}{x} \right)^x > x(e^x - e^{x+1})$

δ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $g(x) = f(x + \alpha) - f(x + \beta)$, $\alpha > \beta > 0$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

3.66 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - e^{-x}$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

β) Να δείξετε ότι $\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{x^2+1}} > \ln \frac{x}{x^2+1}$, $x > 0$

γ) Για κάθε $x, y > 0$ με $x > y$, να δείξετε ότι: $3\ln x + e^{-y^3} < 3\ln y + e^{-x^3}$

δ) Για κάθε $x > 0$ να αποδείξετε ότι $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{e^{x+1}} - \frac{1}{e^x}$

3.67 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε: $f(2x - 1) = -2x + 4(1 - e^{2x})$, $\forall x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 3 - x - 4e^{x+1}$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

γ) Να λύσετε την εξίσωση $(3 - x)e^{-x-1} = 4$

δ) Αν $h(x) = \ln x + 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f \circ h$ τέμνει την ευθεία με εξίσωση $y + 4e^2 = 2$ σε ένα ακριβώς σημείο

ε) Να δείξετε ότι $\frac{\pi}{e} > \frac{e^{4e}}{e^{4\pi}}$

3.68 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $g(x) = f(2x - 5) - f(4 - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Επίσης η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία

β) Να λύσετε την ανίσωση $g(e^x - 2) > 0$

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει $g(e^\alpha) + g(e^{3\alpha}) > g(e^{2\alpha}) + g(e^{5\alpha})$ να δείξετε ότι $\alpha > 0$

δ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία οι συναρτήσεις $f \circ h$ και g είναι ίσες.

Δ. Μονοτονία και Εξισώσεις

3.69 Να λυθεί η εξίσωση $2x^5 + 3e^x = 3$.

3.70 Να λυθεί η εξίσωση $x^3 + \ln x - 1 = 0$.

3.71 Να λυθεί η εξίσωση $\frac{2}{x} = 1 + \ln(x - 1)$.

3.72 Να λυθεί η εξίσωση $e^{3-x} - 1 = \ln(x - 2)$

3.73 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(2x + 3) + 1 = \frac{1}{2x + 3}$

γ) Να λυθεί η ανίσωση $2x^2 \ln x + x^2 < 1$

3.74 Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = e^x$ και $g(x) = 1 - \ln(x + 1)$ έχουν μόνο ένα κοινό σημείο

4. Αντίστροφη Συνάρτηση

A. Ορισμός Συνάρτησης 1-1

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$
λέγεται **συνάρτηση 1-1** όταν
για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:
Αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

(2005 E–2015 E)

● Για τις ασκήσεις, χρησιμοποιούμε την παρακάτω πρόταση,
η οποία αποδεικνύεται με απαγωγή σε άτοπο:
Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **συνάρτηση 1-1**
όταν **για κάθε** $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:
Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$

ΠΡΟΣΟΧΗ

► Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν:
α) για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της,
η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση
ως προς x .

β) δεν υπάρχουν σημεία της C_f με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ σε ένα σημείο.

► Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι
γνησίως μονότονη τότε η f είναι συνάρτηση 1-1

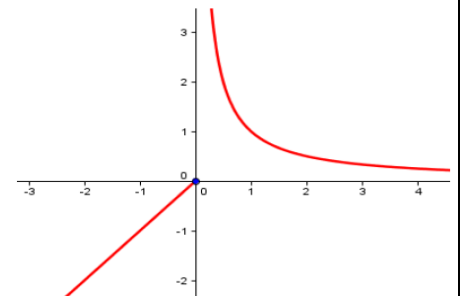
ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε
είναι και γνησίως μονότονη **(2018)**

► Η πρόταση αυτή είναι ψευδής.

► Πράγματι, η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ είναι συνάρτηση 1-1,

αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη,
αφού είναι γνησίως αύξουσα για $x \leq 0$,
ενώ γνησίως φθίνουσα για $x > 0$



B. Αντίστροφη Συνάρτηση

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη αν είναι 1-1.

Τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών $f(A)$ της f , υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A , για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται σε ένα μοναδικό $x \in A$ Για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Η g λέγεται **αντίστροφη** της f και συμβολίζεται με f^{-1} .

Επομένως έχουμε $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ **(2019)**

Γ. Ιδιότητες Αντίστροφης Συνάρτησης

● Έστω ότι $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μια 1-1 συνάρτηση. Από τον τρόπο που ορίστηκε η συνάρτηση, προκύπτουν :

α) Η αντίστροφη f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f

β) Η αντίστροφη f^{-1} έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f

γ) Ισχύει ότι $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A$

δ) Ισχύει ότι $f(f^{-1}(y)) = y$ για κάθε $y \in f(A)$

● Οι γραφικές παραστάσεις των C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Ασκήσεις

A. Συνάρτηση 1-1

4.1 Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1 :

$$\alpha) f(x) = 3e^{x-3} - 5 \quad \beta) f(x) = \frac{3 \ln x - 2}{4}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{3-x}{x+1}$$

$$\delta) f(x) = 1 - \sqrt{3-2x} \quad \epsilon) f(x) = 2 \ln(x+1) - 3$$

$$\sigma\tau) f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 2}$$

4.2 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1 :

$$\alpha) f(x) = \frac{2x+3}{x-1} \quad \beta) f(x) = 2 + \sqrt{3x-4} \quad \gamma) f(x) = 3x^2 - 6x + 1, x \geq 1$$

4.3 Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1 :

$$\alpha) f(x) = \sqrt{3 - \sqrt{2-x}} \quad \beta) f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \gamma) f(x) = 1 - 2x - 3e^x \quad \delta) f(x) = e^{-2x} - x$$

4.4 Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1 :

$$\alpha) f(x) = 2x^5 + 7x^3 + 3x - 5 \quad \beta) f(x) = 3e^x + 2 \ln x - 1 \quad \gamma) f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4x^3 \quad \delta) f(x) = \frac{5}{x} - 3 \ln x$$

$$4.5 \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ -x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της C_f

β) Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1

γ) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της C_f

4.6 Να αποδείξετε ότι δεν είναι 1-1 οι συναρτήσεις :

$$\alpha) f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad \beta) f(x) = (x-3)(x-4) + 2018 \quad \gamma) f(x) = \ln(|x| + 1) \quad \delta) f(x) = |x-3| - 2$$

4.7 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x-2)f(x-3) - (x-3)f(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(2)$

β) Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1

4.8 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τον οποία ισχύει $6f(x^2) - f^2(x) \geq 9$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(1)$

β) Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1

4.9 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) + f(x) + 1 \leq 3f(x^2 - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1-1

4.10 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x) \geq f(1) + f(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1-1

4.11 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1

4.12 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) + f^3(x) = 3x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

4.13 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 4f(x) = 2x + 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

4.14 Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις ώστε να ισχύει $(g \circ f)(x) = x^3 + 3f(x) + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

4.15 Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^5(x) + 3f(x) = \ln(2x + 1)$, $x > 0$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

4.16 Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, όπου η συνάρτηση $g \circ f$ είναι 1-1.
Να δείξετε ότι και η συνάρτηση f είναι 1-1.

4.17 Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις ώστε η $f \circ g$ να είναι 1-1

α) Να δείξετε ότι η g είναι 1-1 β) Αν $\forall x > 0$ ισχύει $g(f(\ln x) + 1) = g(x + 2)$ να βρείτε την f

4.18 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ae^{x-1} + (a-3)\sqrt{x+3}$ της οποίας η C_f διέρχεται από το $K(1, 9)$.
α) Να δείξετε ότι $a = 5$ β) Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1

4.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+a}{x^2+1}$, της οποίας η C_f διέρχεται από το $M(-1, -1)$. Να βρείτε :
α) τον αριθμό a . β) το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$
γ) αν η συνάρτηση f είναι 1-1.

4.20 α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^x - e^{-x}$ είναι 1-1

β) Αν για την $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = x - \frac{1}{x}$, $x > 0$, να βρείτε την f

4.21 α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x + \ln x$ είναι 1-1

β) Αν για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν $x + e^x = f(x) + \ln f(x)$, $f(x) > 0$, να βρείτε την f

4.22 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x-y) = f(x) - f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$

β) Να αποδείξετε ότι $f(-x) = -f(x)$

γ) Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1

4.23 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$
Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

B. Εξισώσεις και συναρτήσεις 1-1

4.24 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $\ln(x-1) = 2-x$ β) $e^x = 1 - x^{2021}$ γ) $3^x = 5 - 2x$

4.25 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3^x + x^3$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 β) Να λύσετε την $3^{x^2-4x} - 3^{-x+4} = -(x^2-4x)^3 + (-x+4)^3$

4.26 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - x$, $0 < \alpha < 1$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 β) Να λύσετε την εξίσωση $\alpha^{k^2-4} - \alpha^{k-2} = (\kappa^2 - 4) - (\kappa - 2)$

4.27 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x-1} + x - 2 > 0$

4.28 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x - 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Να λύσετε την εξίσωση $x^5 + x^3 + x = 3$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{5x} + e^{3x} + e^x < 3$.

4.29 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Να λύσετε την εξίσωση $(e^x + \sqrt{x})^3 + e^x = (\sqrt{x} + 1)^3 + 1$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1+x^2-x^3}{x^3} = (\ln x + 1)^3 + \ln x$

4.30 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x-1}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 β) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + 7} = 6 + x - x^2$

4.31 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{e^x + 1} + \ln x$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Να λύσετε τις εξισώσεις :

β1) $\sqrt{e^{x^2} + 1} + 2\ln x = \sqrt{e + 1}$ β2) $\sqrt{e^{3x} + 1} + \ln 3 + \ln x = 3 + \ln(\ln 8)$ β3) $\sqrt{x+1} + \ln(\ln x) = f\left(\frac{e}{x}\right)$

4.32 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x + x - 1$

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 β) Να λύσετε την $e^{x^2+1} - e^{2x} = \ln 2x - \ln(x^2 + 1) - x^2 + 2x - 1$

4.33 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - x - \ln x$.

α) Να αποδείξετε ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ σε ένα σημείο.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + \ln 2 = 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $(x+1)(x-2) = \ln \frac{x+3}{x^2+1}$

4.34 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x+1)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(e^x + x - 1) = 0$ στο $A = [0, +\infty)$.

4.35 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x + 1$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln x^x + x = 1$, $x > 0$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $\ln \frac{x^2+1}{3x^2+2} = \frac{2x^2+1}{(x^2+1)(3x^2+2)}$

4.36 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{3-x} - x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Να λύσετε τις εξισώσεις :

β1) $x - e^{3-x} = 2$ β2) $e^{3-x^2+1} - x^2 + 1 = -2$ β3) $e^{-x^2+4x+3} - e^{9-x} + 5x = x^2 + 6$

4.37 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + e^x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Να λύσετε τις εξισώσεις :

β1) $f(x) = e$ β2) $f(x^2 - 6x + 8) = 0$

β3) $(x + 3)^3 - (x^2 + 1)^3 = e^{x^2+1} - e^{x+3}$

β4) $\ln^3 x + x = e^{1-x} - (x - 1)^3$

4.38 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Να λύσετε τις εξισώσεις :

β1) $e^{f(x)} + f(x) = 1$ β2) $(x - 1)^2 = e^{2x} - e^{x^2} + 1$

β3) $f(e^{x^2} - 4x) = f(e^{4x} - x^2)$

β4) $e^{x^2+2x+2} + (x + 1)^2 = e$ β5) $e^{x^2-3x} + \frac{x^2-3x}{e^x} = 1$

4.39 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - \ln x$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln a = \frac{1}{e^{a^2}} - \frac{1}{e^a}$

4.40 Να λύσετε την εξίσωση $\ln \frac{e^x + 1}{e^{-x} + 1} = 7(e^{-x} + 1)^3 - 7(e^x + 1)^3$.

4.41 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Να λύσετε τις εξισώσεις :

β1) $x^x = e^{1-x}, x > 0$ β2) $\frac{1}{x^2 + 5} - \frac{1}{2x^2 + 1} = \ln \frac{x^2 + 5}{2x^2 + 1}$ β3) $f(x) + f(x^2) = f(x^3) + f(x^6), x > 0$

4.42 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{2}{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Να βρείτε τον τύπο της $g : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ αν ισχύει $\ln g(x) - \frac{2}{g(x)} = x - \frac{2}{e^x}, x \in \mathbb{R}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2}} = \frac{1}{2x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 2}$

4.43 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) + f^3(x) = 2x + 5$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(2x^3 + x - 2) = f(2 - x)$

4.44 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = f(x) + e^{x-1}, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^3 - 5x) = f(2x - 6)$

4.45 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\ln f(x) + f^3(x) - 2x = \pi^3, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(e^t + 1) - f(2e^{-t}) = 0$

4.46 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $(f \circ g)(x) + e^{g(x)} = 2012x + 2015$.

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1

β) Να λύσετε την εξίσωση $g(x + 1) - g(x^2 + 1) = 0$

4.47 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με $(f \circ f)(x) = (x - 2)f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
 β) Να βρείτε την τιμή $f(3)$
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x + 1 - f(|x| - 1)) - f(x - 2) = 0$.

4.48 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = -x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
 β) Να βρείτε την τιμή $f(2)$
 γ) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα
 δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(4 - f(|x| - 1)) = 2$

4.49 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = 2x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
 β) Να βρείτε την τιμή $f(-1)$
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 + x - 1) + 2(x + 1) = f(f(x))$

4.50 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
 β) Να βρείτε την τιμή $f(0)$
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^3 + e^x) = f(1)$

4.51 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) + f^3(x) = 2x + 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
 β) Να λυθεί η εξίσωση $f(2x^3 + x) - f(4 - x) = 0$
 γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(f(x^2 + x)) - f(f(8 - x)) = 2x^2 + 4x - 16$

4.52 Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, για τις οποίες ισχύει $(g \circ f)(x) = 2x^5 + e^{f(x)} + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι f είναι 1-1
 β) Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) = f(1 - x^3)$.

4.53 Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x + 3e^{x-2}$ καθώς και η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(g \circ f)(x) = 8 - 3e^{x-2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1
 β) Να βρείτε την τιμή $f(2)$
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(f(|x| - 3) + e^x - 1) - f(e^x + 1) = 0$.

4.54 Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις

- α) Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση $f \circ g$ είναι 1-1 τότε και η συνάρτηση g είναι 1-1
 β) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(g(x)) = 2x + e^x$ τότε να λύσετε την $g(e^{x^2} - e^{2x}) = g(4x - 2x^2)$

4.55 Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ καθώς και την συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2\ln x$, $x > 0$

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα
 β) Αν το σημείο $A(1, 2)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f , τότε να λύσετε:
 β1) την εξίσωση $f(x - 1) = 2 + 2\ln(x - 1)$
 β2) την ανίσωση $\ln(\ln x)^2 < f(\ln x) - 2$

4.56 Δίνεται η γνησίως φθίνουσα $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- α) Να δείξετε ότι η $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα.
 β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x^2 - 3x) - f(2x - 6) = x^2 - 5x + 6$.

4.57 Έστω η $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τότε:

- α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1
 β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x^2 + 3) = f(x^2 + 1) + f(x + 1)$

4.58 Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y > 0$

Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τότε :

- α) Να δείξετε ότι $f(1) = 0$ β) Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ γ) Να δείξετε ότι η είναι f 1-1
 δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x^2 + 1) = f(x + 8)$

4.59 Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$, $\forall x, y > 0$

α) Να βρείτε το $f(1)$

β) Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$, $\forall x > 0$

γ) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τότε :

γ1) Να δείξετε ότι η είναι f 1-1 γ2) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) + f(2) = f(12x - 16)$

Γ. Εύρεση Αντίστροφης Συνάρτησης

4.60 Να βρείτε τις αντίστροφες των συναρτήσεων : α) $f(x) = 2x + 5$ β) $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$

4.61 Να βρείτε τις αντίστροφες των συναρτήσεων : α) $f(x) = e^{3x-1} + 2$ β) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

4.62 Να βρείτε τις αντίστροφες των συναρτήσεων α) $f(x) = \frac{x-2}{3x+5}$ β) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

4.63 Ομοίως : α) $f(x) = 1 + \ln(x-3)$ β) $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$

4.64 Ομοίως : α) $f(x) = 2e^{x-3} - 1$ β) $f(x) = 2 + \sqrt{e^x - 1}$

4.65 Ομοίως : α) $f(x) = 1 - e^{x-1}$ β) $f(x) = 2 - \sqrt{3-x}$

4.66 Ομοίως : α) $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \geq 2$ β) $f(x) = x^2 - 8x + 10$, $x \leq 4$

4.67 Ομοίως : α) $f(x) = x^2 + 4x + 1$, $x \geq -2$ β) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x \leq -1$

4.68 Ομοίως : α) $f(x) = x^3 + 1$ β) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 6$

4.69 Ομοίως : α) $f(x) = x^3 + 8$ β) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$

4.70 Ομοίως : α) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ β) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$

4.71 Ομοίως : α) $f(x) = 8x^3 - 3$ β) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x}$

4.72 Ομοίως : α) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ β) $f(x) = \ln \frac{x-1}{x-2}$

Inverse Function
Αντίστροφη
Συνάρτηση

4.73 Ομοίως : α) $f(x) = 3x - 2$ β) $f(x) = x^2 + 1$ γ) $f(x) = (x-1)(x-2) + 1$ (Σχολικό)

4.74 Ομοίως : α) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ β) $f(x) = \ln(1-x)$ γ) $f(x) = e^{-x} + 1$ (Σχολικό)

4.75 Ομοίως: α) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ β) $f(x) = |x - 1|$ (Σχολικό)

4.76 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{1 + x}}$

4.77 Ομοίως: α) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ β) $f(x) = \ln(e - \sqrt{x - e^2})$

4.78 Ομοίως: α) $f(x) = 3 + e^{x-2}$ β) $f(x) = \ln(1 - e^{-x})$

4.79 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2}$

4.80 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 2$, $g(x) = 2f^{-1}(x) + 1$. Να βρείτε την g^{-1} .

4.81 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$

4.82 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \ln x - 2, & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$

4.83 Ομοίως: α) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 1 \\ x^2 + 2, & x > 1 \end{cases}$ β) $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-x}, & x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2, & x > 1 \end{cases}$

4.84 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + 1, & x \geq 1 \\ 3x - 1, & x < 1 \end{cases}$

4.85 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f^3(x) + 4f(x) = x + 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε, αν υπάρχει, την αντίστροφη της f .

4.86 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) - 3f^2(x) + f(x) + x = 2017$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε, αν υπάρχει, την αντίστροφη της f .

4.87 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)} + 2017f^3(x) + 2018 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε, αν υπάρχει, την αντίστροφη της f .

4.88 Έστω η $f: \mathbb{R} \rightarrow (1, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - 2f(x) = e^{2x} - 1$. Να βρείτε:
α) τον τύπο της $f(x)$
β) τον τύπο της $f^{-1}(x)$.

4.89 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν $f(x) = f^{-1}(x) + 4$.

4.90 Αν $f(x) = (2\alpha - 1)x - 3\beta$, να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f = f^{-1}$

4.91 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha + e^{x-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

β) Αν ισχύει $f^{-1}(4) = 1$, τότε:

β₁) Να βρείτε το α

β₂) Να βρείτε την αντίστροφη

4.92 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha - x}{1 + x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $K(-3, -2)$ τότε

- α) Να βρείτε τον αριθμό α
- β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη
- γ) Να δείξετε ότι $f = f^{-1}$

4.93 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x + \alpha}{1 - x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $K(2, -6)$ τότε

- α) Να βρείτε τον αριθμό α
- β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1}
- γ) Να βρείτε συνάρτηση g ώστε να ισχύει $(g \circ f)(x) = f^{-1}(x)$.

4.94 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x + 1$ και $g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη
- β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι περιττή
- γ) Να βρείτε τη συνάρτηση $g \circ f^{-1}$

4.95 Να βρείτε την συνάρτηση $f \circ g^{-1}$ αν :

- α) $f(x) = \sqrt{x-4}$, $g(x) = 1 + \sqrt{x}$
- β) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $g(x) = \ln(1 + e^x)$

4.96 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$ Να ορίσετε την συνάρτηση $f^{-1} \circ g^{-1}$

4.97 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2}{x+1}$ και $g(x) = 2x - 1$

- α) Να ορίσετε την $g \circ f$
- β) Να βρείτε την $(g \circ f)^{-1}$

4.98 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{1-x} + 2$ και $g(x) = 3 - 2\ln x$

- α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την f^{-1}
- β) Να δείξετε ότι η g είναι 1-1 και να βρείτε την g^{-1}
- γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f^{-1} + g^{-1}$
- δ) Να δείξετε ότι η h είναι 1-1 και να υπολογίσετε την τιμή $h^{-1}(2)$

4.99 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = \ln \frac{x}{1-x}$ (ΘΕΜΑ 2017)

4.100 Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = e^{-x} + 2$ (ΘΕΜΑ 2019)

4.101 Αν $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$, $x > 0$ να βρείτε την αντίστροφή της. (ΘΕΜΑ 2020)

4.102 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$ με $x \in \mathbb{R} - \{3\}$

- α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$
- β) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες
- γ) Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$ (ΘΕΜΑ 2020)

Δ. Εξισώσεις-Ανισώσεις και Αντίστροφη

4.103 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x$.

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να βρείτε το $f^{-1}(-3)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(f(x^2 - 5) - 9) = -2$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}((e^x - 6)^3 + 2e^x + 3) < 2$

4.104 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - x - \ln x$.

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $x + \ln x > 1$

4.105 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-1} + x - 3$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\beta 1) f^{-1}(x) = 0$$

$$\beta 2) x + 1 = f^{-1}(0)$$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(\ln x + x - 1) > 1$

4.106 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{1-x} - x$.

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(1 - x) > x$.

4.107 Δίνεται η $f(x) = -2x^3 - 3x + 1$

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(x^2 - 4) - 22) < 2$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2 \cdot (f^{-1}(x))^3 + 3f^{-1}(x) = e^x$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x - 2) - f^{-1}(3 - x) < 1$

4.108 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x + 1$

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2-x} + (x^2 - x)^3 + x^2 - 2x = e^{x+3} + (x + 3)^3 + 3$

4.109 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$.

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x - 1$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x - 1$

4.110 Δίνεται η $f(x) = 2e^{-2x} - 3x - 2e^2$

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(x - 2e^2) - 1) = 3$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(x) - 1 - 2e^2) < 0$.

4.111 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - 1$

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(4 \sin x + 2)) = 4$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(x^2 + 2x + 2) - 5) > 0$

4.112 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{x-1} + 2x - 3$

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(\ln x) < 1$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(1 + f^{-1}(x + 1)) = 0$

4.113 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + 1) - e^{-x} + 2x$, $f(A) = \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(e^x - 2) < 0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x - 1) = x$ στο $(-1, +\infty)$

4.114 Δίνεται η $f(x) = e^x + \ln(x+1) + 2$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να λύσετε τις ανισώσεις :

β1) $f^{-1}(x) > 0$ β2) $f^{-1}(f(x-4) - 5) > f^{-1}(1 - f(x-4))$ β3) $f(x) + f^{-1}(x+3) < 3$

4.115 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα $A(2, 6)$ και $B(4, 3)$.

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(x^2 - 5x) + 2) = 3$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(x^2 - x) - 3) < 4$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) - f(2x) > 3x^2 - 6x$

4.116 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα $A(1, 5)$ και $B(3, 8)$.

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}[3 + f(x^2 - 3x - 3)] = 3$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left[2 + f^{-1}\left(\frac{2x+10}{x-1}\right)\right] \leq 8$.

4.117 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα $A(-1, 5)$ και $B(6, 4)$.

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(-1 + f(x^2 - 2x - 4)) < 6$

4.118 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα $A(1, 5)$ και $B(3, 8)$.

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(x^2) - 3) = 5$

4.119 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα $A(2, 1)$ και $B(3, 8)$.

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(-1 + f^{-1}(x^2 + 2x)) = 1$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(\ln x) + 1) < 8$

4.120 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα $A(3, 2)$ και $B(5, 9)$.

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2 + f^{-1}(x^2 + x)) = 9$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x^2 - 4x) - 6) < 2$

4.121 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα $A(2, 5)$ και $B(3, 2)$.

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να βρείτε τις τιμές $f^{-1}(5)$ και $f^{-1}(2)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(3 + f(x^2 + 2x)) > 2$

4.122 Δίνεται η f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $(f(0))^2 + (f(1))^2 + 13 = 6f(0) + 4f(1)$

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να λυθεί η $f(f^{-1}(x^3 - 3x + 4) - 1) > 3$

4.123 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα $A(1, -1)$ και $B(4, 7)$.

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε τις εξισώσεις: β1) $f(f(x)) = f(7)$ β2) $f^{-1}(x) = 1$ β3) $f(f^{-1}(e^{2x} - 2) + 3) = 7$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(f^{-1}\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) + 3\right) < 7$

4.124 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα $A(1, 4)$ και $B(2, 12)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(1 + f^{-1}(3x - 17)) > 12$

γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = f^{-1}[24 - f(5f^{-1}(12) - 8f^{-1}(4))]$

4.125 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα $A(5, 9)$ και $B(2, 3)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(3 + f^{-1}(x^2 + 2x)) = 9$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(x - \ln \frac{2}{x} + 1\right) = 2$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f^2(x) \leq 12f(x) - 27$

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x + \ln x + 4) > 9$

4.126 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα $A(1, 5)$ και $B(3, -1)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-2 + f^{-1}(x^2 + x + 3)) = 3$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $(f(x))^2 \leq 5 + 4f(x)$

4.127 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = 3x - 5$ με $f(10) = 1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

β) Να βρείτε το $f(2)$

γ) Να υπολογίσετε το $f^{-1}(2)$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(|x| - 2) - 5) = 2$

ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(3x - 5) = 3 \cdot f(2 - x) - 5$

ζ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(|x|^3) = \frac{f(2x^2) + 5}{3}$

4.128 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) + f(x) = 3x - 4$ με $f(3) = 8$

α) Να βρείτε το $f(8)$

β) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1

γ) Να βρείτε το $f^{-1}(3)$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(x^2 - 4x) - 3) = 3$.

4.129 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) = 27x^3 + 8$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln^2 x) = f(2 \ln x + 3)$.

4.130 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται από το $A(2, 5)$ και $(f \circ f)(x) + 2f(x) = x + 1$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να βρείτε το $f(5)$ και το $f^{-1}(2)$

γ) Να λύσετε την $f(10 - f^{-1}(|x| + 1)) - 2 = 0$

4.131 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)} + f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

β) Να βρείτε την $f(1)$

γ) Να λύσετε την $e^{x-4} - e^{2x+1} = x + 5$

4.132 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)} + f(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

- α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) = f\left(\frac{e}{x}\right)$
- γ) Να βρείτε την αντίστροφη της f
- δ) Να λύσετε την ανίσωση $(x^3 - 8)(e^x - 3) < f(-1)$

4.133 Δίνεται γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(e^x + 2) + f(x + 3) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι f η είναι αντιστρέψιμη
- β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(6 - f^{-1}(x^2 - 4)) > 0$.

4.134 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να εξετάσετε αν η C_f τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$
- β) Να αποδείξετε ότι f η είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(\frac{1}{1-e} + 2 - f(\ln x)\right) = -1$.

4.135 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ και $g(x) = 1 - \ln x$

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη
- β) Να βρείτε τη συνάρτηση $(f^{-1} \circ g)(x)$ και να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.
- γ) Αν $1 < \alpha < \beta < e$, να δείξετε $\frac{1 - \ln \alpha}{1 - \ln \beta} > \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$

4.136 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax + 2$, $a \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της $f \circ f$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 14.

- α) Να βρείτε τον αριθμό το a
- β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f , $C_{f^{-1}}$
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x^2 - 4) + x - 1) - f(x + 1) = 0$.
- ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(|x| - 2) - 5) < f^{-1}(14)$.

4.137 Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(1) + f(e) = 2e + 3$, $f(x) - f(y) = \ln \frac{x}{y} + 2(x - y)$

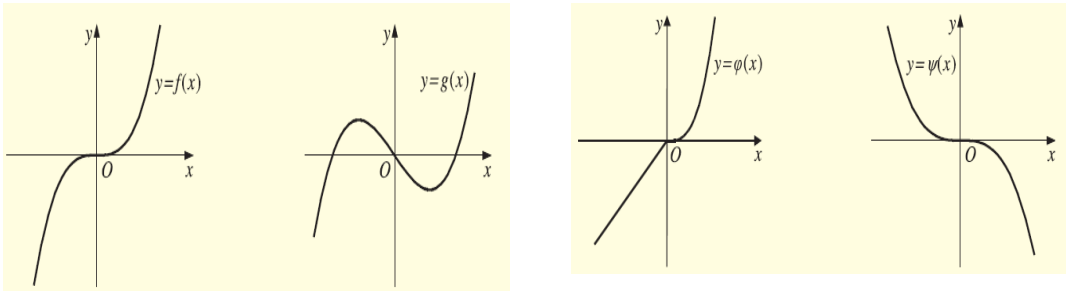
- α) Να βρείτε τα $f(1)$, $f(e)$
- β) Να βρείτε τον τύπο της f
- γ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- δ) Να λύσετε την ανίσωση $4(x^2 - 1) < \ln \frac{x^2 + 10}{3x^2 + 8}$

4.138 Η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2e^x$

- α) Να δείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη
- β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x - 1) + 2 < f(0) + 2e^{x-1}$
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $g\left(\ln \frac{1}{x-1}\right) = g(2e^{x-1} - 2e)$

Ε. Κοινά Σημεία Γραφικών Παραστάσεων f, f^{-1}

4.139 Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, φ, ψ . Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις έχουν αντίστροφη και για καθεμιά από αυτές να χαράξετε την γραφική παράσταση της αντίστροφης. (Σχολικό)



4.140 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x + 2$.

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη. β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$

4.141 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη. β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$

4.142 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} + x - 1$.

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη. β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^5+x^3-2} + x^5 + x^3 = 2f^{-1}(e+2) - 3$

4.143 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 2$

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = f^{-1}(1) + f^{-1}(10)$

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ και της ευθείας $y = x$

4.144 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 4x - 4$.

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x^2 - 13) < 2$.

4.145 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 + x + 3$.

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(x^2 - 3) - 4) > 0$.

4.146 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - \frac{e}{x}$

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$

4.147 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - e^{x-1} + 1, x > 0$

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_{f^{-1}}, y = x$

4.148 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^3 x + 2x - 1$

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$

4.149 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{f^2(x)-3f(x)} \leq 1$

4.150 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$

- α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη .
 β) Να βρείτε το διάστημα που η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = x$

4.151 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3^x + x - 9$.

- α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέφεται
 β) Να βρείτε το $f^{-1}(-5)$
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$
 δ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(\ln x) - 3) > 0$

4.152 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 8$.

- α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη .
 β) Να βρείτε τα $f^{-1}(-6)$ και $f^{-1}(2)$
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$
 δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 - 8) = -6$
 ε) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(\log x^2) \leq 2$

4.153 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + 2x - 2$.

- α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη .
 β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(2x + 1) = x + 1$

4.154 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x+\ln x} + x - e^{2-x}$

- α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη .
 β) Να λύσετε την εξίσωση $x + xe^{-x} - e^{2-2x} = e^{-x}$, $x > 0$
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$

4.155 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{2019} + 4x + 4$.

- α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη .
 β) Να βρείτε τα $f^{-1}(9)$
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x^2 - 3x + 11) = 1$
 δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$

4.156 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-3} + x - e^2$

- α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη .
 β) Να λύσετε τις εξισώσεις :
 β1) $f(x) = f^{-1}(x)$ β2) $f^{-1}(2\ln x + 2) = f^{-1}(\ln^2 x - 1)$

4.157 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - x + 12$

- α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη .
 β) Να βρείτε την τιμή $f^{-1}(14)$
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $27 \cdot 2^{3x} - (4^x + 2)^3 < 4^x - 3 \cdot 2^x + 2$
 δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_{f^{-1}}, y = x$
 ε) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(|x| - 1) + 8) < 1$.

4.158 Δίνεται η $f(x) = 1 - \ln(\sqrt{x-1} + 1)$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
 β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$
 δ) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f και της ευθείας $y = x$

4.159 Δίνεται η $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $x \geq 1$

- α) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}
 β) Να λύσετε την εξίσωση $(x-1)^2 = \sqrt{x-1}$

4.160 Δίνεται η $f(x) = x^3 + 2x - 2$

- α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
- β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(e^{2x} - 2e^x + 1) < 1$
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $f^3(x) + 2f(x) = x + 2$

4.161 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $2f^3(x) + f(x) = x + 16, x \in \mathbb{R}$

- α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
- β) Να βρείτε την αντίστροφη f^{-1}
- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f και της ευθείας $y = x$
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $2f^3(x - 4) + f(6 - x) = x + 12$

4.162 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) = x - 8, x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη
- β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής των $C_f, C_{f^{-1}}$

4.163 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + 3f(x) = x + 3, x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη
- β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$

4.164 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με $f(x) + \ln f(x) = x, x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη
- β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής των $C_f, C_{f^{-1}}$

4.165 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $e^{f(x)} + f(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
- β) Να βρείτε την f^{-1}
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$

Ζ. Συνδυαστικές Ασκήσεις

4.166 Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 3\ln x, x > 0$.

- α) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x$.
- β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$
- β1) Να ορίσετε την συνάρτηση $h = f \circ g$
- β2) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης h

4.167 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln(1 + e^x)$ και $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

- α) Να ορίσετε την αντίστροφη της f
- β) Να αποδείξετε ότι η g είναι περιττή.
- γ) Να βρείτε τον τύπο της $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $h \circ f = g$
- δ) Αν $x > 0$ να αποδείξετε ότι $h(e^x) + h(e^{2x}) < h(e^{3x}) + h(e^{4x})$

4.168 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, της οποίας η C_f διέρχεται από τα $A(3, 2)$ και $B(5, 9)$

α) Να δείξετε ότι η είναι f αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε τις εξισώσεις :

β1) $f(2 + f^{-1}(x^2 + x)) = 9$

β2) $f(e^{3-x} - 1) - f(\ln(x - 2)) = 0$

γ) Να λύσετε τις ανισώσεις :

γ1) $f(f(x^2 - 4x) - 6) < 2$

γ2) $f(2^{2-x}) > f(\ln(x + 2) + 8)$

δ) Η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $(f \circ g)(x - 1) \geq f(x) \geq f(g(x) - 1)$, $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τον τύπο της g .

4.169 Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x + 2x - 1$

α) Να δείξετε ότι η είναι g αντιστρέψιμη

β) Να δείξετε ότι η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο.

γ) Αν $(g \circ f)(x) = x - 1$ τότε :

γ1) να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

γ2) να λυθεί η εξίσωση $g(f^{-1}(|x| - 1) - 1) = e^{g(0)} - 1$

4.170 Έστω $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(e^x - 1) = x - e^{-x} + 1$, $\forall x > -1$ και τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $(g^2(x) - g(x) + 1)\ln g(x) - x = 0$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να λύσετε την ανίσωση $e^{f(x)} - 1 > 0$

γ) Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη

δ) Να λύσετε την εξίσωση $g(f(x)) = 1$.

5. Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

A. Η Έννοια του Ορίου

● Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο έναν πραγματικό αριθμό x_0 , τότε γράφουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

και διαβάζουμε «το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 , είναι ℓ »

► Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f ή να μην ανήκει σε αυτό.

Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης $f(x)$ στο x_0 , πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε κοντά στο x_0 . Δηλαδή η f πρέπει να είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής :

$(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (α, x_0) ή (x_0, β)

► Η τιμή της f στο x_0 , όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριο της στο x_0 ή διαφορετική από αυτό

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για κάθε συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f όταν το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0 (2019)

► Η πρόταση αυτή είναι ψευδής. Πράγματι :

► Η $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$ έχει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$
και $f(1) = 3$, άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$

B. Πλευρικά Όρια

● Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ_1 , καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές ($x < x_0$), γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_1$

και διαβάζουμε: «το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από αριστερά, είναι ℓ_1 »

● Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ_2 , καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές ($x > x_0$), γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_2$

και διαβάζουμε: «το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από δεξιά, είναι ℓ_2 »

► Τους αριθμούς $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_2$ τους λέμε **πλευρικά όρια της f στο x_0** .

Ειδικότερα ο αριθμός ℓ_1 λέγεται **αριστερό πλευρικό όριο στο x_0** ,

ενώ ο αριθμός ℓ_2 λέγεται **δεξιό πλευρικό όριο στο x_0**

● Αποδεικνύεται ότι αν μια συνάρτηση είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$$

Γ. Ιδιότητες Ορίων

► Αν μια συνάρτηση είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) και δεν ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_0) , τότε ορίζουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

► Αν μια συνάρτηση είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_0) και δεν ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) , τότε ορίζουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

► Συνέπειες του ορισμού είναι οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0 \quad \beta) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} (x_0 + h) = \ell$$

► Με τη βοήθεια του ορισμού αποδεικνύονται ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

► Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

► Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

► Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

► Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 τότε :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa \cdot f(x)) = \kappa \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ για κάθε πραγματικό αριθμό } \kappa.$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ εφόσον } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \text{ εφόσον } f(x) \geq 0 \text{ κοντά στο } x_0$$

$$\eta) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^v$$

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν για κάθε x κοντά στο x_0 είναι $f(x) > 0$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$

► Η πρόταση αυτή είναι ψευδής. Πράγματι :

► Πράγματι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = |x|, \quad x \neq 0 \text{ τότε } f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, \text{ αλλά } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Δ. Όριο Πολυωνυμικής Συνάρτησης

Για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ πολυώνυμο, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \\ &= \alpha_n \lim_{x \rightarrow x_0} x^n + \alpha_{n-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \alpha_n x_0^n + \alpha_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + \alpha_0 = P(x_0) \end{aligned}$$

● Αν $P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυώνυμα και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$, τότε ισχύει : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

Ε. Κριτήριο Παρεμβολής

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν ισχύουν:

► $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0

► $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$

τότε ισχύει και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ **(2016 Ε)**

Ζ. Τριγωνομετρικά Όρια

● Αποδεικνύεται ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x = 0$

● Ισχύουν τα εξής : $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$

● Βασικά Τριγωνομετρικά όρια :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

Ασκήσεις

A. Έννοια του ορίου

Το Όριο είναι μια έννοια που συναντάται στο πεδίο του Απειροστικού Λογισμού, με την βοήθεια του οποίου ορίστηκαν έννοιες όπως η παράγωγος και το ολοκλήρωμα.

Ο Γερμανός μαθηματικός **Karl Weierstrass** (1815-1897) εισήγαγε τον συμβολισμό $\lim_{x \rightarrow x_0}$

5.1 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lambda(\lambda - 1)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5\lambda - 9$
 Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

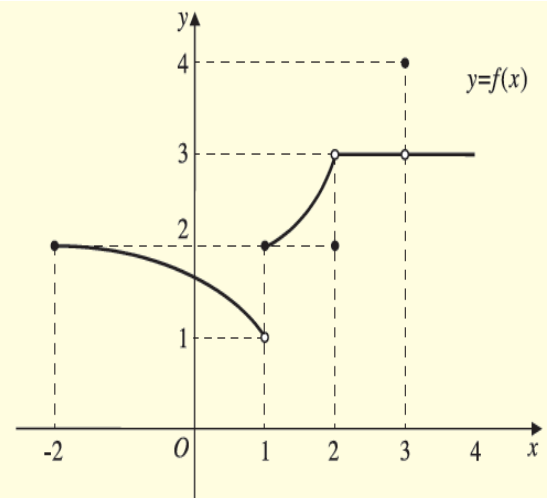
5.2 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:
 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2\lambda - 4$
 Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

5.3 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :
 $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = \kappa^3 + 3$, $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = 2\kappa - 2\kappa^2$
 Να βρεθεί το $\kappa \in \mathbb{R}$ αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$

5.4 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:
 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 2\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 8$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 9\lambda + 4$
 Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

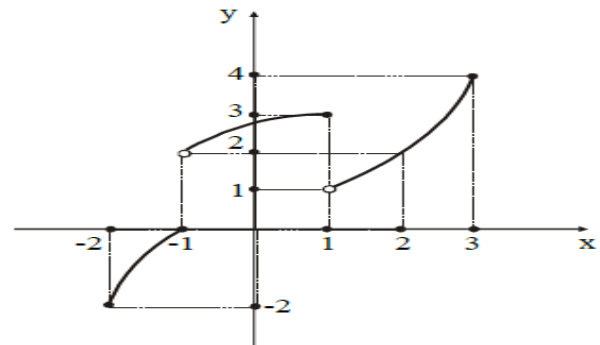
5.5 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι ορισμένη στο $[-2, +\infty)$
 Να εξετάσετε ποιοι από τους διπλανούς ισχυρισμούς είναι αληθείς. (Σχολικό)

- i) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$
- ii) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$
- iii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$
- iv) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$
- v) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$
- vi) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$



5.6 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε :

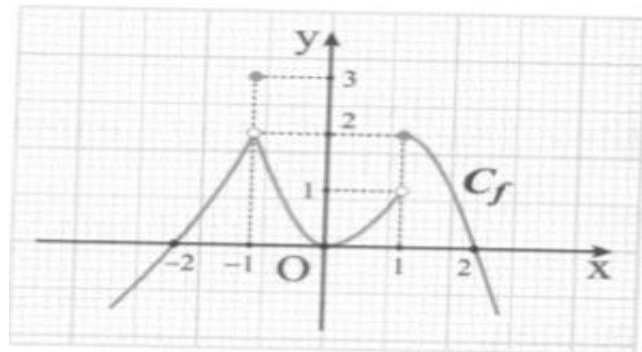
- α) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$
- δ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ε) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- ζ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ η) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ θ) $f(1)$ ι) $f(-1)$



5.7 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Να βρείτε :

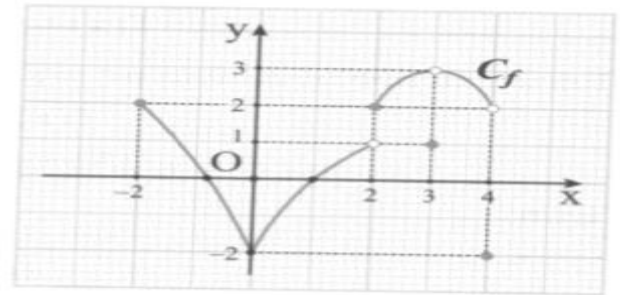
- α) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
 γ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
 ε) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



5.8 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Να βρείτε :

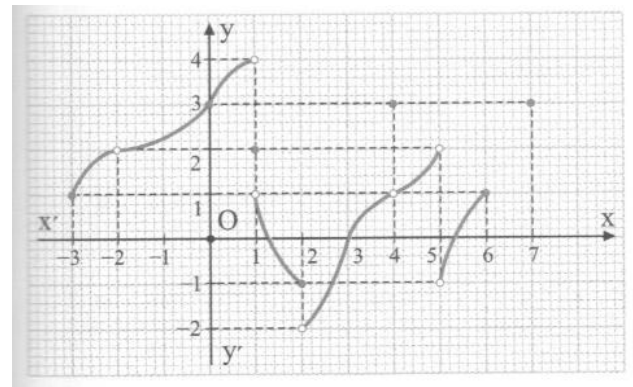
- α) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
 δ) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ε) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$



5.9 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Να βρείτε :

- α) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
 δ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ε) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
 ζ) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ η) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ θ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ ι) $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$



5.10 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 1}{h} = 3$. Να βρείτε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-2h)}{h}$

5.11 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 2}{h} = 5$.

Να βρείτε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1-2h)}{h}$

5.12 Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 3$, να βρείτε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h}$

5.13 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να έχει νόημα η εύρεση του ορίου $\lim_{x \rightarrow \lambda^2 - \lambda - 3} \frac{\sqrt{9 - x^2} + 1}{e^x + 1}$

5.14 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x + \alpha}{x - 2}$ της οποίας η C_f διέρχεται από το $K(-1, 2)$.

- α) Να βρείτε τον αριθμό α και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
 β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f και να σχεδιάσετε τη C_f
 γ) Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

B. Όριο Ρητής Συνάρτησης (0/0)

5.15 Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{2x^2 - 7x + 5} \quad \epsilon) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^4 - 16}$$

The limit of f
as x approaches x_0
Το όριο της f όταν το x
τείνει στο x_0

5.16 Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x^3 + 1} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 7x - 6}{x^2 - 1} \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 2x - 1}{4x^2 + x - 5} \quad \epsilon) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{2x^2 + 7x - 4}$$

5.17 Να υπολογίσετε τα όρια

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^3 - 2x^2} \right) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2 - 1} \right) \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{2}{x^2 - 4x + 3} \right)$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 + x - 2} - \frac{x}{x^3 - 1} \right) \quad \epsilon) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - x}{x - 3 + \frac{2}{x}}$$

5.18 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f^3(x) - 3f^2(x) + 3f(x) = x + 9$. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^{-1}(x)}{x^2 - 5x + 6}$

5.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 1 \\ \frac{x^3 + 3}{4}, & x \geq 1 \end{cases}$

α) Να βρείτε την αντίστροφη της f β) Να βρείτε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x - 1}$

5.20 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x} - 1$ και $g(x) = (x - 2)^2$. Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f \circ g)(x)}{x^2 - 1} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x) - 1}{x}$$

5.21 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f^3(x) + f(x) = 3 - x, x \in \mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(2 + f(e^x + 5)) < 0$

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^{-1}(x) + 15}{x^2 - 4}$

5.22 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{x} = 3, \lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) - 3x) = 5$.

Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{xf(x) + f^2(x) + 5x^2}{x^2f(x) - 3x^3 + x^2}$

Γ. Όριο Άρρητης Συνάρτησης (0/0)

$$5.23 \text{ Να βρείτε τα όρια : } \alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3-x} - 1}{2-x} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x^2 + x} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$$

5.24 Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$ β) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$ (Σχολικό)

5.25 Να υπολογίσετε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3 - x} - 1}{\sqrt{x + 7} - 3}$ β) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{5 - 2x} - 3}{2x + \sqrt{3x^2 + 4}}$

5.26 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x) - 8}{4 - \sqrt{f^2(x) + 12}}$

5.27 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) - 4}{\sqrt{f(x) + 7} - 3}$

5.28 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 1}{\sqrt{f^3(x) + 3} - 2f(x)}$

5.29 Δίνεται η $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) - 3f^2(x) + 3f(x) = x + 2$.

Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(2)}{\sqrt{x + 2} - 2}$

5.30 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x + 1}{x - 2}$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{f^{-1}(x)}{\sqrt{4x + 6} - 2}$

Δ. Όριο Συνάρτησης Πολλαπλού Τύπου

5.31 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1973, & x = 1 \end{cases}$. Να βρεθεί αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

5.32 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}, & x > 1 \\ \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - x}, & 0 < x < 1 \end{cases}$. Να βρεθεί αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

5.33 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1}, & x > 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}, & 0 < x < 1 \end{cases}$. Να βρεθεί αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

5.34 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x + 4} - 2}, & -4 \leq x < 0 \\ \frac{x^3 + 2x^2 - 8x}{2x^2 - 4x}, & 0 < x < 2 \\ \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}, & x > 2 \end{cases}$.

Να βρεθούν, αν υπάρχουν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x) + 1} - 2}{\sqrt{f(x) + 6} - f(x)}$

5.35 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x+1} - 2}, & -1 \leq x < 3 \\ \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - 5x + 6}, & 3 < x < 4 \\ \frac{x^3 - 4x^2 + x - 4}{16 - x^2}, & x > 4 \end{cases}$. Να βρεθούν, αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

5.36 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x^2 - \beta x + 2, & x \leq -1 \\ -3\alpha x + 2\beta + 6, & x > -1 \end{cases}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$

5.37 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x + \beta, & x \leq 3 \\ \alpha x + 3\beta, & x > 3 \end{cases}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10$ (Σχολικό)

5.38 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \alpha x + \beta, & x < 2 \\ 5\alpha x + 2\beta, & x \geq 2 \end{cases}$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και η C_f να διέρχεται από το σημείο $A(1, -1)$.

5.39 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x - \alpha, & x \leq -1 \\ x^2 - \alpha x + \beta, & -1 \leq x < 1 \\ x^3 - \alpha x^2 + \gamma, & x \geq 1 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

5.40 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4\beta x + 1, & x < 0 \\ \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} - \alpha - \frac{1}{2}, & x > 0 \end{cases}$ όπου $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = \beta$.
Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Ε. Όριο Συνάρτησης με Απόλυτες Τιμές

5.41 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-3| - |x-1|}{x^2 - 2x}$ β) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^3 - 3x - 1| + x}{|x^3 + 5x + 4| - 2}$ γ) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x^2 - 4| - |x^2 + 5x + 6|}{|x^2 + 3x| + x}$

5.42 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - x| - 6}{|x - 4| - 1}$ β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 2| - 1}{|x| - 1}$

5.43 Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x)+1| + |f(x)-3x| - 4}{x-1}$ β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x)-3x^2| + |f(x)+1| - 4}{x-1}$

5.44 Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$, να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 0} (|f^2(x) - f(x)| - |f(x)|)$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f^2(x) - f(x)| - 2}{|f(x)| + 1}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \sqrt{f^2(x)}}{x-1}$

5.45 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, +\infty)$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. Να βρείτε το : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f(x) - 2| - |f^2(x) - 5f(x)| + 5}{\sqrt{f(x)} + 1 - 2}$

Ζ. Όριο Συνάρτησης και Διάταξη

5.46 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x f(x) \leq x^3 + 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

5.47 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x f(x) - 2 f(x) \leq x^2 - 5x + 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

5.48 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x f(x) + 3 \leq 2 f(x) + \sqrt{x^2 + 5}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

5.49 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x - 2) f(x) \leq x^2 - 7x + 10$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

5.50 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x - 1) f(x) \leq x^2 + x - 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

5.51 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x^3 - 1) f(x) \leq x^3 - 3x^2 + 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) Αν κοντά στο 1 είναι $f(x) \neq -1$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x)-1| + f^2(x) + 4f(x) + 1}{\sqrt{f(x)+2} - 1}$

Η. Όριο με χρήσης Βοηθητικής Συνάρτησης

5.52 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - 3x^2 + x - 2] = -4$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

5.53 Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ όταν :

α) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + 2x^2 - x + 2] = 5$ β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = 2$ γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3x + 2}{x - 1} = 4$ δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{f(x) + 1} = 2$

5.54 Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ αν ισχύουν : α) $\lim_{x \rightarrow -2} [2 f(x) + 1 - x] = 3$ β) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 1}{x + 2} = 3$

5.55 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2x + 4}{x - 3} = 10$.

Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 3x}$

5.56 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - x + 6}{x + 2}$

Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) + 8}{x^2 + 2x}$

5.57 Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{\eta \mu x} = 3$, να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2x - 2}{x}$

5.58 Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5f(x) - 1}{f(x) + 3} = 8$

5.59 Αν για την συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{\sqrt{f(x)} + 2} = 1$, τότε να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

5.60 Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^3}{x^2 - 1} = 2$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{\sqrt{x} - 1}$

5.61 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} = 4$

Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x - 4}{|x - 3| - 1}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) + 2f(x) - 8}{\sqrt{f^2(x) + 6x} - 2x}$

5.62 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 9} - 5} = 1$

Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - x - 3}{|x - 3| - 1}$

5.63 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 2} [x f(x) + x^2 - 8] = 6$.

Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 5f(x)}{\sqrt{f(x)} - 1 - 2}$

5.64 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x) \cdot g(x)]$, όταν ισχύουν $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x + 1} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow -1} [g(x)(x^2 - x - 2)] = -3$

5.65 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{x - 1} = 3$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f(x) - 12}{x^2 + x - 2}$

5.66 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2 + (x-1)^2}{x - 1} = 100$.

Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) - 3| - 1}{x - 1}$

5.67 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = -5$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 3$.

Να βρείτε τα όρια: α) τα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x) - 2)(f(2x + 1) - 1)}{2x^2}$

Θ. Προσδιορισμός Παραμέτρων

5.68 Δίνεται η $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \alpha x - 2}{x - 1}$. Να βρείτε το α , αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός

5.69 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2\alpha x + \beta + 2}{x^2 - 1}$ Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

5.70 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + \lambda x + \mu}{x^2 + 3x + 2} = 5$.

5.71 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\alpha x^2 + \beta x - 6}{x^2 - 1} = 4$.

5.72 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - \alpha x + 2\beta}{x^2 - 3x + 2} = 7$.

5.73 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - \alpha x}{x - 1} = \beta$

5.74 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + \alpha x + \beta}{x - 1} = \frac{3}{2}$

5.75 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + \alpha x^2 + \beta}{x + 1} = 5$.

5.76 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^3 + \beta x}{x - 1} = 2$.

5.77 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\alpha \cdot |x + 3| + \beta \cdot |x - 5| - 3}{x^2 - 5x + 4} = 7$.

5.78 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha \cdot |x + 2| + \beta \cdot |x - 4| - 2}{x^2 - 5x + 6} = 10$.

5.79 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x + 3} - 2} & , \quad \text{αν } -3 \leq x < 1 \\ \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 - 3x + 2} & , \quad \text{αν } 1 < x < 2 \end{cases}$

Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

I. Κριτήριο Παρεμβολής

Το Κριτήριο Παρεμβολής
είναι γνωστό ως
squeeze theorem ή ως
sandwich rule/theorem
Σε πολλές γλώσσες
αναφέρεται και ως το
θεώρημα των
«Δύο Αστυνομικών και
του ενός μεθυσμένου»

5.80 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε
 $2x^2 - 7x + 5 \leq f(x) \leq x^2 - x - 4, x \in (2, 6)$.

Να βρείτε τα όρια: $\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ $\beta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2}{x - 3}$

5.81 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την
οποία ισχύει $x^2 + x \leq f(x) \leq 12\sqrt{x + 3} - 22$.

Να βρείτε τα όρια: $\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ $\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

5.82 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την
οποία ισχύει $|f(x) - x + 2| \leq x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

5.83 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|xf(x) - 2f(x) - x^2 + 4| \leq x^2 - 4x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

5.84 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f^2(x) - x^2 \leq 2(f(x) - x), \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

5.85 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f^2(x) \pm 4f(x) \leq x^2 - 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

5.86 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) \leq 2x^2 f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

5.87 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) + \sin^2 x \leq 2f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

5.88 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε ισχύει $\frac{f^2(x) - 6f(x)}{x+3} \leq x-3$ για $x > -3$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

5.89 Αν ισχύει $2\sqrt{x+2} \leq f(x) \leq x+3$, $x \geq -2$, να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-2}{x+1}$ γ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2f^2(x)-8}{x^2+3x+2}$

5.90 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2x-1 \leq f(x) \leq x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) $\lim_{h \rightarrow 0} f(1+h)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f^2(x)-3|+f(x)-3}{f(x)-1}$

5.91 Δίνονται οι $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$ και $|g(x)-1| \leq |f(x)|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(g(x))}{\sqrt{g(x)}-1}$

Κ. Τριγωνομετρικά Όρια

Ο όρος **Τριγωνομετρία** καθιερώθηκε το 1595 από τον Γερμανό Μαθηματικό **Bartholomaeus Pitiscus**. Εντούτοις η Τριγωνομετρία αναπτύχθηκε και ήταν μέρος των Μαθηματικών από την Αρχαιότητα.

5.92 Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^2+x}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x+4}-2}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x}$

5.93 Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+\eta\mu x}{2x+3\eta\mu x}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+\eta\mu x}{2x+\eta\mu 5x}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{7x+9}-3}$

5.94 Να υπολογίσετε τα όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}\right)$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta\mu x \cdot \sin \frac{1}{x}\right)$
 γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}\right)$

5.95 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\eta\mu^2 x \leq f(x) + 2x \sin x \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+2x}{x^2}$

5.96 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f^2(x) - 2xf(x) \leq \eta\mu^2 x - 2x \eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

5.97 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|x^2 f(x) - \eta\mu^2 x| \leq x^4$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

5.98 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f^2(x) - 2x \cdot \eta\mu x \leq 2x \cdot f(x) + \eta\mu^2 x$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

5.99 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ και $f^3(x) + f(x)\eta\mu^2 x = 2x^2 \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε το λ .

5.100 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ και $f^3(x) + f^2(x)\eta\mu x + x^2 f(x) = 3x^2 \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + xf(x) + x \eta \mu x}{f^2(x) + x^2 + \eta \mu^2 x}$.

5.101 Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{x} = 4$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - 5f(x) + 6}{2x + \pi x}$

5.102 Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(2x)}{x} \qquad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) + x f^2(x)}{f^3(x) + x^3} \qquad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sin x - 1}{f(x) + \ln x}$$

5.103 Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) + f(3x)}{x} \qquad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + x^2}{f^2(x) + \eta x^2} \qquad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sqrt{x+1} - 1}{f(x) + \varepsilon \varphi x}$$

5.104 Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, να βρείτε τον $\alpha \neq 0$, αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(2x) + f(x) \cdot \eta\mu\alpha x}{2x^2 - \eta\mu^2 x} = 8$

5.105 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^4(x) + 2006f(x) = 2x + 6, x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f^{-1}(x) + \eta\mu x + 6}{x}$

5.106 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$.

Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \qquad \beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f^2(x) - 1| + f(x) - 1}{f(x)} \qquad \gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta \mu f(x) - \varepsilon \varphi f(x)}{\eta \mu f(x) + \varepsilon \varphi f(x)}$$

5.107 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 3f(x) = x + 4, x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x)}{\eta(x-1)}$

5.108 Θεωρούμε τις $f(x) = e^{3x+2}$ και $g(x) = \ln x^2$. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x) - \eta \mu^2 x - 4}{x}$

5.109 Δίνεται η $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right)$ (ΘΕΜΑ 2020)

6. Μη Πεπερασμένο Όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Α. Μη Πεπερασμένο Όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

● Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και στα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

● Με τη βοήθεια του ορισμού αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

$$\alpha) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ τότε } f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0$$

$$\blacktriangleright \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \text{ τότε } f(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0$$

$$\beta) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$$

$$\blacktriangleright \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$$

$$\gamma) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\delta) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$$

$$\epsilon) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty, \kappa \in \mathbb{N} \text{ με } \kappa \geq 2$$

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ τότε
ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = 0$ (2018Ε)

► Η πρόταση αυτή είναι ψευδής. Πράγματι :

$$\blacktriangleright \text{ Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις } f(x) = -\frac{1}{x^2} + 1 \text{ και } g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{τότε } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} + 1 \right) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ αλλά όμως γίνεται :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1$$

Β. Όρια της Μορφής $\frac{1}{0}$

● Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

● Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

● Από τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτουν τα εξής :

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v}} = +\infty$ για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$

β) Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty$ για κάθε $v \in \mathbb{N}$, τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v+1}}$

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ τότε θα είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

ή $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ (2020)

► Η πρόταση αυτή είναι ψευδής. Πράγματι :

► Η συνάρτηση $f(x) = x$ έχει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ αλλά το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει γιατί :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

Γ. Ιδιότητες για το όριο Αθροίσματος και το όριο Γινομένου δύο συναρτήσεων

● Για το όριο στο x_0 του αθροίσματος δύο συναρτήσεων $f + g$ ισχύει ότι :

$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Και αν $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) =$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) =$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$;$	$-\infty$	$;$

● Για το όριο στο x_0 του γινομένου δύο συναρτήσεων $f \cdot g$ ισχύει ότι :

$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Και αν $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) =$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$;$	$;$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

● Στους παραπάνω πίνακες, όπου υπάρχουν ερωτηματικά τα αντίστοιχα όρια έχουν απροσδιόριστη μορφή. Συνοπτικά οι απροσδιόριστες μορφές είναι:

α) Για το όριο αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι :

$$(+\infty) + (-\infty), 0 \cdot (+\infty), 0 \cdot (-\infty)$$

β) Για το όριο διαφοράς $f - g$ και το όριο πηλίκου $\frac{f}{g}$ είναι :

$$(+\infty) - (+\infty), (-\infty) - (-\infty), \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Ασκήσεις

A. Εύρεση Ορίου α/0

- 6.1 Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2}$ β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-7}{|x-2|}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{x^2-6x+9}$
- 6.2 Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-5x-1}{4-4x+x^2}$ β) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-2x-5}{|x+1|}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-3}{x^3-2x^2}$
- 6.3 Ομοίως: α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4+x^3-2x^2}$ β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+9}}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^4+x^2}$ δ) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+1}{x^2+4x+4}$
- 6.4 Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1}{x^3-10x^2+25x}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^3}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x^6+x^2}$
- 6.5 Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+5}{x-4}$ β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x-7}{x^2-9}$ γ) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+5}{x^2-2x-8}$
- 6.6 Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x+5}{x^2-4}$ β) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x+1}{x^2-25}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x}{x-2}$
- 6.7 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+2}$
 α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f β) Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
- 6.8 Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο στο $x_0 = 2$ της $h: A - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $h(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$
 όπου $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ (ΘΕΜΑ 2019 Ε)

B. Εύρεση Παραμέτρων στην μορφή α/0

- 6.9 Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2+\lambda x+\lambda+8} = -\infty$
- 6.10 Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x}{x^2+\kappa x+4} = -\infty$
- 6.11 Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2+1}{x^2+\kappa x+3} = +\infty$
- 6.12 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+5}{\alpha x^2+\beta x-3}$ για την οποία ισχύουν $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$
 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Γ. Χρήση Βοηθητικής Συνάρτησης στο α/0

6.13 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{f(x)} = +\infty$

6.14 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x+4} = +\infty$

6.15 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 f(x)] = 3$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \eta \mu x \eta \mu 3x]$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2020 \cdot f(x)}{f^2(x) - 3f(x) + 1}$

6.16 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot f(x)}{\eta \mu x + x} = +\infty$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot \eta \mu \frac{1}{f(x)}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sigma \nu \frac{1}{f(x)} - 1)f(x)$ δ) $\lim_{x \rightarrow 0} f^2(x) \cdot \eta \mu \frac{1}{f(x)} \cdot (\sigma \nu \frac{1}{f(x)} - 1)$

6.17 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ώστε να ισχύει :

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{f(x)} = +\infty$ β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x+1} = -\infty$ γ) $\lim_{x \rightarrow 2} [(3x+1) \cdot f(x)] = +\infty$

6.18 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ώστε να ισχύει :

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-4}{f(x)} = +\infty$ β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x+2} = -\infty$ γ) $\lim_{x \rightarrow 1} [(3x^2-2) \cdot f(x)] = +\infty$ **(Σχολικό)**

Δ. Το Τέχνασμα του Κοινού Παράγοντα

6.19 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{f(x)+1}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} (f^2(x) - f(x) + 1)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f^2(x)+1}}{f(x)}$

6.20 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 3f(x)}{f(x) + 2}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4f^3(x) - 3f(x) + 1}{2f^3(x) + 5f^2(x) - 6}$ δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 4f(x) + 3}{f^3(x) - 2f^2(x) + f(x) - 3}$
 ε) $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{4f^2(x) - 9f(x) + 3} - 3f(x))$ ζ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f^2(x) + 5f(x) + 2}}{f(x) - 3}$

6.21 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} [|x-1|f(x)] = 1$.

Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1}{f^2(x) + f(x) + 1}$

6.22 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 - 4x + 4)f(x)] = -8$.

Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f^2(x) + f(x) + 4}{5f^3(x) + 1}$

6.23 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$. Να βρείτε τα όρια :

$$\begin{aligned} \alpha) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)} & \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) - 2f(x)}{f(x) + 1} & \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f^4(x) - 2f^2(x) + 3}{5f^4(x) - 3f(x) + 1} \\ \delta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) - 2f(x) + 8}{f^3(x) + 2f^2(x) - 4f(x) + 1} & \quad \varepsilon) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3f^2(x) - 5f(x) + 1}}{f(x) + 6} \end{aligned}$$

6.24 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$. Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 1}{f(x) - 1} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f(x) + 1}{f^2(x) + f(x) + 1} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 1} (f^2(x) - f(x) + 2) \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f^2(x) + f(x) + 1}}{f(x)}$$

Ε. Όριο με Απόλυτες Τιμές στο $\alpha/0$

6.25 Δίνεται η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{|3 - x f(x)| - |2 f(x) - 3|}$

6.26 Δίνεται η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f(x) + x| - |x - 4|}{f^2(x) + 3f(x) - 5}$

Ζ. Όριο $\alpha/0$ και Διάταξη

6.27 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^2 f(x) \geq x + 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τα όρια : $\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ $\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{f(x)}$ $\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - 2010) \eta\mu \frac{1}{f(x)}]$

6.28 Δίνεται η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $(x^2 - 4x + 4) f(x) \geq x - 3$, $\forall x \neq 2$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

6.29 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $x^3 f(x) \geq x + \eta\mu x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

7. Όριο Συνάρτησης στο Άπειρο

A. Γενικά για το όριο στο Άπειρο

● Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$.

Αντίστοιχα, για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $-\infty$, η f πρέπει να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$

● Για τον υπολογισμό ορίων στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ χρήσιμα είναι τα παρακάτω βασικά όρια :

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v} = 0 \quad \text{με } v \in \mathbb{N}^*$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } v \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } v \text{ περιττός} \end{cases} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} = 0 \quad \text{με } v \in \mathbb{N}^*$$

B. Όριο Πολυωνυμικής Συνάρτησης στο Άπειρο

● Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_v \neq 0$ ισχύει ότι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_v x^v) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_v x^v)$$

Γ. Όριο Ρητής Συνάρτησης στο Άπειρο

● Για την ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_v \neq 0, \beta_k \neq 0$ ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v}{\beta_k x^k} \right) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v}{\beta_k x^k} \right)$$

Δ. Όριο Εκθετικής-Λογαριθμικής Συνάρτησης στο Άπειρο

$$\textcircled{1} \underline{\text{Αν } \alpha > 1}: \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_\alpha x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_\alpha x = -\infty$$

$$\textcircled{2} \underline{\text{Αν } 0 < \alpha < 1}: \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_\alpha x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_\alpha x = +\infty$$

Ασκήσεις

A. Όριο Πολυωνυμικής Συνάρτησης

7.1 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3 - 2x^2 + 5x - 3)$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + 5x - 1)$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 + 3x^2 - 1)$ δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - 5x + 7)$

7.2 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - x + 2)$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 4x^2 - 2017)$ γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^3 + 2x^2 + x - 4)$

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + x + 3)$

7.3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^7 + 2x - 3$

Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(100) - f(200)) \cdot f(x)$

The limit of f
as x approaches plus infinity
το όριο της f
όταν το x τείνει στο $+\infty$

The limit of f
as x approaches minus
infinity το όριο της f
όταν το x τείνει στο $-\infty$

B. Όριο Ρητής Συνάρτησης

7.4 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 - 5x^2 + 7x - 4}{2x^2 - 3x + 5}$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 - 5x^2 + 2x - 6}{2x^3 + 5x^2 - x - 6}$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^6 + 4x^2 - 5x - 3}{-6x^3 + 2x^2 + 7x + 4}$

7.5 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 5}{2x^3 + x + 2018}$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 - x^2 + 3x - 1}{2x^8 + 5x^2 - 2x + 6}$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 5x - 3}{x^5 + 2x^2 + 3x + 1}$

7.6 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x-1} + \frac{3x}{x+1} \right)$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x-2} + \frac{x^2}{x+3} \right)$

Γ. Όριο με Απόλυτες Τιμές

7.7 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} |3x^2 - 5x + 6|$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} |2x^3 - 3x^2 + 6x - 1|$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} |-5x^2 + 6x - 1|$

7.8 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 5x + 4| - 6x^2}{|x^3 - 3x^2 + 5| - x^3}$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^3 + 4x^2 - 3x + 5| + x^3}{|x^2 - 2x - 3| - x^2}$

7.9 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (|x^3 - x^2 + 2| - |x^3 + x^2 + 4|)$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^5 - x^2 + 1| - |x^5 - x|}{x^2 + x + 1}$

7.10 Ομοίως :

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x^{2017} - x^2 + 3x - 4|)$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^{2017} - x^3| - x \cdot |x^{2016} - x^2 - 1| + 1}{x - 1}$

Δ. Όριο Άρρητης Συνάρτησης

7.11 Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 5x + 2}$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2}{\sqrt{4x^2 + 7}}$

7.12 Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2 + 5}}$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{16x^2 + 3}{9x^2 - 2x + 1}}$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{4x^2 - x - 5}$

7.13 Ομοίως : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 2} + x)$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - 2x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 - 4x + 5} - 3x)$

7.14 Ομοίως : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 3} + x}$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{4x^2 - 2})$ γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 5}{\sqrt{x^2 + 3} - 2x}$

7.15 Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{9x^2 + 1})$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x + 1)$

7.16 Ομοίως : α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + 3x - 1})$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 3} - \sqrt{4x^2 + x + 2})$

7.17 Δίνεται η $f(x) = \sqrt{9x^2 + 1} - 3x$. Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 6x)$

Ε. Όριο Εκθετικής Συνάρτησης

7.18 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 3 \cdot 2^x}{3^x - 2^x}$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{x+1} + 5 \cdot e^x}{2 \cdot 3^x - e^x}$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \cdot 5^{x+2} + 5 \cdot 3^{x+1}}{2 \cdot 5^{x+1} - 3^{x+2}}$ δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot e^x + 3 \cdot 2^{2x}}{2 \cdot e^{x+1} - 2^{2x+2}}$

7.19 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 3^{x+1}}{3^x + 2^x}$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^{x+1} - 3^{x+2}}{2^{2x} + 3^x}$ γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 3^{x+1}}{e^{x+2} + 3^{x+3}}$ δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} + 3^{x+2} - 2^x}{e^x + 2 \cdot 3^{x+1}}$

7.20 Ομοίως : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2}$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^3 - x}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}}$ δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{3x} - 4e^{2x} + 5e^x - 3)$

7.21 Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{\frac{x^3 - 5x + 3}{x - 4}}$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x^2 + 5x}{x + 2}}$ γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\sqrt{x^2 + 3} + x}$

7.22 Ομοίως : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4^{\frac{3x^4 - x + 1}{x + 1} - x^2}$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x^2 + x}{x - 1} - \frac{4x}{x + 1}}$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{9x^2 + 2}}$

7.23 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $e^{f(x)} + f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x}$

Ζ. Όριο Λογαριθμικής Συνάρτησης

7.24 Να βρείτε : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x + 3)$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 3)$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 2)$ δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$

7.25 Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 0} (2\ln^2 x - 3\ln x + 5)$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^2}$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x - \ln x + 5}{2\ln^2 x + 3\ln x + 5}$

7.26 Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\eta \mu x}$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x}$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{x}$

7.27 Ομοίως : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8\ln^2 x - 4\ln x + 5}{2\ln^2 x + 5\ln x - 2}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9\ln^3 x - 4\ln^2 x + 8}{3\ln^2 x + 5\ln x + 7}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\ln x + 2}{4\ln^3 x + \ln^2 x + 1}$

7.28 Ομοίως : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^3 + 2x) - \ln(x^2 - 1)]$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x + 2) - \ln(x^2 + 3x)]$

7.29 Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [2\ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 - 3x)]$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(3^x + 5^x) - x]$

7.30 Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^4 + 5) - \ln(x^2 + 3)]$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + 2) - 3x]$

7.31 Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [3\ln x - \ln(2x^2 - x + 1)]$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + 2) - \ln(2e^x + 1)]$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [2x - \ln(e^{2x} + e^x + 1)]$

7.32 Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x - \sqrt{x^2 + 2x + 3}]$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^{x+2} + 3) - x - 2]$

7.33 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(2^x - 4^x) - e^{\frac{2-x^3}{x^2+x}}$. Να βρείτε :

α) το πεδίο ορισμού της f

β) το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

7.34 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{x^2-1}{x^2}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να δείξετε ότι $f(x) < \log(2x - 2)$, $x > 1$

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \log(2x - 2)]$

7.35 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x - 2)$ και $g(x) = e^x - 1$

α) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} και τη συνάρτηση g^{-1}

γ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f^{-1}(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g^{-1}(x))$

δ) Να ορίσετε τις συναρτήσεις fog και gof

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((fog)(x) - (gof)(x))$

7.36 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (ΘΕΜΑ 2020)

Η. Τριγωνομετρικά Όρια στο Άπειρο

7.37 Να βρεθούν τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2\eta\mu x)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta\mu x}{x^2 + 3}$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2\eta\mu x}{x + \eta\mu x}$

7.38 Ομοίως : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta\mu x}{x}$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 3 \eta\mu x}{5x + 3}$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3 \eta\mu x}{5x - 3 \sigma\upsilon\nu x}$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta\mu x}{x^2 - 5x + 3}$ ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\sqrt{x^2 + 2} - x)\eta\mu 4x]$

7.39 Ομοίως : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{2x + 3}$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 4x - 3}{x + 2} \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x})\eta\mu \frac{1}{x}]$

7.40 Να βρεθούν τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{\frac{2x - 3 \eta\mu x}{2x + \sigma\upsilon\nu x}}$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^2 + \sigma\upsilon\nu x) - \ln x]$

7.41 Να βρεθούν τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x + \eta\mu x}{x - \sigma\upsilon\nu x}}$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x + \eta\mu x) - 2\ln x]$

7.42 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$. Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\eta\mu \frac{1}{f(x)}$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - f(x)\sigma\upsilon\nu \frac{1}{f(x)} \right)$ δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x) \cdot \left(1 - \sigma\upsilon\nu \frac{1}{f(x)} \right) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)}$

7.43 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$. Να βρεθούν τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)}$ γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\eta\mu f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right)$

7.44 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + 3f(x) = x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία β) Να λύσετε την ανίσωση $f(2^{x^2+4x}) < 3$

γ) Να ορίσετε την αντίστροφη f^{-1} δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x) \cdot \eta\mu x}{x^4}$

Θ. Κριτήριο Παρεμβολής στο Άπειρο

7.45 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με : $6x^3 - 5x^2 + 2 \leq f(x) \leq 6x^3 + 2x^2 + 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 3x - 5}$ γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{2x^3 - x + 25}$ δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^4 - 2x^3 + x}$

7.46 Δίνεται η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε : $|(x^2 + 1)f(x) - x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

7.47 Δίνεται η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε : $|f(x) + x| \leq e^{-\frac{1}{x^2}}, \forall x \neq 0$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

7.48 Δίνεται η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε : $|(x^3 + 1)f(x) - 2x^3| \leq x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \cdot \eta\mu x \right)$

7.49 Δίνεται η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε : $xf(x) \geq x^3 + x + 1, x > 0$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

7.50 Δίνεται η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x) \geq x^4 - x + 2018, x < 0$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

I. Με Χρήση Βοηθητικής Συνάρτησης

7.51 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f(x) - \sqrt{x^2 + x + 2}}{2x + 1} = 3$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

7.52 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f(x) - \eta \mu x}{x + 1} = 3$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

7.53 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = -2$. Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f(x) + x^2 + 1}{x f(x) - 3x^2 + 2}$$

7.54 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 4x] = 3$. Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 f(x) + 7x}{x f(x) - 4x^2 + 2x + 1}$$

K. Προσδιορισμός Παραμέτρων

7.55 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 + 1}{x^2 + 2} - \alpha x - \beta \right) = 0$

7.56 Δίνεται η $f(x) = \frac{\alpha x^2 + 5\beta x + 4}{x + 1}$ Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$

7.57 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 2} + \alpha x + \beta$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$.

- α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β
 β) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να ορίσετε την f^{-1}

7.58 Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 10} - \lambda x)$ να υπάρχει στο $\mathbb{R}$ (Σχολικό)

7.59 Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} - \alpha x)$ να υπάρχει στο $\mathbb{R}$

7.60 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + \alpha x + 10} + \beta x) = 3$

7.61 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 8x - 5} + \alpha x + \beta) = -5$

7.62 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 6x} + \alpha x + \beta) = 2$

7.63 Δίνεται γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x f(1) + f(2)) = 7$
 Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f

7.64 Έστω η συνάρτηση $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = 3$.

Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 f(x) + \lambda x - 1}{x f(x) - 2x^2 + 1} = 1$

7.65 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln[(\alpha - 1)x^2 + x + 2] - \ln(x + 1)$ με $\alpha \geq 1$ και $x > -1$.
 Να βρείτε την τιμή του α ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

7.66 Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\alpha - 2)x^3 + (1 - \alpha)x^2 - 2x + 3] \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\alpha - 1)x^3 - 2\alpha x^2 + 3x - 1]$$

7.67 Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\alpha - 2)x^2 + 2x + 3}{\alpha x + 1} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha - 1)x^2 - 2x + 1}{2\alpha x + 1}$$

7.68 Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2\alpha + 3)x^3 - 3x + 1}{(\alpha - 2)x^2 + 2} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 - \alpha)x^3 + x^2 + 3}{\alpha x^2 - 3x + 5}$$

7.69 Δίνεται η $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \alpha \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$

7.70 Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\mu \in \mathbb{R}$ να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \mu x) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu - 1)x^3 + 2x^2 + 3}{\mu x^2 - 5x + 6} \quad (\text{Σχολικό})$$

7.71 Δίνεται η $f(x) = \frac{\alpha^{x+3} - 3^x + 5}{\alpha^x + 3^x - 8}$, $\alpha > 0$. Να βρείτε τις τιμές του α αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 64$

7.72 Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^{\frac{2x^5 + 1}{x^3 - 2x + 5}}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha > 0, \alpha \neq 1$

7.73 Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha > 0, \alpha \neq 1$, να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x + 5^x}{2\alpha^x - 5^x}$

7.74 Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha > 0, \alpha \neq 1$, να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{x+2} + 4^x}{\alpha^x + 4^{x+1}}$

8. Κανόνας του De L' Hospital

A. Όρια της Μορφής $\frac{0}{0}$

● Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ πεπερασμένο ή

άπειρο τότε : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

B. Όρια της Μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$

● Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ πεπερασμένο ή

άπειρο τότε : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

► Το δεύτερο θεώρημα ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$

► Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

Ασκήσεις

A. Απροσδιόριστη Μορφή 0/0, ∞/∞

- 8.1 Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 5 \eta \mu x}{2x - \eta \mu x}$ δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - e^{x-1}}{x - \ln x - 1}$
- 8.2 Ομοίως: α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$ δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x - x}{x^2}$
- 8.3 Ομοίως: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x}$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + \ln x}{x^2 + 2 \ln x}$
- 8.4 Ομοίως: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{e^x}$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{2x}$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 + x + 1}$ δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}$
- 8.5 Ομοίως: α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{\ln(x+1)}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma \upsilon \nu x^2}{x^4}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta \mu x}{1 - \sigma \upsilon \nu x}$ (Σχολικό)

B. Απροσδιόριστη Μορφή 0 · (+∞)

- 8.6 Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}}\right)$
- 8.7 Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} \cdot \ln x)$
- 8.8 Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot e^{-x})$ β) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x-1) \cdot \ln \frac{1}{x-1}\right]$
- 8.9 Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{1-2x}(x^2 - 5x + 2)]$
- 8.10 Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x \cdot (2 - x^2)]$ β) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x^2)$
- 8.11 Δίνεται η $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2\eta \mu x - x$
 α) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - f(2x)) \cdot \ln x]$ (ΘΕΜΑ 2018Ε)

Γ. Απροσδιόριστη Μορφή (∞ - ∞)

- 8.12 Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$
- 8.13 Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 5 \ln x)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2e^x)$
- 8.14 Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln x)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x - e^x)$

8.15 Να βρεθούν τα όρια : $\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1+x) - x)$ $\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^{-x})$

8.16 Να βρεθούν τα όρια : $\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \ln(1+x))$ $\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - e^{x+1})$

8.17 Να βρεθούν τα όρια : $\alpha) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ $\beta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\eta \mu x} \right)$

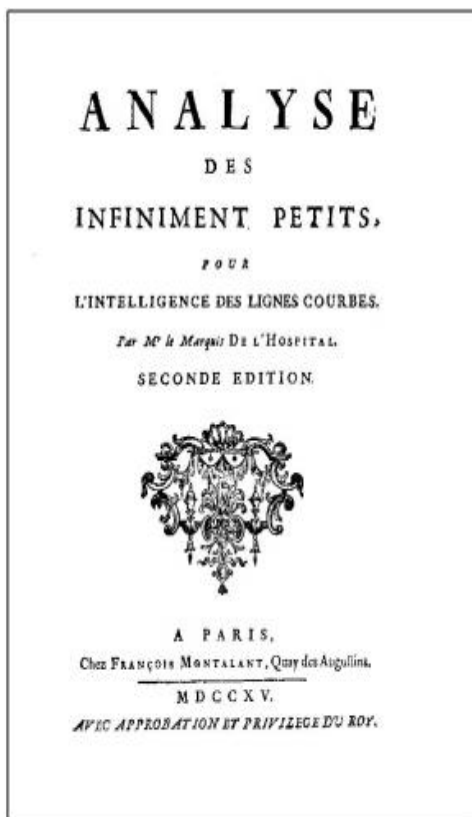
8.18 Να βρεθούν τα όρια : $\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ $\beta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right)$

Δ. Απροσδιόριστη Μορφή 0^0 , $1^{\pm\infty}$, $+\infty^0$

8.19 Να βρεθούν τα όρια : $\alpha) \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{\ln x}$ $\beta) \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^x$ $\gamma) \lim_{x \rightarrow 1^-} x^{\frac{1}{1-x}}$

8.20 Να βρεθούν τα όρια : $\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} x^{2x}$ $\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}}$

8.21 Να βρεθούν τα όρια : $\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 5)^{\frac{1}{x}}$ $\beta) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{3x}}$



O Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital (1661-1704) ήταν Γάλλος μαθηματικός. Επειδή γεννήθηκε μέσα σε στρατιωτική οικογένεια, αρχικά ακολούθησε στρατιωτική καριέρα την οποία όμως εγκατέλειψε λόγω φτωχής όρασης και έτσι ασχολήθηκε με τα Μαθηματικά, στα οποία είχε έφεση από παιδί. Ο κανόνας DLH εμφανίστηκε για πρώτη φορά το 1696 στο βιβλίο του «Ανάλυση των Απείρων Μικρών για την Κατανόηση των Καμπύλων Γραμμών»

9. Συνέχεια Συνάρτησης

A. Ορισμός Συνέχειας σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της

Μία συνάρτηση f λέγεται **συνεχής** σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

B. Ορισμός Συνέχειας Συνάρτησης στο (α, β)

Μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β)

Γ. Ορισμός Συνέχειας Συνάρτησης στο $[\alpha, \beta]$

Μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής** σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$

ΠΡΟΣΟΧΗ

- ▶ Δεν έχει νόημα να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής ή όχι σε ένα σημείο x_0 που δεν ανήκει στο π.ο. της
- ▶ Μια συνάρτηση f **δεν είναι συνεχής** σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν ισχύει ένα από τα παρακάτω:
 - ① δεν υπάρχει το όριο της f στο x_0
 - ② υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ αλλά είναι διαφορετικό από το $f(x_0)$
- ▶ Μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, ονομάζεται **συνεχής συνάρτηση**.
- ▶ Οι πολυωνυμικές, οι ρητές, οι εκθετικές, οι λογαριθμικές συναρτήσεις, καθώς και οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$, $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.
- ▶ Αν f, g συνεχείς στο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$$f + g, c \cdot f, f \cdot g, \frac{f}{g}, |f|, \sqrt[n]{f}$$
 με την προϋπόθεση ότι αυτές ορίζονται σε διάστημα που περιέχει το x_0
- ▶ Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0

Ασκήσεις

Α. Εξέταση Συνέχειας Συνάρτησης

9.1 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ -3, & x = 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 1

9.2 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 1

9.3 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 1.

9.4 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 0.

9.5 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & x < 1 \\ 3x + \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ είναι συνεχής.

9.6 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \leq 0 \\ \frac{\eta \mu^2 x}{x}, & x > 0 \end{cases}$ είναι συνεχής.

9.7 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3e^{x^2 - 4} + 5, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{\ln(x - 2)} + 4x, & x > 2 \end{cases}$ είναι συνεχής.

9.8 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta \mu x}{2x}, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 0

9.9 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x - 1}, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \frac{2\sqrt{x^2 + 3} - 4}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$ είναι συνεχής.

9.10 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}, & x > 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}, & x < 1 \end{cases}$ είναι συνεχής.

9.11 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 0. (ΘΕΜΑ 2008)

9.12 Να εξετάσετε αν η $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 0. (ΘΕΜΑ 2014)

9.13 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 0. (ΘΕΜΑ 2014 Ε)

9.14 Να εξετάσετε αν η $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ (ΘΕΜΑ 2016 Ε)

9.15 Να δείξετε ότι η $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \cdot \eta \mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$ είναι συνεχής στο $[-1, \pi]$ (ΘΕΜΑ 2017)

Β. Εύρεση Παραμέτρων

9.16 Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ \alpha, & x = 1 \end{cases}$

9.17 Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha^2 - 1, & x = 0 \end{cases}$

9.18 Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 + \beta x - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

9.19 Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$

9.20 Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x < 2 \\ 3x + 2, & 2 \leq x \leq 4 \\ 2\alpha x + 5\beta, & x > 4 \end{cases}$ αν η f είναι συνεχής.

9.21 Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 + 2\beta x - 6}{x - 2}, & x > 2 \\ \alpha x + 3\beta, & x \leq 2 \end{cases}$

9.22 Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \cdot \eta\mu(x-1)}{x-1}, & x < 1 \\ \alpha^2 + x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$

9.23 Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{3\alpha}{x^3} + 1, & x \geq 2 \end{cases}$

9.24 Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x + 6, & x < 1 \\ \alpha x + \beta, & 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x-2} - 1}, & x > 3 \end{cases}$

9.25 Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} 3\alpha e^x + x, & x \leq -1 \\ 2x^2 - \alpha x + 3\beta, & -1 < x < 0 \\ \beta \eta\mu x + \alpha \sigma\upsilon\nu x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

9.26 Να βρεθεί το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} (x - \kappa)(x + \kappa), & x \leq 2 \\ \kappa x + 5, & x > 2 \end{cases}$ (Σχολικό)

9.27 Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x^2 + \beta x - 12, & x < 1 \\ 5, & x = 1 \\ \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases}$ να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο 1 (Σχολικό)

9.28 Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \alpha x + 3\beta}{x-1}, & x > 2 \\ 7, & x = 2 \\ \frac{x^2 + \beta x - 3\alpha}{x-3}, & x < 2 \end{cases}$

9.29 Να βρεθεί το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x^2 - 2\ln x}, & x > 0 \\ \kappa, & x = 0 \end{cases}$ (ΘΕΜΑ 2008 Ε)

9.30 Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής με $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \leq 1 \end{cases}$ (ΘΕΜΑ 2018 Ε)

9.31 Δίνεται η συνεχής $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + \lambda \cdot \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ (ΘΕΜΑ 2020)

Γ. Συνέχεια – Βοηθητική Συνάρτηση

9.32 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 3$. Να βρείτε το $f(1)$.

9.33 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2 και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 3}{x - 2} = 1$. Να βρείτε το $f(2)$.

9.34 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) - \eta\mu 3x}{x^2 + x} = 2$. Να βρείτε το $f(0)$.

9.35 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu 2x} = 5$. Να βρείτε το $f(0)$.

9.36 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 5f(x) - 16}{\sqrt{x} - 3} = 5$. Να βρείτε το $f(9)$

9.37 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - x f(x)}{\eta\mu x + x} = 2$.

Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, -3)$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

9.38 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x - 2}{x^2 + x} = 3$

α) Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από το $A(0, 2)$ β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - 1| - 1}{x}$

9.39 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο 3 για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - \sqrt{x+6}}{x-3} = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από το $A(3, 3)$ β) Να βρείτε το α , αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|f(x) - 2| - 1}{x - 3} = 1$

9.40 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο 0 για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt{x+9}}{\eta\mu x} = \frac{17}{6}$. Να βρείτε :

α) την τιμή $f(0)$ β) το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{\eta\mu 3x}$

9.41 Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - \sqrt{x^2 + 9}}{x - 4} = 2014$

α) Αν η C_f διέρχεται από το $A(4, 5)$ να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 4

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$

9.42 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο 1 για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x-1} = 2$

α) Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από το $A(1, 2)$ β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{f(x) + 2}}{f(x) - 2}$

Δ. Εύρεση Τιμής Συνάρτησης

9.43 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $x^2 f(x) = \eta\mu x \cdot \eta\mu 3x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(0)$.

9.44 Δίνεται συνεχής f στο 0 ώστε $x f(x) = \sin x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε το $f(0)$. (Σχολικό)

9.45 Δίνεται συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $x f(x) = \sqrt{x^2 + 5} + 2f(x) + \alpha$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) τον πραγματικό αριθμό α β) την τιμή $f(2)$.

9.46 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\sin x - 1 \leq x^3 - x f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(0)$.

9.47 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $x f(x) \leq x^2 + 4x + \eta\mu x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(0)$.

9.48 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $(x-2)f(x) \leq x^3 - 6x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(2)$

9.49 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $(x-1)f(x) \geq x^2 + x - 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(1)$.

9.50 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|xg(x) - \eta\mu x| \leq x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε το $g(0)$. (Σχολικό)

9.51 Δίνεται συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $(x-2)f(x) = 5x^2 + 3x - 26, \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(2)$.

9.52 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{7f(x) - 5}{2f(x) - 3} = 4$. Να βρείτε το $f(3)$.

Ε. Εύρεση Τύπου Συνάρτησης

9.53 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $xf(x) = \eta\mu 3x + \sqrt{x^2 + x + 1} - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε τον τύπο της f .

9.54 Να βρείτε συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο $x_0 = 1$, ώστε: $xf(x) + 2 = f(x) + \sqrt{x^2 + 3}, \forall x \in \mathbb{R}$.

9.55 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [-5, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $xf(x) = \sqrt{x+5} - f(x) - 2, \forall x \in [-5, +\infty)$.
Να βρείτε τον τύπο της f .

9.56 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^3 f(x) = x[e^x(1 - \sqrt{x}) + f(x)]$
για κάθε $x \geq 0$. Να βρείτε τον τύπο της f

9.57 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1, 5)$ και
ισχύει: $(x-1)f(x) = kx^2 + \lambda x - 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $k, \lambda \in \mathbb{R}$ καθώς και τον τύπο της f

Ζ. Συνέχεια – Κριτήριο Παρεμβολής

9.58 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x) - 2| \leq \sqrt{e^x - x - 1}$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

9.59 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x) - 3x + 2| \leq x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

9.60 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|xf(x) - \alpha + \sqrt{x+4}| \leq x^2, \forall x \in \mathbb{R}$
α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$ β) Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$

9.61 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) + 2f(x) + \sin^2 x \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

9.62 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) + 6f(x) + 9\sin^2 x \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

9.63 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - 4xf(x) \leq -3x^2 - 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι f συνεχής στο 1.

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

9.64 Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^5(x) + f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι f συνεχής στο 0.

9.65 Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι f συνεχής στο 0.

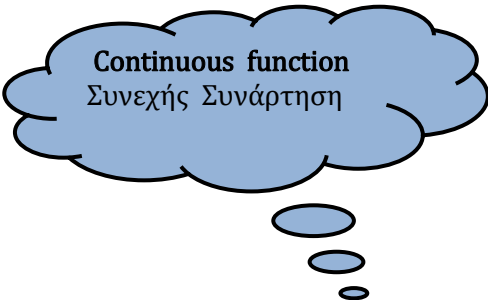
9.66 Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^5(x) + f(x) + 1 = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι f συνεχής στο 0

9.67 Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = x^2 + \eta \mu x, \forall x \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι $|f(x)| \leq x^2 + |x|, \forall x \in \mathbb{R}$ β) Να αποδείξετε ότι f συνεχής στο 0

9.68 Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq \alpha \cdot |x - y|, \alpha > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

9.69 Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $6x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - 6x + 18, \forall x \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 3

β) Θεωρούμε την $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ \alpha - 3, & x = 3 \end{cases}$ Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ αν η g είναι συνεχής στο 3.



Continuous function
Συνεχής Συνάρτηση

10. Ασύμπτωτες Συνάρτησης

A. Κατακόρυφη Ασύμπτωτη

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f **(2010–2015 E)**

● Τις κατακόρυφες ασύμπτωτες τις αναζητούμε :

- ① Στα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού της f
- ② Στα σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία η f δεν είναι συνεχής

B. Οριζόντια Ασύμπτωτη

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$. **(2007–2016 E)**
(αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ στο $-\infty$)

► Μια συνάρτηση f έχει το πολύ δύο οριζόντιες ασύμπτωτες, μια στο $+\infty$ και μια στο $-\infty$

► Τις οριζόντιες ασύμπτωτες τις αναζητούμε στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$ ή αντιστοίχως $(-\infty, \alpha)$

Γ. Πλάγια Ασύμπτωτη

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$

(αντιστοίχως στο $-\infty$)

$$\text{αν } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0 \quad (2005-2011)$$

(αντιστοίχως αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$).

► Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (ομοίως και στο $-\infty$) αν και μόνο αν :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta \in \mathbb{R}$$

- Μια συνάρτηση δεν μπορεί να έχει στο $+\infty$ (ομοίως και στο $-\infty$) και πλάγια και οριζόντια ασύμπτωτη
- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες
- Οι ρητές συναρτήσεις με βαθμό αριθμητή μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

Ασκήσεις

A. Κατακόρυφη Ασύμπτωτη

10.1 Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των συναρτήσεων : α) $f(x) = \frac{x-5}{|x-2|}$ β) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

10.2 Ομοίως : α) $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ β) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-7x+10}$

10.3 Ομοίως : α) $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ β) $f(x) = \frac{\ln x}{1+\ln x}$

10.4 Ομοίως : α) $f(x) = \ln x$ β) $f(x) = \ln(x-3)$ γ) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

10.5 Ομοίως : α) $f(x) = \frac{1-2\ln(x-1)}{x-1}$ β) $f(x) = x \ln \frac{2}{x}$

10.6 Ομοίως : α) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ β) $f(x) = \varepsilon \varphi x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ γ) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$

δ) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ (Σχολικό)

10.7 Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}, & x \leq 0 \\ x + \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

10.8 Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta \mu x}{x}, & x \leq 0 \\ \frac{e^x + 1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

10.9 Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \eta \mu x}{x}, & x > 0 \end{cases}$

10.10 Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$ (ΘΕΜΑ 2016 Ε)

(ΘΕΜΑ 2016 Ε)

10.11 Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της $f(x) = -\ln(x-2)$ (ΘΕΜΑ 2019)

Β. Οριζόντια Ασύμπτωτη

10.12 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των : α) $f(x) = \frac{5x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3}$ β) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x + 2}}{x - 3}$

10.13 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των : α) $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$ β) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

10.14 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των : α) $f(x) = \frac{5x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3}$ β) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x + 2}}{x - 3}$

10.15 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των : α) $f(x) = \frac{x^2 + 2018}{x^2 - 3x + 2}$ β) $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 7}$

10.16 Ομοίως : α) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ β) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ (Σχολικό)

10.17 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των : α) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 7}{x - 1}$ β) $f(x) = xe^{-x}$

10.18 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των : α) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ β) $f(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$

10.19 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \frac{5e^x - 6}{e^x + 3}$

10.20 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των : α) $f(x) = x \cdot e^x$ β) $f(x) = (x^2 - x) \cdot e^x$

10.21 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των : α) $f(x) = \ln \frac{x-1}{x-2}$ β) $f(x) = 1 + \frac{\eta \mu x}{x}$

10.22 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x \eta \mu x + 2015$. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ και να δείξετε ότι η C_f τέμνει την παραπάνω ασύμπτωτη σε άπειρα σημεία.

10.23 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x+1}, & x < -1 \\ \frac{1}{x^2+1}, & x \geq -1 \end{cases}$

10.24 Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ (ΘΕΜΑ 2017)

Γ. Πλάγια Ασύμπτωτη

10.25 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 3}$.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

10.26 Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 1}$ β) $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 5}{x^2 - x + 1}$

10.27 Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{9x^2 + 8x + 5}$

10.28 Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες των : α) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$ β) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x|}$

10.29 Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες των : α) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ β) $f(x) = x \cdot \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$

10.30 Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \ln(e^x + 1)$

10.31 Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x - 3}$

10.32 Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = 3x - 5 + \frac{7}{e^x + x^2}$

10.33 Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = 2x - 3 + \frac{\ln x}{x}$

10.34 Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = 3x + \frac{\eta \mu x}{x}$

10.35 Να εξετάσετε αν έχει πλάγια ασύμπτωτη μια f για την οποία ισχύει: $2x + 3 \leq f(x) \leq \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{x^2}$

10.36 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ και οι ευθείες $\varepsilon_1: y = -x - 1$, $\varepsilon_2: y = x + 1$
Να δείξετε ότι :

α) Η ε_1 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ ενώ η ε_2 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

β) Για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^2 + 2x + 2 > (x + 1)^2 \geq 0$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την ε_1 κοντά στο $-\infty$ και πάνω από την ε_2 κοντά στο $+\infty$ **(Σχολικό)**

Δ. Εύρεση Ασύμπτωτων

10.37 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 2}{x - 1}$

10.38 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 1}{x + 1}$

10.39 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

10.40 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$

10.41 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες α) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ β) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 4}}{x - 2}$

10.42 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 2x + 5}$

10.43 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x}$

10.44 Ομοίως : α) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$ β) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$ γ) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ (Σχολικό)

10.45 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες α) $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$ β) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ (Σχολικό)

10.46 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = x \cdot \ln x$

10.47 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $f(x) = \ln(e^x - 1)$

10.48 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = (x + 2) \cdot e^{\frac{1}{x}}$

10.49 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \frac{3x^2}{e^x}$

10.50 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

10.51 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \frac{|x^3 - x|}{x^2}$

10.52 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x^2 + x + 3}, & x > 0 \end{cases}$

10.53 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{e^x}, & x \leq 0 \\ \frac{x^2-1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

10.54 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x^2 + x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{x^3 + 1}{x^2}, & x < 0 \end{cases}$

10.55 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2 \ln x$ (ΘΕΜΑ 2008)

10.56 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $f(x) = (x - 2) \ln x + x - 3$ (ΘΕΜΑ 2010)

10.57 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ (ΘΕΜΑ 2014)

10.58 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ (ΘΕΜΑ 2016)

10.59 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$ (ΘΕΜΑ 2018)

10.60 Να βρείτε την ασύμπτωτη της $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ στο $+\infty$ (ΘΕΜΑ 2019 Ε)



Ε. Ασύμπτωτες και Βοηθητική Συνάρτηση

10.61 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x f(x) - x^2 + 3x] = 4$.

Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

10.62 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f(x) - 2x^2}{\sqrt{4x^2 + x + 1}} = -3$.

Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

10.63 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x f(x) + 3x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} = 2$.

Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Ζ. Ασύμπτωτες και Κριτήριο Παρεμβολής

10.64 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $3x + \frac{\eta\mu x}{x} \leq f(x) \leq 3x + \frac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$.

Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f

10.65 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $2x^2 - 1 \leq x f(x) \leq 2x^2 - \eta\mu x$, $x > 0$.

Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f

Ζ. Προσδιορισμός Παραμέτρων

10.66 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 1}{x - 2}$ να έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = 2x + 3$

10.67 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 3}{2x + 1}$ να έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = 3x - 1$

10.68 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x - 2}$ να έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2x - 1$

10.69 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha - 1)x^2 + (\beta - 2)x - 2}{x + 1}$ να έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 3x - 7$

10.70 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha x + \beta) \cdot e^x}{1 + e^x}$ να έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = 2x - 1$

10.71 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{\beta x^2 - 2x - 1}{x - 3}$ να έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = \alpha x + 7$

10.72 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \mu x$, $\mu \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y = \lambda$ στο $+\infty$, τότε να δείξετε ότι $\mu = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$

10.73 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha-1)x^2 + \beta x + 5}{3x + \gamma}$ να έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $x = -2$ και $y = 3$

10.74 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha-1)x^2 - \beta x + 4}{x - \gamma}$ να έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 1$ και $y = 2$

10.75 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 5x + 1}{x - 1} - \alpha x - \beta \right) = 0$

10.76 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha x - \beta - \sqrt{x^2 - x + 1}) = 2$

10.77 Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + \lambda$ να έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 2$ (**ΘΕΜΑ 2019**)

Η. Ασύμπτωτες και Όρια

10.78 Η ευθεία $y = 4x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 f(x) - 4x^3}{x f(x) - 2019} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)(x+1) - 4x^2}{3x - 2019}$$

10.79 Η ευθεία $y = 2x + 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 f(x) - 2x^4 + 4x^3 + 5) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 f(x) + 3x^3 + 1}{x^3 f(x) - 2x^4 + 4x^3 + 5}$$

10.80 Η ευθεία $y = 2x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot f(x) + f^2(x)}{x^2 + \eta \mu^2 x} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot f(x)] \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f^2(x) - 2x f(x) \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right]$$

10.81 Η ευθεία $y = 2x + 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x + 1}{x f(x) - 2x^2}$

10.82 Η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Να βρείτε το: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x f(x) + x \eta \mu x}{x^2 f(x) - 2x^3 + 2015}$

10.83 Η ευθεία $y = 4x + 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Να βρείτε το: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 8x + \eta \mu x}{f(x) + x f(x) - 4x^2 - 3x + 3}$

10.84 Η ευθεία $y = 2018x + 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Να βρείτε το: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 f(x) + x^3 + 1}{x^3 f(x) - 2018x^4 - 5}$

10.85 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 + \frac{x^2}{e^x}$

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

β) Να βρείτε τα όρια : $\beta 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\beta 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ $\beta 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \sqrt{x^2 + 1})$

10.86 Η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu f(x) + 4x}{x f(x) - 2x^2 + 3x} = 1$

10.87 Η ευθεία $y = 3x - 5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu^2 - 1)f(x) - 5\mu x + 7}{x f(x) - 3x^2 + (\mu + 2)x - 3} = 1$

10.88 Η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda f(x) + 2017}{x f(x) - 2x^2 + 7x} = 1$

10.89 Η ευθεία $y = 3x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu - 3)f(x) + \sqrt{9x^2 - 16x} + x}{x f(x) - 3x^2 + \mu 4x} = 2$

10.90 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) - g(x) = x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

Αν η ευθεία $y = 3x - 7$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε :

α) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3x + \mu 2x}{x f(x) - 3x^2 + 1}$

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

10.91 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) - g(x) = x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Αν η ευθεία $y = 2x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε :

α) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

β) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 2x + \ln x}{x f(x) - 2x^2 + \mu x}$

11. Θεώρημα BOLZANO

A. Διατύπωση Θεωρήματος Bolzano

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- ▶ η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και επιπλέον
- ▶ $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$

τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Δηλαδή υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

(2014 E–2020)

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ BOLZANO

- ▶ Αν f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, δηλαδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, τότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον μια φορά στο (α, β)

● Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano δεν ισχύει.

Δηλαδή αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ή ότι ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$

B. Σταθερό Πρόσημο Συνάρτησης

① Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε x που ανήκει στο Δ ή αρνητική για κάθε x που ανήκει στο Δ , δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .

② Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Γ. Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών (Θ.Ε.Τ.)

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν :

- ▶ f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- ▶ $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.

Intermediate
Value Theorem
Θεώρημα
Ενδιάμεσων
Τιμών

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα υπάρχει αριθμός η τέτοιος ώστε $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, με $x \in [\alpha, \beta]$. Παρατηρούμε ότι :

g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ αφού f είναι συνεχής

$$g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0 \text{ αφού } f(\alpha) < \eta$$

$$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0 \text{ αφού } f(\beta) > \eta$$

$$\text{άρα } g(\alpha)g(\beta) < 0.$$

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$

$$\text{τέτοιο ώστε } g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - \eta = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \eta \quad (2005-2015-2020)$$

Δ. Θεώρημα Μεγίστης και Ελαχίστης Τιμής (Θ.Μ.Ε.Τ.)

Αν f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$,

$$\text{να ισχύει : } m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Ε. Σύνολο Τιμών

● Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

● Αν η f είναι σταθερή στο Δ , τότε η εικόνα $f(\Delta)$ είναι μονοσύνολο και όχι διάστημα.

● Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$, είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

Ασκήσεις

A. Τουλάχιστον μια Ρίζα Εξίσωσης

11.1 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5 - 3x = 2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 2)$

11.2 Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 5x^2 + 3x = 2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$

11.3 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $5x^5 = 2e^x - 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$

11.4 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x = xe^x + x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$

11.5 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{2^x}{x+1} + \frac{3^x}{x-2} = 2021$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1, 2)$

11.6 Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x-1} + \frac{\ln x}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$ (Σχολικό)

11.7 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^{x^2}}{x-2} + \frac{x^2}{x-1} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$

11.8 Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και τέτοιες, ώστε $f(1) \cdot g(2) > 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{g(x)}{x-2} + \frac{f(x)}{x-1} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$

11.9 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται από τα $A(1, 5)$ και $B(3, 2)$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 3)$.

11.10 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{4-2x}{x^2-2x+3}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

11.11 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ x^2+3x+1, & x \leq 0 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-1, 1]$

11.12 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^3-4x+1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-1, 1]$

11.13 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2+4x-3, & x \leq 2 \\ 2x-3, & x > 2 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[0, 4]$ και να βρείτε το $\xi \in (0, 4): f(\xi) = 0$

B. Τουλάχιστον Δύο Ρίζες Εξίσωσης

11.14 Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 - 20x^3 = 25x^2 + x - 1$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-1, 1)$.

11.15 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 = 6x^2 - 1$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-1, 1)$.

11.16 Να δείξετε ότι η εξίσωση $x \cdot e^{x^2-4} = 1 - x^2$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-2, 2)$.

11.17 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-2)(x-3) + 4(x-1)(x-3) + 7(x-1)(x-2) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(1, 3)$

11.18 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3\eta\mu x = x - 1$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-\pi, 0)$

11.19 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3\sigma\upsilon\nu x = x + 2$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

11.20 Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x-1} + \frac{x^2+1}{x-2} + \frac{\eta\mu x+2}{x-3} = 0$ έχει δύο τουλάχιστον πραγματικές ρίζες

11.21 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-6} = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(2, 6)$.

11.22 Να δείξετε ότι η εξίσωση $(4-x)\ln x + 6x^2 = 6x + x^3$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(1, 6)$

Γ. Μοναδική Ρίζα Εξίσωσης

11.23 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 3x + 1 = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-1, 0)$.

11.24 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + 5x = 5$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$.

11.25 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3^x + 2x = -1$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-1, 2)$.

11.26 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\ln x - e^{e-x} = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1, e)$.

11.27 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\ln x + e \cdot x = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(\frac{1}{e}, 1)$

11.28 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{\phi x} + 4x = 1$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, \frac{\pi}{4})$

11.29 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $-2\ln x + 3\sigma\upsilon\nu x = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, \pi)$.

11.30 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη για την οποία ισχύει $f^2(2) + f^2(3) - 2f(2) + 4f(3) + 5 = 0$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2), f(3)$. β) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(2-x) + 5e^x = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

11.31 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα με $f(1) = e$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = xe^x + 2$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(0, +\infty)$

11.32 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + 2$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(2, 3)$ (ΘΕΜΑ 2019)

Δ. Η C_f Τέμνει τον Άξονα x'

11.33 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 2$. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x' σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο $(0, 1)$.

11.34 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\ln x + x - 2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μοναδικό σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(1, e)$.

11.35 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 5]$ ώστε $f^2(\alpha) + f^2(\beta) + 5 \leq 2[f(\alpha) - 2f(\beta)]$.

Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

11.36 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f^2(\alpha) + (f(\beta) - 1) \cdot f(\alpha) + 1 = 0$.

Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

E. Τουλάχιστον ένα κοινό σημείο C_f, C_g

11.37 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 - 2x$ και $g(x) = 15 - 5x$.

Να δείξετε ότι οι C_f, C_g τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο $(2, 3)$.

11.38 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ και $g(x) = -9x^3 - 3x + 1$. Να δείξετε ότι οι C_f, C_g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο $(-1, 1)$

11.39 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να δείξετε ότι οι C_f, C_g τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο $(\frac{1}{e}, e)$.

11.40 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x-1} + x^2 + 1$ και $g(x) = x^2 + 2 - e^{x-1}$

Να δείξετε ότι οι C_f, C_g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο $(0, 1)$

11.41 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 - 4x - 2$

α) Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο $(-1, 0)$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = -4 - e^{-x}$. Να δείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη στο $(0, 1)$.

11.42 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x^3 - 6x^2$ και $g(x) = 2x^2 - 3x$. Να δείξετε ότι οι C_f, C_g τέμνονται σε δύο τουλάχιστον σημεία του οποίου η τετμημένη ανήκει στο $(0, 2)$

11.43 Έστω f συνεχής στο $[0, 1]$ ώστε $3x^2 \leq f(x) + x \leq 3x, \forall x \in [0, 1]$. Να δείξετε ότι η C_f και η ευθεία $\varepsilon : 4x - y - 1 = 0$ έχουν ένα τουλάχιστον σημείο τομής στο $(0, 1)$

11.44 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται από τα $A(1, 5)$ και $B(4, 2)$. Να δείξετε ότι η C_f και η ευθεία $\varepsilon : x - y = 0$ έχουν ένα τουλάχιστον σημείο τομής

11.45 Δίνεται συνεχής $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(5, 2)$. Να αποδείξετε ότι η C_f και η ευθεία $\varepsilon : y = x$ έχουν ένα τουλάχιστον σημείο τομής

11.46 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1 και ισχύει $f(0) \cdot f(2) < 2f(0)$.

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} , έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

11.47 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 7 - 3\ln x - x^2$

α) Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη στο $(1, e)$

β) Αν x_0 είναι η τετμημένη του σημείου τομής της, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)}$

11.48 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1-x)$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f^{-1} και $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)}$

11.49 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{\eta\mu(x-2)} = 16$

α) Να δείξετε ότι η C_f και η C_g της $g(x) = x^3 - x - 2$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{x^2-5x+6}$

Z. Bolzano Χωρίς Διάστημα

11.50 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x(e^x + 2) = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα

11.51 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2 \ln(x+2) + \eta\mu(\pi x) = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα

11.52 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^3 + 3x - 1 = 0$ έχει ακριβώς μια θετική ρίζα.

11.53 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - \frac{1}{x} = 0$ έχει ακριβώς μια θετική ρίζα.

11.54 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x = 3 + \eta\mu x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

11.55 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + 2 = \frac{e}{x}$ έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα.

11.56 Δίνεται η $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2$. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x' σε ένα τουλάχιστον σημείο

H. Θεωρητικές Ασκήσεις στο Bolzano

11.57 Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e) : x_0 \cdot \ln x_0 + \ln x_0 = e$

11.58 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 1]$. Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(0, 3)$ και $B(1, 2)$ τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1) : \frac{f(x_0)}{x_0} = 3$

11.59 Δίνονται οι f, g συνεχείς στο $[0, 1]$, για τις οποίες ισχύει $f(0) < g(0)$, $f(1) > g(1)$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$ **(Σχολικό)**

11.60 Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{f(\alpha) + 2f(\beta)}{3}$

11.61 Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta) : \frac{f(\alpha)}{3} + \frac{f(\beta)}{2} = \frac{5}{6} f(x_0)$

11.62 Δίνεται συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής με $f(\alpha) = 2015\beta^2$, $f(\beta) = 2015\alpha^2$.
Να δείξετε ότι $\exists x_0 \in (\alpha, \beta) : f(x_0) = 2015 x_0^2$.

11.63 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 5]$ ώστε $f^2(1) + f^2(5) = 6f(1) - 2f(5) - 10$.
Να δείξετε ότι $\exists x_0 \in (1, 5) : 2f(x_0) = x_0$

11.64 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(1) = 3$ και $f(3) = 1$. Να αποδείξετε ότι :
α) $\exists x_0 \in (1, 3) : f(x_0) = x_0$
β) η εξίσωση $f^2(x) + 2x - 1 = (x + 2) \cdot f(x)$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο $(1, 3)$

11.65 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [1, 5] \rightarrow (1, 3)$. Να δείξετε ότι $\exists x_0 \in (1, 3) : f(x_0) = \frac{3}{x_0}$

11.66 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $0 < f(x) < 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - 4f(x) + 5x = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$.

11.67 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $0 < f(x) < 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) + 2x = 2f(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 2)$.

11.68 Δίνεται συνεχής $f : [0, 1] \rightarrow (-1, 0)$. Να αποδείξετε ότι $\exists \xi \in (0, 1) : f^2(\xi) + f(\xi) + \xi = 0$

11.69 Δίνονται οι $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς, με $f(x) - g(x) = \frac{2}{x} - 2x$, $\forall x > 0$. Αν ρ_1, ρ_2 ρίζες της g με $0 < \rho_1 < 1 < \rho_2$ τότε να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1, ρ_2)

11.70 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς, για τις οποίες ισχύει
 $\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$. Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες $\rho_1 < 0 < \rho_2$. Να αποδείξετε ότι και η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

11.71 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = 4x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

11.72 Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) - 2f^2(x) + 3f(x) = 2 - x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο $(-1, 2)$

11.73 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x + 1 \leq f(x) \leq e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^2 x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$

11.74 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x + 2 \leq f(x) < e^{x+2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^3 x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$

11.75 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $2\ln x - x < f(x) < \ln^2 x + x$, $\forall x > 0$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = (e^2 + 1)\ln x - x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, e)$

11.76 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -2 . Επιπλέον ισχύει: $4\sqrt{x} - 8 \leq (x - 4)f(x) \leq x - 4$, $\forall x \in [0, 4]$
Να αποδείξετε ότι και η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

11.77 Δίνεται συνεχής $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $x^2 + x - 2 + \eta\mu(1 - x) \leq (x - 1)f(x) \leq x^2 - 1$

α) Να βρείτε την τιμή $f(1)$

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x + 2)f(x) = 7x + 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$

11.78 Δίνεται συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\forall x \geq -1: \sqrt{8x + 8} - 4 \leq (x - 1)f(x) \leq \sqrt{2x^2 + 2} - 2$

α) Να βρείτε την τιμή $f(1)$

β) Να δείξετε ότι $\exists x_0 \in (-1, 1): f(x_0) = 2x_0$

11.79 Έστω f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x + 1 \leq f(x) \leq e^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α) η f είναι συνεχής στο 0

β) $\exists x_0 \in (-1, 1): \frac{f(x_0)}{2018} = x_0$

11.80 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x) + 2 = f(x) + \sqrt{3x^2 + 1}, \forall x \in \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι $\exists x_0 \in (0, 1): 4f(x_0) = 7x_0$.

11.81 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$ και

ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 3}{x - 1} = 5$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 1)$.

11.82 Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$, γνησίως μονότονη ώστε η C_f να διέρχεται από τα $A(2, 3)$ και $B(3, 2)$.
Θεωρούμε επίσης συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $g(x) = f(2x - f(x)) - x, \forall x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α) οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως φθίνουσες

β) η εξίσωση $f(x) + f^{-1}(x) = 2x$ έχει μοναδική ρίζα στο $(2, 3)$

11.83 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο $[1, 4]$ με $f(1) + f(2) = f(3) + f(4), f(1) \neq f(2), f(3) \neq f(4)$

Να δείξετε ότι:

α) υπάρχει $\xi \in (1, 2): f(\xi) = \frac{f(1) + f(2)}{2}$

β) η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται

11.84 Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η σύνθεση της g με την f είναι 1-1 και ισχύει η σχέση $f^2(0) + f^2(1) + 4 = 4f(0)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(f(x) - x) = g(1 - x^2)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

11.85 Δίνεται συνεχής και περιττή $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)f(x) + \eta\mu(x - 3)}{\sqrt{x - 2} - 1} = -22$

α) Να δείξετε ότι C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x^2 = 6$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-3, 3)$.

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(1) = -2$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x^3 = 0$ έχει τρεις τουλάχιστον λύσεις στο $(-3, 3)$, από τις οποίες οι δύο είναι αντίθετες.

11.86 Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$, με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\beta^2 < 3\gamma$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$. (**ΘΕΜΑ 2001**)

11.87 Δίνεται η $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$ και η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $0 < g(x) < 1$ για $x \geq 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία ανήκει στο $(0, 1)$. (**ΘΕΜΑ 2019 Ε**)

Θ. Θεώρημα Bolzano σε Κλειστό Διάστημα

11.88 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Αν ισχύει $f(0) + f(1) = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[0, 1]$.

11.89 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αν ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

11.90 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Αν ισχύει $3f(0) + 5f(1) = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[0, 1]$.

11.91 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Αν ισχύει $3f(0) + f(1) = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[0, 1]$.

11.92 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αν ισχύει $7f(\alpha) + 9f(\beta) = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

11.93 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $\alpha, \beta \neq 0$. Αν ισχύει $e^{-\alpha} \cdot f(\alpha) + e^{-\beta} \cdot f(\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

11.94 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = (f(0) + f(2)) \cdot x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[0, 2]$.

11.95 Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς στο $\mathbb{R}$. Αν $f(\alpha) + f(\beta) = g(\alpha) + g(\beta)$ με $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι C_f, C_g οι έχουν ένα τουλάχιστον σημείο τομής, στο $[\alpha, \beta]$

11.96 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αν ισχύει $3f^2(\alpha) + 2f(\alpha)f(\beta) = 0$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

11.97 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) + f(2) = 7$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x^2 = 4x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο $[1, 2]$

11.98 Δίνεται συνεχής $f: [2, 3] \rightarrow [2, 3]$. Να δείξετε ότι $\exists \xi \in [2, 3] : f(\xi) = \frac{6}{\xi}$

11.99 Δίνεται συνεχής $f: [0, 1] \rightarrow [0, 3]$. Να δείξετε ότι $\exists \xi \in [0, 1] : f(\xi) = \xi^2 + 1$

11.100 Δίνεται συνεχής $f: [0, 2] \rightarrow [0, 1]$. Να δείξετε ότι $\exists \xi \in [0, 2] : f^2(\xi) + \xi^2 = 2f(\xi) + 3$

11.101 Δίνεται συνεχής $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Να δείξετε ότι $\exists \xi \in [0, 1] : f^2(\xi) + f(\xi) = \xi^2 + \xi$

11.102 Δίνεται συνεχής $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(0) = f(4)$. Να δείξετε ότι $\exists \xi \in [0, 2] : f(\xi) = f(\xi + 2)$

11.103 Δίνεται συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(1) = f(5)$. Να δείξετε ότι $\exists \xi \in [1, 3] : f(\xi) = f(\xi + 2)$

11.104 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x^2 - 4x + 2)f(x) \leq f(0) + f(4)$. Να αποδείξετε ότι :
α) $f(0) = f(4)$ β) $\exists \xi \in [0, 2] : f(\xi^2) = \xi \cdot f(2\xi)$

I. Σταθερό Πρόσημο Συνάρτησης

11.105 Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς το πρόσημο :

α) $f(x) = (x-2)(x-4)(e^x - 1)$ β) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ γ) $f(x) = e^x - 1 + \ln(x+1)$

11.106 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο $[0, 2019]$ για την οποία ισχύει $f(2019) < f(0) < 0$ και ότι η f είναι 1-1. Να βρείτε το πρόσημο της f .

11.107 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε $f(x)(x^3 - \eta\mu x + e^x) \geq e^x - \sigma\upsilon\nu x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε το πρόσημο της f

11.108 Έστω συνάρτηση $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $x^2 + 7f^2(x) = 1, x \in [-1, 1]$.
Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1, 1)$

11.109 Έστω συνάρτηση $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $3(x^2 - 1) + 2f^2(x) = 9, x \in [-2, 2]$.
Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2, 2)$

11.110 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f^2(x) + 7f(x) + 1 \geq x^2 + e^x + 5, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$

11.111 Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g το $\mathbb{R}$ ώστε $g^2(x) + f(x)g(x) \leq -2019$.
Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$

11.112 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f^3(x) + 2xf(x) = x^4 + x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

11.113 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν $f(2019) + f(2018) = 0, f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

11.114 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(1)x^5 - 4x^3 + 2x - 1}{f(3)x^2 - 5x + 3}$

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $xf(x) = (x^2 - 4)e^x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(-2, 2)$.

11.115 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ με $x \in [1, 5]$ της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο $A(2, 4)$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $xf(x) - 25 = f(x) - x^2$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(1, 5)$

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(4)x^5 - e^x - 1)$

11.116 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ με $x \in [-1, 2]$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3(1 - f(x)) = x^2 + 2x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(-1, 2)$

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(0)x^5 - 3x^2 + 1}{-f(1)x^2 - 2x + 5}$

11.117 Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 f(x) + \eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 9} - 3} = 4$

α) Να βρείτε το $f(0)$

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3(1 + f(x)) = x^2 + 3x - 1$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0, 2)$

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(3)x^5 - x^3 - 3x + e}{(6f(0) + 1)x^5 - f(1)x^2 + 2x - 7}$

11.118 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \eta \mu x}{\sqrt{x+1} - 1} = 4$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2 - x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 2)$

11.119 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε $f^2(x) + (x+1)f(x) + e^{2x} = 3e^x \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x+1) = f(0) - x^2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

11.120 Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την g περιττή.

Αν $f(x) \neq g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(x) > g(x)$

11.121 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x) \neq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$. Να δείξετε ότι:

α) $f(x) < x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

β) $\exists x_0 \in (-1, 1) : x_0 f(x_0) = 1$

11.122 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ με $x \in [0, 5]$ της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ και ισχύει ότι $f(2)f(3) = f(4)f(5)$, να δείξετε ότι:

α) $f(x) > 0$ $\forall x \in [0, 5]$

β) $\exists x_1 \in [2, 3]$ και $x_2 \in [4, 5]$ ώστε να ισχύουν $f^2(x_1) = f(2)f(3)$ και $f^2(x_2) = f(4)f(5)$

γ) η f δεν αντιστρέφεται

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f(0)+f(1))x^2 - 2}{e^x + 1} = +\infty$

11.123 Δίνεται η $h(x) = x^3 + e^x$ και οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

► f γνησίως μονότονη

► $(gog)(x) = f(0)g^3(x) + f(1) \cdot f(x^3 + e^x + 2019)$

► $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f(0)-f(1))x^5 + x^3 + 1}{f^2(1)x^2 + x + 1} = -\infty$

α) Να δείξετε ότι:

α1) η f είναι γνησίως φθίνουσα και η h γνησίως αύξουσα

α2) η συνάρτηση g είναι 1-1

β) Αν η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{f(0)x^4 + x^2}{f(1)x^2 + x + 1} + \eta \mu x \right] = +\infty$

11.124 Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ των οποίων οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν κοινό σημείο το $M(1, 2)$. Αν η f δεν έχει ρίζες και η g έχει διαδοχικές ρίζες τους αριθμούς 0 και 3 ,

να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(7)x^4 + x + \eta \mu x}{g(2)x^2 + x + 1}$

11.125 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \eta \mu 3x}{\sqrt{x+1} - 1} = 2$

και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδικές ρίζες τους αριθμούς -1 και 3 . Να υπολογίσετε:

α) την τιμή $f(0)$

β) το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(e) \cdot \ln x)$

11.126 Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ της οποίας η C_f τέμνει τους άξονες μόνο στα $A(0, 3)$, $B(2, 0)$, $\Gamma(5, 0)$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1) > 0$

β) $f(3) \cdot f(4) > 0$

γ) $\exists x_0 \in (1, 2) : f(x_0) = f(x_0 + 1) \cdot f(x_0 + 2)$

11.127 Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς στο $\mathbb{R}$ με $f(x) = (x^2 - 5x + 6) \cdot g(x)$

$\forall x \in [2, 3]$. Αν οι αριθμοί $2, 3$ είναι διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, να δείξετε ότι $g(2) \cdot g(3) \geq 0$

11.128 Έστω συνάρτηση $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $x^2 + f^2(x) = 9$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$

β) Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-3, 3)$

γ) Να βρείτε τον τύπο της f

11.129 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $f^2(x) = e^x + 1$, $f(0) = \sqrt{2}$.

11.130 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $f^2(x) = x^2 + 1$, $f(0) = 1$.

11.131 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $[f(x) + 2][f(x) - 2] = x^2$, $f(0) = 2$

11.132 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f ώστε $[f(x) + x][f(x) - x] = x^2 + 1$, $f(0) = 4$

11.133 Δίνεται συνεχής $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^2 + f^2(x) = 9$, $\forall x \in [-3, 3]$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

β) Αν η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $M(0, 3)$ να βρείτε τον τύπο της f

11.134 Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\frac{f^2(x) - 4}{e^x + 4} = e^x$ με $f(0) = -3$. Να βρείτε :

α) τον τύπο της f

β) το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 4^{x+2}}{3^x + 4^x}$

11.135 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - 2xf(x) = 5$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Αν η C_f διέρχεται από το $M(2, -1)$ να βρείτε τον τύπο της f .

11.136 Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε $f^2(x) - 4f(x) \cdot \eta\mu x = x^2 + 4\sigma\upsilon\nu^2 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f(\pi) > f(0)$

α) Να δείξετε ότι $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

β) Να δείξετε ότι $f(0) = 2$

γ) Να βρείτε τον τύπο της f

δ) Να υπολογίσετε τα όρια $\delta_1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2\sigma\upsilon\nu x}{x}$ $\delta_2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

11.137 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία $f(x)[f(x) - 2x] = e^{2x} - x^2$, $f(0) = -1$.

11.138 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $f^2(x) + 2xf(x) = e^x$, $f(0) > 0$.

11.139 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $f^2(x) = 4xf(x) + 4$, $f(0) = 1$.

11.140 Δίνεται συνεχής $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^2(x) + xf(x) = 4$, $f(3) = -4$. Να βρείτε την f

11.141 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $f^2(x) + 2f(x) = \eta\mu^2 x$, $f(0) = -2$.

11.142 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $f^2(x) = 2xf(x) + 1$, $f(0) = -2$.

11.143 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $e^x f^2(x) - \frac{x^2}{e^x} = 2f(x)$, $f(0) = 0$.

11.144 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}} = 2x$, $f(0) = 0$.

11.145 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f ώστε να ισχύει: $e^{f(x)} - 4x - 4e^{-f(x)} = 0$, $f(0) = \ln 2$

11.146 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f ώστε: $f^2(x) + 2f(x)\eta\mu x = x^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x$, με $f(0) = 1$

11.147 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\ln(f(x) - x) + \ln(f(x) + x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(0) = 1$

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

11.148 Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f^2(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

11.149 Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f^2(x) = e^{2x}, \forall x \in \mathbb{R}$

11.150 Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $(f(x) - 3\sin x)(f(x) + 3\sin x) = 9\sin^2 x$

11.151 Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε: $f^2(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. (Σχολικό)

11.152 Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε: $f^2(x) + 2x = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

11.153 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - 4x = x^2 + 4, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε την f .

Κ. Σύνολο Τιμών Συνάρτησης

11.154 Να βρεθούν τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων :

α) $f(x) = x^3 + 5x - 1, x \in [1, 2]$

β) $f(x) = -x^5 - 3x + 2, x \in [0, 2]$

11.155 Ομοίως: α) $f(x) = x^3 + x - 10, x \in (-\infty, 1]$ β) $f(x) = \ln x + 2e^x, x \in (0, 1]$

11.156 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^{1-x} + \frac{1}{x}, x \in [1, 2]$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

11.157 Δίνεται η $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{5-x}$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

11.158 Δίνεται η $f(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{2+x}$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

11.159 Να βρείτε το σύνολο τιμών των: α) $f(x) = x + \ln x$ β) $f(x) = 1 - x - \ln x$

11.160 Να βρείτε το σύνολο τιμών των: α) $f(x) = e^{x^3+1}$ β) $f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$

11.161 Να βρείτε το σύνολο τιμών των: α) $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$ β) $f(x) = e^{-x} - \ln x$

11.162 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \ln x, & 0 < x \leq 1 \\ e^{x-1} + \ln x, & x > 1 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

11.163 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \left(\frac{x+1}{2-x} \right)$. Να βρείτε :

α) το σύνολο τιμών της f

β) τις ασύμπτωτες της C_f

11.164 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και ισχύει: $x^3 + x^2 + 2 \leq f(x) - x \leq x^3 + 2x^2 + 2, \forall x > 0$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

11.165 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - \ln(9-x)$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sqrt{x} - \ln(9-x) = e$ έχει ακριβώς μια λύση.

11.166 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - \ln x - e^x$, $x \in (0, 1]$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + e^x = 2$ έχει ακριβώς μια θετική λύση μικρότερη της μονάδας.

11.167 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - e^x$, $x \in (-\infty, 0)$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2xe^x - x - 2 = 0$ έχει μοναδική αρνητική ρίζα

11.168 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - \ln x - \sqrt{x-1}$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο.

11.169 Δίνεται η $f(x) = 3\sqrt{x} + \ln x$. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο.

11.170 Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{1}{x}$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο (**Σχολικό**)

11.171 Να δείξετε ότι η εξίσωση $2 + \ln(1 - e^x) = e^x$ έχει ακριβώς μια λύση

11.172 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{2^x} = \ln x$ έχει μοναδική ρίζα

11.173 Να δείξετε ότι η εξίσωση $x - 2 = e^{-x}$ έχει μοναδική θετική ρίζα

11.174 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^x - 1$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα x_0 ώστε να ισχύει $\ln x_0 + e^{x_0} = 1$.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2016$ έχει ακριβώς μια θετική ρίζα.

11.175 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - e^{-x}$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln \frac{x}{2018} - e^{-x} = 0$ έχει ακριβώς μια λύση.

11.176 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα x_0 τέτοιο, ώστε $2x_0 \ln x_0 = 2 - 3x_0$.

11.177 Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x - \frac{1}{x}$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς x_0 : $x_0^{x_0} = e^{\frac{1}{x_0}}$

11.178 Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\ln x} - x$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0 > 1$: $x_0^{x_0} = e$

11.179 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x} - e^x$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f\left((2 + \sqrt{1-x})e^{-x} - 1\right) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα

11.180 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^x + x - 1$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

β) Να βρείτε το α ώστε να ισχύει $e^{\alpha^2+4} - e^{4\alpha} = \ln 4\alpha - \ln(\alpha^2 + 4) + 4\alpha - \alpha^2 - 4$

11.181 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^{x-2}$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = e^2(\alpha - \ln x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς μια λύση.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $e \ln x + e^{x-1} = 1$

11.182 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{2}{x} + \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi > 0$ τέτοιος, ώστε: $\left(\frac{e\xi+1}{\xi}\right)^\xi = e^{e\xi-2}$

11.183 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) + x^2, & x \geq 2 \\ e^{2-x} - x^3 + 11, & x < 2 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{2-f(\alpha)}{x-1} + \frac{3-f(\beta)}{x-3} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 3)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

11.184 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + e^x, & x \leq 0 \\ e^{-x} - \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να δείξετε ότι η f έχει δύο ρίζες ετερόσημες

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)-1}{x-1} + \frac{f(\beta)-1}{x-2} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$

ε) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

11.185 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - x, & x \leq 0 \\ \ln(x+1) + 1, & x > 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x)) - 2 = 1$ (1) έχει ακριβώς δύο ρίζες ετερόσημες

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)-4}{x-x_2} + \frac{f(3-f(x))-2}{x-x_1} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2)

όπου x_1, x_2 οι ρίζες της (1)

ε) Να δείξετε ότι $f(f^3(x)) \geq f(f^2(x))$

11.186 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 \ln x - \frac{1}{x}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

11.187 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+2) + \ln(x-2) - 3$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- γ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη.

11.188 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(1 - e^x)$

- α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2050$ έχει μοναδική ρίζα
- γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης και τον τύπο της
- δ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} δεν έχουν κοινά σημεία.

11.189 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3^x}{1+3^x}$

- α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη.
- γ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$

11.190 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + e^{x-3} + 1$.

- α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}\left(x^5 + e^{x-3} + 245 - \frac{1}{e^3}\right) > 3$
- δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(e^{3-x}(x^5 + 10)) = \frac{1}{e^4}$

11.191 Δίνεται η συνάρτηση $f: [-\ln 3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 1 + e^{-x}$

- α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}
- γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + f^{-1}(x) = 2020$ έχει ακριβώς μια λύση.

11.192 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + e^{x-2} - 1$.

- α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x^3 + e^{x-2} + e^{-1} - 9) > 1$
- δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(e^{2-x}(x^3 - 8) + 3) = 8$

11.193 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e^{-x} + x^3 + 2x - 1$

- α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$
- γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ έχει ακριβώς μια ρίζα
- δ) Να λυθεί $f(e^{1-x} + 1) > f(\ln x + 2x)$

11.194 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$

- α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.
- β) Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα

γ) Αν η f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια: γ1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$ γ2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(f^{-1}(x))^3 + f^{-1}(x) + 2}$

11.195 Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και ισχύει: $x^3 + x^2 + 2 \leq f(x) - x \leq x^3 + 2x^2 + 2$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

β) Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα

γ) Αν η f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια: $\gamma 1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{f^{-1}(x)}$ $\gamma 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + f^{-1}(x)}{(f^{-1}(x))^4}$

11.196 Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 1$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

β) Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα

γ) Αν η f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια: $\gamma 1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$ $\gamma 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$

11.197 Δίνεται συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$2\eta\mu(x-1) \leq (x-1)f(x) \leq x^2 - 1, \quad x \in (1, 2) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 2$$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $h(x) = f(x) - \frac{1}{x-1} + 1$

β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $g(x) = \frac{1}{f(x) + 1}$ έχει με την ευθεία $y = x - 1$ ένα μόνο κοινό σημείο, με τετμημένη στο $(1, 2)$

11.198 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha^x - 2\alpha, & x \geq 0 \\ \ln(x+1) - \eta\mu 3x, & -1 < x < 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής

β) Για $\alpha = \frac{1}{2}$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha^x + 2 = \ln(x+1)$ έχει ακριβώς μια θετική ρίζα

11.199 Δίνεται συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x - xf(x)}{\sqrt{x+1} - 1} = 4 \quad \text{και} \quad \text{η } C_f \text{ διέρχεται από το σημείο } M(5, 3).$$

α) Να βρείτε το $f(0)$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να δείξετε ότι:

$\gamma 1)$ οι γραφικές παραστάσεις των f και $g(x) = 2$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο

$\gamma 2)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 5)$ στο οποίο η f να είναι ίση με τη μέση τιμή των $f(1), f(2), f(3)$

11.200 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, $(e^x f(x))^2 + (2xe^x)^2 = 1 - 4xe^{2x} f(x)$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^{-x} - 2x$

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $1 - 2xe^x = 2020e^x$

γ) Να λυθεί $e^{2x-e^{-x}} + 4x < e^{-1} - 2 + 2e^{-x}$

δ) Να βρεθεί $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 2x + 2^{-x}}{(f(x) + 2x)^2 + e^{-x}}$

Λ. Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών και Θ.Μ.Ε.Τ.

11.201 Δίνεται η συνεχής $f : [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ Να δείξετε ότι $\exists x_0 \in [2, 5] : 10f(x_0) = 7f(3) + 3f(4)$.

11.202 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\exists \xi \in [0, 3] : f(1) + 2f(2) = 3f(\xi)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαφορικός Λογισμός

12. Η Έννοια της Παραγώγου

A. Ορισμός Παραγωγίσιμης σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη** σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

$$\text{Δηλαδή } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2004-2009)$$

- Η παράγωγος της f στο x_0 συμβολίζεται και με $\frac{df(x_0)}{dx}$
- Αν στην ισότητα $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ θέσουμε $x = x_0 + h \Leftrightarrow h = x - x_0$ τότε έχουμε: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
- Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ίσα.

B. Παράγωγος και Συνέχεια

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 ,
τότε η f είναι και συνεχής στο σημείο αυτό .

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$.

Για $x \neq x_0$ έχουμε : $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$ οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Άρα δείξαμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

(2003–2007 E –2013 E–2018)

● Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα , αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 ,
τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν η f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου
ορισμού της, τότε θα είναι και παραγωγίσιμη στο
σημείο αυτό. (2017)

► Η πρόταση αυτή είναι ψευδής. Πράγματι :

► Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό

αφού: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x} = -1$ ενώ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1$

Γ. Ορισμός Παραγωγίσιμης Συνάρτησης στο (α, β)

Μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη** σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του (α, β)

Δ. Ορισμός Παραγωγίσιμης Συνάρτησης στο $[\alpha, \beta]$

Η f είναι **παραγωγίσιμη** σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R} \quad (2010 \text{ E} - 2013 - 2020)$$

Ε. Ορισμός Πρώτης Παραγώγου

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη.

Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$ ορίζουμε τη συνάρτηση $f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ με $x \rightarrow f'(x)$ η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της f** . (2020)

► Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A ονομάζεται **παραγωγίσιμη στο A** ή απλά **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

Ζ. Παράγωγος Βασικών Συναρτήσεων

Αν $f(x) = c$ τότε $f'(x) = (c)' = 0$

Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε για $x \neq x_0$ έχουμε: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$.

Άρα: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$.

Επομένως η $f(x) = c$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = (c)' = 0$

Αν $f(x) = x$ τότε $f'(x) = (x)' = 1$

Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε για $x \neq x_0$ έχουμε: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

Άρα: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$.

Επομένως η $f(x) = x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = (x)' = 1$

Αν $f(x) = x^v$ τότε $f'(x) = vx^{v-1}$ με $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$

Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε για $x \neq x_0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} = x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}$$

Άρα: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) = x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} = v x_0^{v-1}$.

Επομένως η $f(x) = x^v$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = (x^v)' = vx^{v-1}$

$$\text{Αν } f(x) = \sqrt{x} \text{ τότε } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$$

Αν $x_0 \in (0, +\infty)$ τότε για $x \neq x_0$ έχουμε :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} =$$

$$= \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

$$\text{Άρα: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Επομένως η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$
(2005 E–2009 E)

Η. Κανόνες Παραγωγίσιμης

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Για $x \neq x_0$ έχουμε :

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 έχουμε :

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Δηλαδή $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ **(2020)**

● Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

● Αν f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $c \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

● Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$ τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$

είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Αν $f(x) = x^{-v}$, $v \in \mathbb{N}^*$ τότε $f'(x) = -vx^{-v-1}$

Πράγματι για $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$f'(x) = (x^{-v})' = \left(\frac{1}{x^v}\right)' = \frac{(1)'x^v - 1(x^v)'}{(x^v)^2} = \frac{-vx^{v-1}}{x^{2v}} = -vx^{-v-1}$$

Επομένως η $f(x) = x^{-v}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = (x^{-v})' = -vx^{-v-1}$

Αν $f(x) = \varepsilon\phi x$ τότε $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Πράγματι για $x \in \mathbb{R} - \{x / \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\varepsilon\phi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \end{aligned}$$

Επομένως η $f(x) = \varepsilon\phi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{x / \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$ με $f'(x) = (\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Θ. Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης

● Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Αν $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $x > 0$ τότε $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Πράγματι αν, $y = x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε: $y = e^u$.

$$\text{Άρα: } y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \cdot \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \cdot \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Επομένως η $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

Αν $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ τότε $f'(x) = \alpha^x \cdot \ln \alpha$

Πράγματι αν, $y = \alpha^x = e^{x \cdot \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \cdot \ln \alpha$, τότε έχουμε: $y = e^u$.

Άρα $y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \cdot \ln \alpha} \cdot (x \ln \alpha)' = e^{x \cdot \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \cdot \ln \alpha$.

Επομένως η $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = (\alpha^x)' = \alpha^x \cdot \ln \alpha$

Αν $f(x) = \ln|x|$, $x \neq 0$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{x}$

► Αν $x > 0$ τότε $f(x) = \ln|x| = \ln x$, άρα $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

► Αν $x < 0$ τότε $f(x) = \ln|x| = \ln(-x)$ οπότε θέτουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$ έχουμε $y = \ln u$.

Επομένως: $y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Άρα σε κάθε περίπτωση $f'(x) = \frac{1}{x}$ (2008)

Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων		Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης	
Συνάρτηση	Παράγωγος	Συνάρτηση	Παράγωγος
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	$g(x) = [f(x)]^\alpha$	$g'(x) = \alpha \cdot [f(x)]^{\alpha-1} \cdot f'(x)$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$g(x) = \frac{1}{f(x)}$	$g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
$f(x) = x^a$	$f'(x) = ax^{a-1}$	$g(x) = \sqrt{f(x)}$	$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$g(x) = \eta\mu(f(x))$	$g'(x) = \sigma\upsilon\nu(f(x)) \cdot f'(x)$
$f(x) = \eta\mu x$	$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$	$g(x) = \sigma\upsilon\nu(f(x))$	$g'(x) = -\eta\mu(f(x)) \cdot f'(x)$
$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	$f'(x) = -\eta\mu x$	$g(x) = \varepsilon\phi(f(x))$	$g'(x) = \frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2(f(x))}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$g(x) = \sigma\phi(f(x))$	$g'(x) = -\frac{f'(x)}{\eta\mu^2(f(x))}$
$f(x) = \ln x $	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$g(x) = \alpha^{f(x)}$	$g'(x) = \alpha^{f(x)} \cdot \ln \alpha \cdot f'(x)$
$f(x) = \varepsilon\phi x$	$f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$g(x) = e^{f(x)}$	$g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$f(x) = \sigma\phi x$	$f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$g(x) = \ln f(x) $	$g'(x) = \frac{f'(x)}{f^2(x)}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$		

Κανόνες Παραγώγισης	
Παράγωγος Γινομένου Αριθμού με Συνάρτηση	$(c f(x))' = c f'(x)$
Παράγωγος Αθροίσματος	$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$
Παράγωγος Θροίσματος n - συναρτήσεων	$(f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x))' = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x)$
Παράγωγος Γινομένου	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Παράγωγος Πηλίκου	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Ασκήσεις

A. Εύρεση Παραγώγου με χρήση Ορισμού

12.1 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 2 \\ -x^2 + 9x - 8, & x > 2 \end{cases}$.
Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2

12.2 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$.
Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 (Σχολικό)

12.3 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & x < 0 \\ 2x + \eta\mu x, & x \geq 0 \end{cases}$ Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

12.4 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} - 4, & x \geq 1 \\ x^2 - x - 2, & x < 1 \end{cases}$. Να δείξετε ότι:
α) η f είναι συνεχής στο 1 β) η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1

12.5 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ x - \eta\mu x, & x \geq 0 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

12.6 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0. (Σχολικό)

12.7 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \eta\mu^2 x \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

12.8 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0

12.9 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x}, & 0 < x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$
α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής β) Να βρείτε το $f'(1)$ (Σχολικό)

12.10 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x + \lambda, & x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 8x + 4}{4x}, & x > 1 \end{cases}$
α) Να δείξετε ότι $\lambda = 0$ αν f συνεχής στο 1 β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

12.11 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x+2| - 3x + 1$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο -2.

12.12 Δίνεται η $f(x) = |x^2 - 3x|$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 (Σχολικό)

12.13 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x-1| + 2x$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Differentiable function

Παραγωγίσιμη συνάρτηση

Derivative

Παράγωγος

12.14 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| + 2x - 2$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 2.

12.15 Δίνεται η $f(x) = x^2 + 5|x - 3| + 4x - 1$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 2

12.16 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(h + 2) = 3 \cdot \sinh + h^2 - h, \forall h \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $f(2), f'(2)$

12.17 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(h + 1) = h^2 + 4h + 3, \forall h \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $f(1), f'(1)$

12.18 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1 + h) = 2 + 3h + 3h^2 + h^3, \forall h \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε τα $f(1), f'(1)$ (Σχολικό)

12.19 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(h + 1) = 2\eta\mu h + (h - 1)^2, \forall h \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $f(1), f'(1)$

B. Παράγωγος - Κριτήριο Παρεμβολής

12.20 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\eta\mu x - 3x^2 \leq f(x) \leq \eta\mu x + 5x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

12.21 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\eta\mu^2 x - x^4 \leq xf(x) \leq \eta\mu^2 x + x^4, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε τα $f(0), f'(0)$ (Σχολικό)

12.22 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\eta\mu x - x^2 \leq f(x) \leq \eta\mu x + x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

12.23 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\sinh x - x^2 \leq f(x) + 1 \leq \sinh x + x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

12.24 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x) - \eta\mu x| \leq \sqrt{x^2 + 4} - 2, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και ότι $f'(0) = 1$

12.25 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x) - \eta\mu 2x| \leq \sqrt{x^2 + 1} - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και ότι $f'(0) = 2$

12.26 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x) - \sqrt{x^2 + 5}| \leq (x - 2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να βρείτε το $f'(2)$

12.27 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x) \leq g(x) \leq f(x) + (x - e)^3, \forall x \in \mathbb{R}$.
Αν για την f ισχύει $f'(e) = 3$, να δείξετε ότι $g'(e) = 3$.

Γ. Παράγωγος και Συνέχεια

12.28 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + 1, & x \leq 1 \\ \beta x + 3, & x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

12.29 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 5\beta, & x \leq 1 \\ \alpha + \beta\sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

12.30 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x < \pi \\ \alpha x + \beta, & x \geq \pi \end{cases}$ Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο π .
(Σχολικό)

12.31 Δίνεται $f(x) = \begin{cases} \alpha + \eta\mu x, & x \leq 0 \\ \beta x + \sqrt{x^2 + 4}, & x > 0 \end{cases}$ Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0

12.32 Δίνεται $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \alpha \cdot \eta\mu x + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu x, & x > 0 \end{cases}$ Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

12.33 Δίνεται $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \leq -2 \\ 3x^2 + 5x - \alpha, & x > -2 \end{cases}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο -2 .

12.34 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \alpha^2 \sqrt{x}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x^2 + \beta}{4}, & x \geq 1 \end{cases}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

12.35 Δίνεται $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta - 1, & x < -1 \\ (\alpha - 1)x^2 + 2\beta, & x \geq -1 \end{cases}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο -1

12.36 Δίνεται $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + \alpha, & x \leq 0 \\ e^{\beta x}, & x > 0 \end{cases}$ Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0
(Σχολικό)

12.37 Δίνεται $f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot e^x - x + 1, & x \leq 0 \\ x^2 \cdot \ln x + \beta, & x > 0 \end{cases}$ Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0

12.38 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0. (Σχολικό)

12.39 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η f είναι παραγωγίσιμη (ΘΕΜΑ 2019)

Δ. Παράγωγος και Όρια

12.40 Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0 ώστε $f^3(x) + 8x \cdot \eta\mu x \cdot f(x) = x \cdot \eta\mu^2 3x, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε : α) το $f(0)$ β) το $f'(0)$

12.41 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0 ώστε $f^3(x) + xf^2(x) = x^3 + \eta\mu^3 x, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε την $f'(0)$

12.42 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0 ώστε $f(x) \cdot (x^2 + f^2(x)) = 2x^3, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε : α) το $f(0)$ β) το $f'(0)$

12.43 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 3$, να βρείτε τα $f(1), f'(1)$.

12.44 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2 και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x^2}{x - 2} = 3$, να βρείτε τα $f(2), f'(2)$.

12.45 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 3 και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2-5}-2} = 2$, να βρείτε το $f'(3)$

12.46 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2 και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-x^2+6x}{x-2} = 6$, να βρείτε το $f'(2)$

12.47 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 3 και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-6x}{x^2-9} = 10$

α) Να βρείτε το $f(3)$ β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 3

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-2x^2}{4x^2-12x}$

12.48 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2x}{x^2} = 1$

α) Να βρείτε το $f(0)$ β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+x \cdot \eta \mu x - 2x}{1 - \sigma \upsilon \nu x}$

12.49 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 4 και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-\sqrt{x^2-7}}{x-4} = \frac{2}{3}$

α) Να βρείτε το $f(4)$ β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 4

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + \eta \mu(x-4) - 3}{\sqrt{2x+1} - 3}$

12.50 Έστω συνάρτηση f με $f(2) = 2, f'(2) = -1$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^3(x) - 8}{x^2 - 4}$

12.51 Έστω συνάρτηση f με $f(1) = 2, f'(1) = -1$

Να βρείτε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 2f(x)}{x^2 + x - 2}$ β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x^2 - x}$

12.52 Έστω συνάρτηση f με $f(1) = 2, f'(1) = -1$ Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^3(x) - 3f(x) - 2}{x^2 + x - 2}$

12.53 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0, f'(0) = 1$ β) Να βρείτε το λ ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$

12.54 Έστω συνάρτηση f με $f(2) = 3, f'(2) = 4$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x^2 - 2x}$ β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 9}{x^2 - 4}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 1 - x^2}{x - 2}$ δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2}$

12.55 Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1, f'(1) = 1$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x^2 - 1}$ β) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(1+h) - 1}{h}$ γ) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h) \cdot f(1+h) - 1}{h}$ δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 3f(x) + 2}{x^2 - 3x + 2}$

12.56 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(0) = 5$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(0)}{x}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(x)}{x}$

12.57 Έστω συνάρτηση f με $f'(1) = 2$. Να βρείτε το όριο : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-3h)}{h}$

12.58 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο 1 με $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 2}{h} = 3$. Να βρείτε :

α) το $f'(1)$ β) το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$

12.59 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο 1 με $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) + 3}{h} = 5$. Να βρείτε :

α) το $f'(1)$ β) το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) + x^2 + x + 4}{x^2 - 1}$

12.60 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x^2 - 7x}{x^2 - 2x} = 2$. Να υπολογίσετε :

α) το $f(0)$ β) το $f'(0)$ γ) το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta \mu x}{\sqrt{x+4} - 2}$ δ) το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) \cdot \eta \mu x}$

12.61 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta \mu 2x} = 5$

α) Να βρείτε το $f(0)$ β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0. (**ΘΕΜΑ 2000 Ε**)

Ε. Κανόνες Παραγώγισης

12.62 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

α) $f(x) = e^x + 2x^3 - \ln x$ β) $f(x) = (x^2 + 1)e^x$ γ) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ δ) $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{e^x}$

12.63 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

α) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ β) $f(x) = (x-4) \cdot \ln x - 5$ γ) $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ δ) $f(x) = x \cdot 2^x$

12.64 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

α) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ β) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ γ) $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$ δ) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

12.65 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

α) $f(x) = (5x^2 + 1)^4$ β) $f(x) = \eta \mu^3 x - 3 \ln^2 x$ γ) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$
 δ) $f(x) = e^{x^2 + 3x}$ ε) $f(x) = \sin(x^2 - 2x + 1)$ ζ) $f(x) = \ln(3x^2 - 4)$

12.66 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

α) $f(x) = (x - 3x^2)^4$ β) $f(x) = e^{x^3}$ γ) $f(x) = -2 \ln^2 x$ δ) $f(x) = \sin e^x$
 ε) $f(x) = 4 \eta \mu^3 x$ ζ) $f(x) = 5^{x^2 - 2x}$

12.67 Ομοίως : α) $f(x) = (e^x - x)^3$ β) $f(x) = \sqrt{x - 3 - \ln x}$ γ) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

12.68 Ομοίως : α) $f(x) = (x^2 + x)^x$ β) $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$ γ) $f(x) = x^{\ln x}$ δ) $f(x) = (x^2 + 3)^{\sqrt{x}}$

12.69 Ομοίως : α) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ β) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ (**Σχολικό**)

12.70 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g :

α) $g(x) = f(2x^3 + 7)$ β) $g(x) = f(-3x) + f\left(\frac{4}{x}\right)$ γ) $g(x) = f^3(e^{-4x})$

12.71 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g :

α) $g(x) = f(x^2 + 3x + 1)$ β) $g(x) = x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$ γ) $g(x) = f^2(e^x - x)$

12.72 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$. Να βρείτε την παράγωγο της f .

12.73 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 0 \\ x^3 + x, & x > 0 \end{cases}$. Να βρείτε την παράγωγο της f .

12.74 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 1 \\ 3x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$. Να βρείτε την παράγωγο της f .

12.75 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$. Να βρείτε την παράγωγο της f .

12.76 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} 2\eta\mu x + \sin x, & x \leq 0 \\ x^2 + 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$. Να βρείτε την παράγωγο της f .

12.77 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + \ln x + 1, & 0 < x < 1 \\ x + (x-1)^3, & x \geq 1 \end{cases}$. Να βρείτε την παράγωγο της f .

12.78 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + |x - 2|$. Να βρείτε την παράγωγο της f .

12.79 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$. Να βρείτε την παράγωγο της f .

12.80 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x)$. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.

12.81 Δίνεται η $f(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x - 7)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f'(x) > 0$.

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\sqrt{x+3} - 2}$.

12.82 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x^3$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

12.83 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{e^x}$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.

12.84 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f'(x) < 0$.

β) Να βρείτε τα όρια: $\beta_1) \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ $\beta_2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{\sqrt{x+2} - 2}$ $\beta_3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}$

12.85 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να βρείτε την $(f^{-1})'(1)$

12.86 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να βρείτε την $(f^{-1})'(3)$

12.87 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x + 2$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης

β) Να βρείτε την $(f^{-1})'(1)$

12.88 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 8$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης

β) Να βρείτε την $(f^{-1})'(4)$

12.89 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^5(x) + 3f(x) = x - 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να βρείτε την $(f^{-1})'(1)$

12.90 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x^2) + x \cdot f(x) = 4x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές $f(1), f'(1)$

12.91 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu^2 x$. Να δείξετε ότι $f''(x) + 4f(x) = 2$ (Σχολικό)

12.92 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$. Να δείξετε ότι $x \cdot f''(x) + 2f'(x) = xf(x), x \neq 0$.

12.93 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)$.

α) Να δείξετε ότι $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$. β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

12.94 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{2x}$. Να δείξετε ότι $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 0$.

12.95 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot \ln x$. Να δείξετε ότι $2f(x) - x \cdot f'(x) + x^2 = 0$.

12.96 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

α) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + 1)f''(x) + xf'(x) = f(x)$

12.97 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x}$. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες ισχύει $2f''(x) - 3f(x) = f'(x)$

12.98 Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ 3ου βαθμού ώστε: $P(-1) = -2, P'(1) = P''(-1) = -12, P'''(2020) = 6$

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$

β) Να λύσετε την ανίσωση $P'(x) > 0$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x) - P(1)}{P''(x)}$

12.99 Δίνεται η $f(x) = e^x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$ για την οποία ισχύει $f(0) = -7, f'(0) = -5, f''(0) = -1$

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = -7$

β) Να λύσετε την ανίσωση $f'(x) > 0$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f''(x) + f'(x) = -14e^x$

δ) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{f'(x)}{\sqrt{4-x-3}}$

12.100 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f^2(x) - 1 = e^x(e^x + 2)$ με $f'(0) = -1$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = -e^x - 1$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + 4^x}{3^x + 4^x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 4^x}{3^x + 4^x}$

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f''(x)}{f(x)} = x$ έχει τουλάχιστον μια θετική ρίζα.



Ο Γκότφριντ Βίλχελμ Λάιμπνιτς (1646 - 1716)

ήταν Γερμανός φιλόσοφος, μαθηματικός, διπλωμάτης, φυσικός, ιστορικός, βιβλιοθηκονόμος και διδάκτορας των λαϊκών και εκκλησιαστικών Νομικών. Μιλούσε 7 γλώσσες.

Κατέχει εξέχουσα θέση στην ιστορία των μαθηματικών και της φιλοσοφίας, έχοντας αναπτύξει τον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό, ανεξάρτητα από τον Νεύτωνα.

Ο Λάιμπνιτς ήταν ένας από τους σημαντικότερους φιλοσόφους του 17ου και του 18ου αιώνα και έχει αποκληθεί «ο πολυμαθέστερος άνδρας μετά τον Αριστοτέλη»

13. Εφαπτόμενες

● Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f .

Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως **εφαπτομένη της C_f** στο σημείο της A , την ευθεία που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .

Επομένως η εφαπτομένη αυτή έχει εξίσωση :

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

► Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε δεν ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$

► Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 . Δηλαδή $\lambda = f'(x_0)$

► Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης θα τη λέμε και **κλίση της C_f στο M** ή **κλίση της f στο x_0**

► Η κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε ισούται με την $\varepsilon\varphi\omega$, όπου ω η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

13.17 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x, & x \leq 2 \\ x^3 + 2\alpha x^2 - x + 4, & x > 2 \end{cases}$. Να βρείτε :

- α) την τιμή του πραγματικού αριθμού α
 β) την εφαπτομένη της C_f στο $A(2, f(2))$

13.18 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $3x - 2 \leq f(x) \leq 2x^2 - 5x + 6, \forall x \in \mathbb{R}$.
 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$.

13.19 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $x^2 + 6x \leq f(x) \leq x + 5x, \forall x \in \mathbb{R}$.
 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

13.20 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $2f(x+1) + 2f(1-x) = \sin 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.
 Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$

13.21 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f^3(x) + f(x) - 2x = 8x^3, \forall x \in \mathbb{R}$.
 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

13.22 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(e^x + 1) = e^{2x} + e^x - 3$
 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$

13.23 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(e^{-x}) = x^2 - 2x + 4$.
 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

13.24 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $e^{f(x)} + (x-2)f(x) = x^2 - 8$.
 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(3, f(3))$

13.25 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(2) > 0$. Αν ισχύει $f(f(x)) = x^2 - 3x + 4$,
 να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$

13.26 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x^3) + f(x) = 4 \ln x + 2, x > 0$.
 α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x - 1}$

13.27 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \leq 1 \\ 2\alpha x + 2\beta - 5, & x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε :

- α) τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β
 β) την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$
 γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g με $g(x) = f^2(x) + f(x^3)$ στο σημείο της $B(1, g(1))$

13.28 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$.

- α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
 β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο με τετμημένη 3.

13.29 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη 4.

13.30 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2 και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x^3 - 5}{x - 2} = 7$,
να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$.

13.31 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x + 1}{x - 1} = 0$,
να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

13.32 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2x + 3}{x - 2} = 0$, να βρείτε
την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$.

13.33 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x^2}{\sqrt{x+2} - 2} = 0$, να βρείτε
την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$.

13.34 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x - 1} = 3$,
να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

13.35 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3x - 2011}{\eta\mu 3x} = 0$, να βρείτε:

α) την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$

β) το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x+1) - 2011}{x^2 + x}$

13.36 Δίνεται η $f(x) = x^{\ln x}$. Να βρείτε :

α) την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(e, f(e))$.

β) το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες.

13.37 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{2}{x}}$. Να βρείτε :

α) την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

β) το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες.

13.38 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x + \sin x) = e^x + e^{2x}$. Να βρείτε :

α) την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

β) το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες.

13.39 Δίνεται παραγωγίσιμη f στο $(-1, 1)$ ώστε $f(\eta\mu x) = e^x \sin x, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να δείξετε ότι η
εφαπτομένη της C_f στο $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο (**Σχολικό**)

13.40 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(4) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3x}{x - 1} = 2$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x + 1$ τέμνει την C_f σε σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, 4)$

13.41 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το $M(1, 0)$

13.42 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x + 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $x_0 \in (-2, 0)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το $M(1, 1)$

13.43 Δίνεται η $f(x) = -x^2 + 3x + e^{-x^2}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το $M(0, 2)$

13.44 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α

β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $M(0, f(0))$

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

13.45 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ Να δείξετε ότι ορίζεται εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(0, 1)$, η οποία σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$ (**ΘΕΜΑ 2020**)

B. Να διέρχεται από Γνωστό Σημείο

13.46 Δίνεται η $f(x) = x^2 - 6x + 11$. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το $A(1, 6)$

13.47 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(0, -1)$. (**Σχολικό**)

13.48 Δίνεται η $f(x) = x^2 - x$. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(3, 5)$.

13.49 Δίνεται η $f(x) = \frac{7-2x}{3-x}$. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(3, 0)$

13.50 Δίνεται η $f(x) = x^3 + 1$. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(0, 2)$.

13.51 Δίνεται η $f(x) = x^3 - x$. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(-2, 2)$

13.52 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

13.53 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \ln x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

13.54 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax + 6$, $a \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(4, f(4))$ διέρχεται από το σημείο $K(2, -4)$. Να βρείτε :

α) την τιμή του a

β) τις εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(3, -1)$

Γ. Εφαπτομένη με Γνωστή Κλίση

13.55 Δίνεται η $f(x) = x^3 - 3x + 5$. Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτόμενη είναι :

α) παράλληλη στην ευθεία $y = 9x + 1$ β) κάθετη προς την ευθεία $y = x$ (**Σχολικό**)

13.56 Δίνεται η $f(x) = x^2 - x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι:

α) παράλληλη στην ευθεία $\delta: 3x + y + 5 = 0$

β) κάθετες στη διχοτόμο του 1^{ου} τεταρτημορίου

γ) παράλληλη στον άξονα $x'x$

δ) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135°

13.57 Δίνεται η $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f οι οποίες είναι:

α) παράλληλες στην ευθεία $\delta: 5x - y + 2 = 0$

β) κάθετες στην ευθεία $\zeta: x + y = 0$

13.58 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x \ln x - 2e^2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $\delta: y = 9x + 2018$

13.59 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+1}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $\delta: x - 4y + 12 = 0$

13.60 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x + x^2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $\delta: 2x - y + 1 = 0$

13.61 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \frac{1 + \ln x}{x}$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία $\delta: y = 2x$

13.62 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι παράλληλη προς την διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων.

13.63 Δίνονται οι $f(x) = \frac{1+x^2}{x-1}$, $g(x) = x^2 + \frac{5}{2}x$. Να εξετάσετε αν οι εφαπτόμενες στις γραφικές παραστάσεις των f, g στα σημεία με τετμημένη -1 είναι παράλληλες.

13.64 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + 3$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι κάθετη προς την ευθεία $\delta: x - 5y + 5 = 0$

13.65 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x - x \cdot \ln x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι κάθετη προς την ευθεία $\delta: x + 3y + 5 = 0$

13.66 Δίνεται η $f(x) = e^{x-1} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $x + y - 1 = 0$

13.67 Δίνεται η $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 5$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία 135° .

13.68 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \ln x$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

13.69 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία 45°

13.70 Να βρείτε τα σημεία της C_f , στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$ αν:

α) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ β) $f(x) = \frac{x}{e^x}$ γ) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ (Σχολικό)

13.71 Να βρείτε τα σημεία της C_f , με $f(x) = \eta\mu 2x - 2\eta\mu^2 x$, $x \in [0, 2\pi]$, στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ (Σχολικό)

13.72 Δίνεται η $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Να βρείτε την εξίσωση της οριζόντιας εφαπτόμενης της C_f

13.73 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 12x + 2$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που είναι παράλληλες με τον άξονα $x'x$.

13.74 Δίνεται η συνεχής $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + 1, & x \leq 1 \end{cases}$ Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η

εφαπτόμενη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων στα σημεία αυτά. (ΘΕΜΑ 2018Ε)

Δ. Εύρεση Παραμέτρων στις Εφαπτόμενες

13.75 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}$ με $\alpha \neq 0$. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η κλίση της C_f στο σημείο της $A(0, 1)$ είναι ίση με $\frac{1}{2}$ (Σχολικό)

13.76 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$. Η εφαπτομένη της C_f στο $M(-1, 6)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: 5x + y - 2020 = 0$. Να βρείτε

α) την τιμή των β, γ

β) τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(4, 5)$

13.77 Δίνεται η $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 9x - 12$. Η εφαπτομένη της C_f στο $K(2, -10)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y = -3x + 5$. Να βρείτε:

α) την τιμή των α, β

β) τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία $\delta: 48x - 2y + 6 = 0$.

13.78 Δίνεται η $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 9x - 2$. Η εφαπτομένη της C_f στο $K(2, -10)$ είναι κάθετη στην ευθεία $\delta: x - 3y + 1 = 0$. Να βρείτε την τιμή των α, β

13.79 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + 6$. Η εφαπτομένη της C_f στο $M(4, f(4))$ είναι κάθετη στην ευθεία $\delta: 2x + 6y - 2020 = 0$. Να βρείτε

α) την τιμή του α

β) τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(3, -1)$

13.80 Δίνεται η $f(x) = x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(-1, 6)$ σχηματίζει γωνία με τον άξονα $x'x$, να βρείτε τα α, β .

13.81 Δίνεται η $f(x) = \alpha x^3 - \beta x^2 + 1$. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(-1, 2)$ σχηματίζει γωνία $\frac{3\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$, να βρείτε τα α, β .

13.82 Δίνεται η $f(x) = \frac{3x^2 + (\alpha - 1)x + \beta - 2}{x^2 + x + 2}$. Να βρείτε τα α, β αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η εφαπτομένη της στο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

13.83 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(2, 5)$ έχει εξίσωση $\zeta: y = 7x - 9$. Να βρείτε την τιμή των α, β

13.84 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ έχει εξίσωση $\zeta: y = 2x + 6$. Να βρείτε την τιμή των α, β

13.85 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ για τις οποίες η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ και εφάπτεται της ευθείας $y = x$ στην αρχή των αξόνων
(Σχολικό)

13.86 Δίνεται η $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 3$. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(2, f(2))$ έχει εξίσωση $\zeta: y = -3x - 1$. Να βρείτε :

α) την τιμή των α, β

β) τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία $\delta: 12x - 2y + 2020 = 0$.

13.87 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(-3, f(-3))$ έχει εξίσωση την $\zeta: y = -4x - 8$. Να βρείτε :

α) την τιμή των α, β

β) τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(-1, -1)$

13.88 Δίνεται η $f(x) = x^2 + 2\kappa x + 3\kappa + 4$. Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να εφάπτεται στον άξονα $x'x$

13.89 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση στο $A(4, f(4))$ έχει εφαπτομένη την ευθεία $y = x - 1$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f^2(x) - 9}{\sqrt{x} - 2}$.

13.90 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta$. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, 1)$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y = -x + 2$. Να δείξετε ότι $\alpha = -1, \beta = 2$ (ΘΕΜΑ 2019)

Ε. Κοινές Εφαπτομένες

13.91 Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}$ στο κοινό τους σημείο $A(1, 1)$, είναι κάθετες (Σχολικό)

13.92 Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2 - x + 1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο οι εφαπτόμενες είναι κάθετες (Σχολικό)

13.93 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^2 - 7x + 7$ και $g(x) = x^2 - 3x + 3$. Να αποδείξετε ότι οι C_f , C_g στο κοινό τους σημείο έχουν κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

13.94 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 - 3x + 4$ και $g(x) = 3(x^2 - x)$. Να αποδείξετε ότι οι C_f , C_g στο κοινό τους σημείο έχουν κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

13.95 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{4}{x}$ και $g(x) = 6 - 2x^2$. Να αποδείξετε ότι οι C_f , C_g στο κοινό τους σημείο έχουν κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση

13.96 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -2x^2 + 3x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να αποδείξετε ότι οι C_f , C_g στο κοινό τους σημείο έχουν κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

13.97 Δίνεται η $f(x) = x^2 - 2x + 8$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x + 4$ εφάπτεται στη C_f

13.98 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = -x^2 - x$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(0, 1)$ εφάπτεται και στην C_g (Σχολικό)

13.99 Δίνεται η $f(x) = x^2 + \alpha \cdot \ln x + 3$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(2, f(2))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. Να βρείτε :

α) τον αριθμό α

β) το $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $y = -6x + \beta$ να εφάπτεται στη C_f

13.100 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 3$ και $g(x) = x^2 - \alpha x - \beta$. Να βρείτε τα α , β ώστε οι C_f , C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο τους με τετμημένη $x_0 = 1$.

13.101 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 2$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τα α , β ώστε οι C_f , C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο τους με τετμημένη $x_0 = 1$. (Σχολικό)

13.102 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 - x + \alpha$ και $g(x) = \beta x^2 - 2\alpha x + \beta$. Να βρείτε τα α , β ώστε οι C_f , C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο τους με τετμημένη $x_0 = 1$

13.103 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x \cdot \ln x$ και $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + 1$. Να βρείτε τα α , β ώστε οι C_f , C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο τους με τετμημένη $x_0 = 1$.

13.104 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ και $g(x) = \alpha x^2 + 2\beta x + 2$. Να βρείτε τα α, β ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο τους με τετμημένη $x_0 = 1$.

13.105 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -2x^2 + \alpha x$ και $g(x) = -x^2 + (\alpha - 4)x + 4, \alpha \in \mathbb{R}$.

Οι εφαπτόμενες των C_f, C_g στα σημεία τους $A(1, f(1))$ και $B(1, g(1))$ είναι αντίστοιχα κάθετες.

α) Να βρείτε τον αριθμό α

β) Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν σε κοινό τους σημείο κοινή εφαπτομένη, την οποία να βρείτε.

14. Ρυθμός Μεταβολής

A. Ορισμός Ρυθμού Μεταβολής

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$

B. Ευθύγραμμη Κίνηση

● Αν ένα σώμα κινείται σε έναν ευθύγραμμο άξονα και η θέση του πάνω σε αυτόν δίνεται από μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $x(t)$, τότε :

- ① Η **στιγμιαία ταχύτητα $v(t_0)$** του σώματος τη χρονική στιγμή t_0 είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής της μετατόπισης τη χρονική στιγμή t_0 . Δηλαδή : $v(t_0) = x'(t_0)$
- ② Η **στιγμιαία επιτάχυνση $a(t_0)$** του σώματος τη χρονική στιγμή t_0 είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας τη χρονική στιγμή t_0 . Δηλαδή : $a(t_0) = v'(t_0) = x''(t_0)$
- ③ Το σώμα είναι **στιγμιαία ακίνητο** τις χρονικές στιγμές t_0 για τις οποίες ισχύει $v(t) = 0$, κινείται προς τη **θετική φορά** όταν $v(t) > 0$ και προς την **αρνητική φορά** όταν $v(t) < 0$.

Γ. Προβλήματα Οικονομίας

● Στην Οικονομία, το κόστος παραγωγής K , η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος.

Έτσι η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει τον ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ και λέγεται **οριακό κόστος στο x_0** .

Ανάλογα η παράγωγος $E'(x_0)$ λέγεται **οριακή είσπραξη στο x_0** , ενώ η παράγωγος $P'(x_0)$ λέγεται **οριακή κέρδος στο x_0** .

Ασκήσεις

Rate of change

Ρυθμός μεταβολής

14.1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής :

α) της f ως προς x στο σημείο $x_0 = 1$

β) του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $M(x, f(x))$ ως προς x στο $x_0 = 2$

14.2 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x$.

α) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής :

α1) της f ως προς x στο σημείο $x_0 = 0$

α2) του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $M(x, f(x))$ ως προς x στο $x_0 = 1$

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x είναι θετικός και για ποιες είναι αρνητικός ;

14.3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 8x - 9$. Να βρείτε τον αριθμό a αν ο αριθμός μεταβολής της f ως προς x , όταν $x = 2$ είναι 12.

14.4 Η θέση $x(t)$ ενός υλικού σημείου που κινείται πάνω σε άξονα, δίνεται από τη σχέση :

$x(t) = 2t^3 - 12t^2 + 18t - 5$, $t \in [0, 4]$ ο χρόνος σε s . Να βρείτε :

α) την ταχύτητα και την επιτάχυνση του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή $t = 2 s$

β) ποιες χρονικές στιγμές το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο

γ) σε ποια χρονικά διαστήματα κινείται προς τη θετική κατεύθυνση και σε ποια προς την αρνητική

δ) το ολικό διάστημα που διένυσε το σημείο κατά τα πρώτα 4 s

14.5 Η θέση $x(t)$ ενός υλικού σημείου που κινείται πάνω σε άξονα, δίνεται από τη σχέση :

$x(t) = -t^3 + 12t^2 - 36t$, t ο χρόνος σε s . Να βρείτε :

α) την ταχύτητα και την επιτάχυνση του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή $t = 1 s$

β) ποιες χρονικές στιγμές το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο

γ) σε ποια χρονικά διαστήματα κινείται προς τη θετική κατεύθυνση και σε ποια προς την αρνητική

δ) το ολικό διάστημα που διένυσε το σημείο κατά τα πρώτα 7 s

14.6 Η θέση $x(t)$ ενός υλικού σημείου που κινείται πάνω σε άξονα, δίνεται από τη σχέση :

$x(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 6$, $t \geq 0$ ο χρόνος σε s . Να βρείτε :

α) την ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = 3 s$

β) τη χρονική στιγμή κατά την οποία η ταχύτητα του σημείου είναι $-3 m/s$

γ) ποιες χρονικές στιγμές το σημείο είναι ακίνητο

δ) την επιτάχυνση τη χρονική στιγμή $t = 2 s$

ε) σε ποια χρονικά διαστήματα κινείται προς τη θετική κατεύθυνση και σε ποια προς την αρνητική

στ) το ολικό διάστημα που διένυσε το σημείο κατά τα πρώτα 10 s

14.7 Δίνονται τα σημεία $A(x, 4)$, $B(-1, x + 7)$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων A και B ως προς x , όταν $x = 5$.

14.8 Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ έχει περίμετρο 14 cm και η πλευρά του AB έχει μήκος x cm. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του $ABΓΔ$ ως προς x , όταν $x = 5$.

14.9 Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος διπλάσιο του πλάτους του. Αν το εμβαδόν του αυξάνεται με ρυθμό $5 \text{ cm}^2/\text{s}$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του πλάτους του τη χρονική στιγμή που αυτό ισούται με 6 cm .

14.10 Η ακτίνα ενός κύκλου αυξάνεται με ρυθμό 10 μον/s . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του κυκλικού δίσκου τη χρονική στιγμή που η ακτίνα του είναι ίση με 10 μον .

14.11 Το εμβαδόν ενός κύκλου μειώνεται με ρυθμό $4\pi \text{ cm}^2/\text{s}$. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μήκος του κύκλου είναι 3 cm , να βρείτε τον ρυθμό :

α) με τον οποίο μεταβάλλεται η ακτίνα β) της περιμέτρου του κύκλου

14.12 Δίνεται τρίγωνο OAB που ορίζουν τα σημεία $O(0, 0)$, $A(2x, 0)$, $B(0, e^x)$, $x > 0$. Αν το x αυξάνει με ρυθμό 2 cm/s , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου, όταν $x = 1 \text{ cm}$.

14.13 Δίνεται τρίγωνο OAB που ορίζουν τα σημεία $O(0, 0)$, $A(x, 0)$, $B(0, \ln x)$, $x > 1$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 4 cm/s , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου, όταν $x = e^2 \text{ cm}$.

14.14 Δίνεται τρίγωνο OAB που ορίζουν τα σημεία $O(0, 0)$, $A(x, 0)$, $B(0, \ln x)$, $x > 1$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 4 cm/s , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου, όταν $x = 5 \text{ cm}$. (Σχολικό)

14.15 Δίνεται τρίγωνο OAB που ορίζουν τα σημεία $O(0, 0)$, $A(x, 0)$, $B(0, xe^x)$, $x > 0$. Αν το x αυξάνει με ρυθμό 1 cm/s , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου, όταν $x = \ln 2 \text{ cm}$.

14.16 Η πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου μεταβάλλεται με ρυθμό 5 cm/s . Τη χρονική στιγμή κατά την οποία η πλευρά του είναι 20 cm , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου και του εμβαδού.

14.17 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, το οποίο η βάση $B\Gamma = 8\text{ cm}$, ενώ οι ίσες πλευρές του αυξάνονται με ρυθμό 3 cm/s . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου, τη στιγμή που οι ίσες πλευρές του είναι ίσες με 5 cm .

14.18 Το ύψος ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ με σταθερή βάση $B\Gamma=16\text{ cm}$ μεταβάλλεται με ρυθμό 5 cm/s . Αν τη χρονική στιγμή t_0 το σημείο A απέχει από την πλευρά $B\Gamma$ απόσταση 6 cm , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

α) των ίσων πλευρών

β) του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$

14.19 Η πλευρά ενός τετραγώνου $\alpha(t)$ σε cm τη χρονική στιγμή $t > 0$ (σε s) ενός τετραγώνου δίνεται από την σχέση $\alpha(t) = t^2 + 2t + 3$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τετραγώνου, τη χρονική στιγμή που η πλευρά του είναι 11 cm.

14.20 Το εμβαδό ενός τετραγώνου αυξάνεται με ρυθμό $24 \text{ cm}^2/\text{s}$ τη χρονική στιγμή που η πλευρά του είναι 4 cm . Σε αυτή τη χρονική στιγμή, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της διαγωνίου του τετραγώνου

14.21 Το μήκος ενός ορθογωνίου αυξάνεται με ρυθμό 10 cm/min και το πλάτος του ελαττώνεται με ρυθμό 6 cm/min . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

α) του εμβადού του ορθογωνίου τη χρονική στιγμή t_0 που το μήκος του είναι 4 cm και το πλάτος του είναι 2 cm

β) της διαγωνίου του ορθογωνίου τη στιγμή που το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο εμβαδού 9 cm^2

14.22 Το μήκος ενός ορθογωνίου μειώνεται με ρυθμό 1 cm/s και το πλάτος του αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s . Κάποια χρονική στιγμή t_0 το μήκος του είναι 8 cm και το πλάτος του 6 cm .

Τη χρονική στιγμή t_0 , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής :

α) της περιμέτρου του ορθογωνίου

β) του εμβαδού του ορθογωνίου

γ) της διαγωνίου του ορθογωνίου

14.23 Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = 2x^2 + 1$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του ισούται με -1

14.24 Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x \cdot e^x$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 3 cm/s . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του ισούται με 1

14.25 Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \ln(x^2 + 1)$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του ισούται με 1

14.26 Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/s . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης του σημείου M από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του ισούται με 0

14.27 Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Καθώς περνάει από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μον/s . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A **(Σχολικό)**

14.28 Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$. Τη χρονική στιγμή t_0 που το σημείο M περνάει από το σημείο $(1, 1)$ η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής :

α) της τεταγμένης του M τη χρονική στιγμή t_0

β) της απόστασης του M από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή t_0

14.29 Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \frac{2}{x}$, $x > 0$. Τη χρονική στιγμή t_0 που το σημείο M περνάει από το σημείο $(2, 1)$ η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 4 cm/s . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής :

α) της τεταγμένης του M τη χρονική στιγμή t_0

β) της απόστασης του M από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή t_0

14.30 Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 4 m/s . Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η τετμημένη του M είναι 3 m Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής :

α) της τεταγμένης του M

β) της απόστασης του M από το σημείο $K(2, 0)$

14.31 Ένα κινητό K κινείται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $y = \frac{x^3 + 2}{6}$

α) Τη χρονική στιγμή που το κινητό βρίσκεται στο σημείο $A(-2, -1)$, η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 μον/s. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του κινητού τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο A .

β) Υποθέτουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού είναι πάντα θετικός.

Να βρείτε σε ποια σημεία της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι οκταπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης.

14.32 Ένα κινητό K ξεκινά από την αρχή των αξόνων O και κινείται κατά μήκος της παραβολής $y = x^2 + 2x$ έτσι, ώστε η τετμημένη του x να αυξάνεται με ρυθμό 2 μον/s.

Η προβολή του σημείου K πάνω στον άξονα x είναι το σημείο A

α) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAK , όταν το σημείο K έχει τετμημένη ίση με $\frac{1}{2}$.

β) Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του K είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του x ;

14.33 Ένα κινητό ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$. Να βρείτε σε ποιο σημείο M της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του M είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$, αν υποθεθεί ότι $y'(t) > 0$, $t \geq 0$

14.34 Ένα κινητό ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \frac{1}{4}x^2$, $x \geq 0$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$, $\forall t \geq 0$ (Σχολικό)

14.35 Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x^3 + 17}$, $x \geq 0$. Όταν το σημείο βρίσκεται στην θέση $(2, 5)$, η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του τη στιγμή που το σημείο βρίσκεται στην θέση $(2, 5)$

14.36 Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^{x-1} + x$ ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 3 m/min. Αν τη χρονική στιγμή t_0 η τεταγμένη του είναι ίση με 2, τότε να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη στιγμή t_0

14.37 Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^{x-1} + \ln x$, $y \geq 0$ ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2 m/min. Αν τη χρονική στιγμή t_0 η τεταγμένη του είναι ίση με 1, τότε να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη στιγμή t_0

14.38 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$ και A σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτόμενη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης

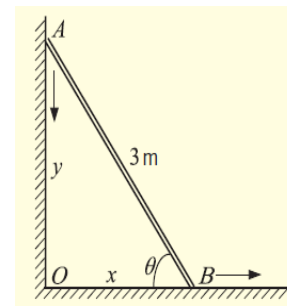
β) Αν ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της C_f και καθώς περνάει από το A η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό 3 μον/s, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη χρονική στιγμή που το M περνάει από το A .

14.39 Μια σκάλα μήκους 3 m είναι τοποθετημένη σε έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλιστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,1 m/s. Τη χρονική στιγμή t_0 που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5 m, να βρείτε :

α) το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ

β) την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή A της σκάλας.

(Σχολικό)



14.40 Ένα σημείο M ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 < 0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq x_0$, με $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \geq 0$ και f κυρτή συνάρτηση. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου M είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$, αν $x'(t) > 0$, $\forall t \geq 0$. (ΘΕΜΑ 2014)

14.41 Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$, $x \geq 0$, με $x = x(t)$, $y = y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$, $\forall t \geq 0$. (ΘΕΜΑ 2016 Ε)

14.42 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + x, & x < 1 \end{cases}$ Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq 1$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3, 10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μον/s. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου MOK τη χρονική στιγμή t_0 , με $K(x, 0)$ (ΘΕΜΑ 2019)

14.43 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ Ένα σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha \leq 0$

κινείται στη C_f και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του M δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}$

Η εφαπτόμενη της C_f στο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1 (ΘΕΜΑ 2020)

15. Θεώρημα Rolle

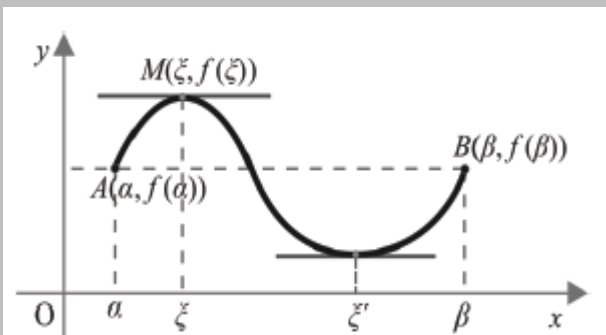
A. Διατύπωση Θεωρήματος Rolle

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- ▶ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$,
 - ▶ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
 - ▶ $f(\alpha) = f(\beta)$,
- τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$ (2012 E)

B. Γεωμετρική Ερμηνεία Θεωρήματος Rolle

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .



(2007 E)

Ασκήσεις

A. Τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$

15.1 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 = 4x + 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1, 0)$.

15.2 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 + 3x^2 + 1 = 6x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$

15.3 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4\alpha x^3 + 2\beta x = \alpha + \beta$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$.

15.4 Ομοίως η εξίσωση $2017x^{2016} - 2016(\alpha + 1)x^{2015} + \alpha = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$.

15.5 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - 3ex^2 + 6x - 2 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$

15.6 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - 3ex^2 + 4x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$

15.7 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(1) - f(0) = e$. Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $f'(x) - 2x = e^x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$

β) η εξίσωση $\frac{f'(x)}{x} + 3x = \frac{e}{x} + 2$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$

15.8 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 2 \cdot (f(1) - f(0)) \cdot x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$

15.9 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(1) = f(2) - \frac{3}{2}$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$

15.10 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 2 και τον άξονα $x'x$ στο $\frac{\pi}{4}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sin^2 x \cdot f'(x) + \sqrt{2} \sin^3 x + 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \frac{\pi}{4})$.

15.11 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x \cdot f(x) + (x^2 - 4) \cdot f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

15.12 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 10$, $f(3) = 12$. Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (1, 3) : f'(\xi) = 2\xi - 3$.

15.13 Δίνεται f συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με $f(2) - f(0) = 6$.

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (0, 2) : f'(\xi) = 3\xi^2 - \xi$.

15.14 Δίνεται f συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $f(1) - f(0) = 1$.

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (0, 1) : f'(\xi) = \frac{3\xi^3 - 2\xi^2 + \xi}{\xi}$

15.15 Δίνεται f συνεχής στο $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με $f(2) - f(1) = 3 - \ln 2$.

Να δείξετε ότι: $\exists x_0 \in (1, 2) : x_0 \cdot f'(x_0) = 2x_0^2 - 1$.

15.16 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) - f(4) = 14$.

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (1, 4) : 2\sqrt{\xi} \cdot f'(\xi) = 1 - 4\xi\sqrt{\xi}$.

15.17 Δίνεται παραγωγίσιμη και άρτια $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι : $\exists \xi \in (-2, 2) : f'(\xi) = 2\xi \cdot e^{\xi^2}$

15.18 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Να δείξετε ότι : $\exists x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : f'(x_0) = x_0 \cdot \eta\mu x_0 - \sigma\upsilon\nu x_0$.

15.19 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = e^2 - e$, $f(2) = \frac{e^2}{2}$

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (1, 2) : \xi^2 \cdot f'(\xi) + e^{\xi} \cdot \xi - e^{\xi} = 0$.

15.20 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(1) - f(e) = \frac{1}{e}$. Να δείξετε ότι : $\exists x_0 \in (1, e) : x_0^2 \cdot f'(x_0) + 1 - \ln x_0 = 0$.

15.21 Δίνεται παραγωγίσιμη $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (1, 2) : (\xi - 1) \cdot f'(\xi) + f(\xi) = f(2)$

15.22 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x^2 - x)\sigma\upsilon\nu x = (1 - 2x)\eta\mu x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$

15.23 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = \frac{2x \cdot f(x)}{1 - x^2}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$

15.24 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : f'(\xi) = \frac{\sigma\upsilon\nu \xi - f(\xi)}{\xi}$

15.25 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x - 2) \cdot f'(x) + f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

15.26 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$

Να αποδείξετε ότι $\exists \xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{2 - \xi}$

15.27 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{2\xi}{4 - \xi^2} f(\xi)$

15.28 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και ισχύει $f(0) = f(1) = 0$.

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (0, 1) : \frac{f'(\xi)}{\eta\mu \xi} - \frac{f(\xi)}{\sigma\upsilon\nu \xi} = 0$

15.29 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $f(x) \neq 0, \forall x \in (0, \pi)$.

Να δείξετε ότι $\exists x_0 \in (0, \pi) : \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} + \sigma\phi x_0 = 0$.

15.30 Δίνεται παραγωγίσιμη f στο $[0, 1]$, $f(1) = 1$ Να δείξετε ότι: $\exists x_0 \in (0, 1) : f'(x_0) = 3 - \frac{2}{x_0} f(x_0)$

15.31 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(6) = 3f(2)$.

Να αποδείξετε ότι $\exists \xi \in (2, 6) : \xi f'(\xi) = f(\xi)$.

15.32 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(2) = 2f(1)$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \cdot f'(x) - f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

15.33 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $2f(0) = f(1)$.

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (0, 1): f'(\xi) = \frac{2\xi}{\xi^2 + 1} \cdot f(\xi)$.

15.34 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ με $\alpha > 0$ και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

Να αποδείξετε ότι $\exists \xi \in (\alpha, \beta): \xi f'(\xi) = 2f(\xi)$.

15.35 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$.

Να αποδείξετε ότι $\exists \xi \in (-1, 1): f'(\xi) = \left(\frac{1}{1-\xi} - \frac{1}{1+\xi}\right) f(\xi)$.

15.36 Δίνεται συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow (0, +\infty)$ συνεχής με $0 < \alpha < \beta$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύουν $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ και $f(\beta) = \frac{1}{\beta}$. Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (\alpha, \beta): \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{1}{\xi} = 0$

15.37 Δίνεται συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow (0, +\infty)$, παραγωγίσιμη και ισχύει $\ln f(\beta) - \ln f(\alpha) = \beta - \alpha$

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (\alpha, \beta): f'(\xi) = f(\xi)$

15.38 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = e^6 \cdot f(3)$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) + 3f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 3)$.

15.39 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = e^2 \cdot f(1)$.

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (0, 1): f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$

15.40 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = f(2) = 0$

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (1, 2): f'(\xi) - f(\xi) = 0$

15.41 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(3) = f(4) = 0$

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (3, 4): f'(\xi) + 3\xi^2 f(\xi) = 0$

15.42 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $f(0) = f(\pi)$.

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (0, \pi): f'(\xi) + f(\xi) \sin \xi = 0$

15.43 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ Να αποδείξετε ότι

η εξίσωση $f'(x) + \sin x \cdot f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α, β)

15.44 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\frac{f(2)}{f(1)} = \sqrt{e}$, $f(x) > 0$

Να αποδείξετε ότι: $\exists \xi \in (1, 2): \xi^2 \cdot f'(\xi) = f(\xi)$.

15.45 Δίνεται παραγωγίσιμη και άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (-2, 2): f'(\xi) + 2\xi f(\xi) = 0$

15.46 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι $\exists x_0 \in (\alpha, \beta): f''(x_0) + (f'(x_0))^2 = 0$.

15.47 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση h στο $[0, 1]$ ώστε να ισχύει $h^2(0) + h^2(1) = 0$.

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (0, 1): h'(\xi) = -2015 \cdot h(\xi)$.

15.48 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Να δείξετε ότι: $\exists \xi \in (0, 1) : 3f'(\xi) = \frac{4}{1 + f^2(\xi)}$.

15.49 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 2$, $f(0) = 1$.

Να δείξετε ότι: $\exists \xi \in (0, 1) : 2f'(\xi) \cdot (f(\xi) - 1) = 3\xi^2$.

15.50 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^2(\alpha) - f^2(\beta) = \alpha^2 - \beta^2$.

Να αποδείξετε ότι: $\exists \xi \in (\alpha, \beta) : f(\xi) \cdot f'(\xi) = \xi$

15.51 Δίνεται f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[0, 1]$ με $f(1) = ef(0)$ και $f(x) > 0 \ \forall x \in [0, 1]$.

Να αποδείξετε ότι $\exists \xi \in (0, 1) : f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{2\sqrt{\xi}}$

15.52 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$

με $\frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(1)} = 1$. Αν $f(x) \neq 0, \forall x \in [0, 1]$ να δείξετε ότι: $\exists x_0 \in (0, 1) : f'(x_0) = 2x_0 \cdot f^2(x_0)$.

15.53 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και $f(1) = \ln 2$.

Να δείξετε ότι: $\exists x_0 \in (0, 1) : f'(x_0) = 2x_0 \cdot e^{-f(x_0)}$.

15.54 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$.

Να δείξετε ότι $\exists x_0 \in (0, 1) : f'(x_0) = e^{x_0 - f(x_0)}$.

15.55 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [-1, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ ώστε να ισχύει $f(-1) = f(1)$.

Να αποδείξετε ότι $\exists \xi \in (-1, 1) : f'(\xi) \cdot \sin f(\xi) = 2\xi^3$.

15.56 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [-1, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(-1) = f(1)$.

Να αποδείξετε ότι $\exists \xi \in (-1, 1) : f'(\xi) e^{f^2(\xi)} = \frac{\xi}{f(\xi)}$

15.57 Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[2, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$

και ισχύει $f(3) = 2f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$.

15.58 Έστω f παραγωγίσιμη στο $[2, 3]$, και ισχύει $2f(3) = 3f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_f , ώστε η εφαπτομένη να περνά από την αρχή των αξόνων.

15.59 Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$

και ισχύει $f(0) = f(1) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να διέρχεται από το σημείο $A(\xi + 1, 2f(\xi))$.

15.60 Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[1, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$

και ισχύει $3f(1) = f(3)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

15.61 Δίνεται παραγωγίσιμη $g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ όπου f παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$

με $f(2) = 4f(1)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

15.62 Δίνεται παραγωγίσιμη f στο $[\alpha, \beta]$ με $\alpha > 0$ και $\beta \cdot f(\alpha) - \alpha \cdot f(\beta) = 0$. Να δείξετε ότι :

α) $\exists x_0 \in (\alpha, \beta) : f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$

β) υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

15.63 Δίνεται παραγωγίσιμη $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

Να αποδείξετε ότι $\exists \xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right) : f'(\xi) = -f(\xi)$. (ΘΕΜΑ 2004)

15.64 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f'(0) = 2f(0)$, $f'(2) = 2f(2) + 12e^4$. Να αποδείξετε ότι :

α) η $g(x) = 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}$, $0 \leq x \leq 2$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0, 2]$

β) $\exists \xi \in (0, 2) : f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi)$ (ΘΕΜΑ 2009 Ε)

15.65 Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 2012$, να αποδείξετε ότι $\exists x_0 \in (x_1, x_2) : f'(x_0) + f(x_0) = 2012$ (ΘΕΜΑ 2012)

Β. Το Πολύ Μια Ρίζα

15.66 Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^5 - 5x + \alpha = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(-1, 1)$.

15.67 Να δείξετε ότι η εξίσωση $2\ln x = 2 - x$ έχει το πολύ μια ρίζα

15.68 Δίνεται παραγωγίσιμη $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f^2(x) + 4f(x) - 2x = e^x - 3, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα το πολύ σημείο.

15.69 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(2) = 2f(1)$ και $f''(x) \neq 0, \forall x \in (1, 2)$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x f'(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1, 2)$.

Γ. Γενικές - Συνδυαστικές Ασκήσεις στο Rolle

15.70 Δίνεται η $f(x) = (1 - 2\alpha) \cdot \ln x - 2\alpha x + 2$. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο $[1, e]$

15.71 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\alpha + 1)x + 3\alpha - 5, \alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο $[2, 4]$

β) Για την τιμή του α που βρήκατε, να βρείτε $x_0 \in (2, 4) : f'(x_0) = 0$

15.72 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - 3\alpha x - 11, \alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο $[-3, 3]$

β) Για την τιμή του α που βρήκατε, να βρείτε $x_0 \in (-3, 3) : f'(x_0) = 0$

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2 - 1}$

δ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta: 12x + y - 2021 = 0$

15.73 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4, & -1 \leq x < 0 \\ -7x^2 + 4x + 4, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν ισχύει το Rolle στο $[-1, 1]$

15.74 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - 4x + 1, & -2 \leq x < 0 \\ x^2 + (\beta - 2)x + 1, & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο $[-2, 4]$

15.75 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x < 0 \\ 3 + (\gamma - \alpha)x, & x \geq 0 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο $[-1, 1]$

15.76 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \leq 0 \\ \gamma x^2 + 4x + 4, & x > 0 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο $[-1, 1]$

15.77 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - 3x + 1, & x < 0 \\ x^2 + \beta x - \gamma, & x \geq 0 \end{cases}$. Να βρείτε :

α) τις τιμές των α, β, γ ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο $[-1, 1]$

β) ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 1) : f'(x_0) = 0$

15.78 Δίνεται $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f^5(x) + (f \circ f)(x) = x^5 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α) η f είναι 1-1

β) η εξίσωση $f(6x^5 + 4(\alpha - 1)x^3) = f(\alpha + 2\beta - 4\beta x)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0, 1)$.

15.79 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

α) η f είναι 1-1

β) η εξίσωση $f(4x^3 + 3(\alpha - 3)x^2) - f(2(3\alpha + \beta)x - 3\beta) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0, 3)$.

15.80 Δίνεται 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0, f(\beta) = 0$.

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (\alpha, \beta) : f''(\xi) = 0$

15.81 Δίνεται 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x στα σημεία με τετμημένες $1, 2, 3$. Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (1, 3) : f''(\xi) = 0$

15.82 Δίνεται 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[-2, 2]$ με $f(1) = 0$ και $g(x) = f(x)(x^2 - 4)$

Να αποδείξετε ότι $\exists \xi \in (-2, 2) : g''(\xi) = 0$

15.83 Δίνεται 3 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = f(6)$ και $f'(2) = f'(6) = 0$.

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (2, 6) : f'''(\xi) = 0$

15.84 Δίνεται 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1, f(1) = e - 1, f(2) = e^2 - 8$.

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (0, 2) : f''(\xi) + 6\xi = e^\xi$

15.85 Δίνεται 2 φορές παραγωγίσιμη $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1, f(2) = 4 - \ln 2, f(e) = e^2 - 1$.

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (1, e) : f''(\xi) - 2 = \frac{1}{\xi^2}$

15.86 Δίνεται 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η ευθεία $y = 2016$ τέμνει την C_f στα σημεία με τετμημένες $1, 2, 3$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει 2 τουλάχιστον ρίζες στο $(1, 3)$

β) $\exists \xi \in (1, 3) : f''(\xi) = f'(\xi)$.

15.87 Δίνεται 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = f(1)$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\exists x_0 \in (0, 1) : f'(x_0) = 0$.

β) $\exists \xi \in (0, 1) : 2 \cdot f'(\xi) + \xi \cdot f''(\xi) = 0$.

15.88 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύει $f(3) - f(0) = 9$, $f'(0) > 0$. Να αποδείξετε ότι :

α) $\exists x_0 \in (0, 3) : f'(x_0) = x_0^2$.

β) $\exists \xi \in (0, 3) : f'(\xi) = 3\xi$.

15.89 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(0) = -1, f(1) = 2, f(2) = 0$.
Να αποδείξετε ότι $\exists x_0 \in (0, 2) : f'(x_0) = 0$

15.90 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(3) < 0 < f(4)$ και $f(4) \cdot f(5) < 0$.
Να αποδείξετε ότι η C_f έχει μια τουλάχιστον εφαπτομένη παράλληλη προς τον άξονα $x'x$

15.91 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(0) = 0, f(5) = 5, f(6) = 2$. Να δείξετε ότι

α) υπάρχει $x_0 \in (0, 5) : f(x_0) = 2$

β) $\exists \xi \in \mathbb{R} : f'(\xi) = 0$

15.92 Έστω f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με: $f(x) \geq \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$ και η γραφική παράσταση της f' εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στα σημεία α και β , με $\alpha < \beta$. Να δείξετε ότι :

α) $f(\alpha) = f(\beta)$

β) υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta) : f'(x_0) = 0$

γ) υπάρχουν δύο τουλάχιστον $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f''(x_1) = f''(x_2) = 0$

δ) $\exists \xi \in (\alpha, \beta) : f'''(\xi) = 0$

15.93 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(3) = \frac{f(1) + f(2)}{2}$, $f(1) \neq f(2)$. Να δείξετε ότι :

α) $\exists \xi \in (1, 2) : 2f(\xi) = f(1) + f(2)$

β) $\exists x_0 \in (1, 3) : f'(x_0) = 0$.

15.94 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $1 < f(x) < 2 \quad \forall x \in [1, 2], f'(x) \neq 0, \forall x \in [1, 2]$.
Να δείξετε ότι :

α) υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 2) : f(x_0) = x_0$.

β) η εξίσωση $x f'(x) + f(x) = f'(x) + 2x - 1$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1, 2)$.

15.95 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 - 2x) = f(x - 2)$.

γ) Αν η C_f διέρχεται από τα $A(1, 3)$ και $B(-2, 9)$, να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(f(x) - 6) = 1$.

15.96 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f''(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

α) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ 2 ρίζες

β) η συνάρτηση f' αντιστρέφεται

γ) αν επιπλέον ισχύει $f(1) = e^2 f(0)$, τότε η εξίσωση $f'(x) = 2f(x)$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, 1)$

δ) η γραφική παράσταση της $(f')^{-1}$ τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ένα το πολύ σημείο

15.97 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $xf(x) + 1 = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \cdot \ln x \cdot f(x)]$

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $(\xi^2 - \xi) \cdot f'(\xi) = (1 - 2\xi) f(\xi)$

15.98 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με συνεχή δεύτερη

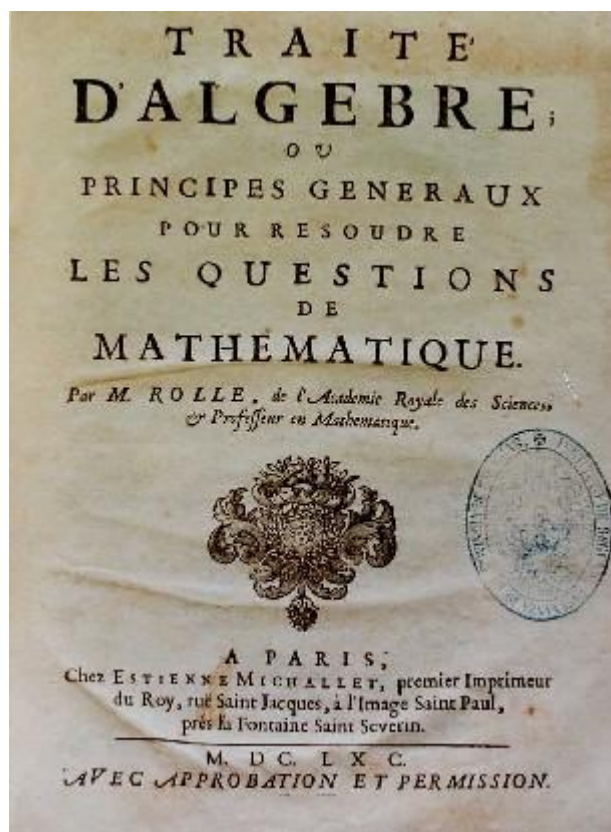
παράγωγο για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(1)f'(1)x^3 + x^2 + 2018}{f(4)f'(4)x^3 - 3x + 2020} = 1$. Να δείξετε ότι :

α) η εξίσωση $f''(x) = -\frac{(f'(x))^2}{f(x)}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 4)$

β) $\exists \xi \in (0, 4) : \xi f(\xi) f'(\xi) = e^\xi - 1$

15.99 Δίνεται η συνεχής $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + 1, & x \leq 1 \end{cases}$ Να εξετάσετε αν η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$ (**ΘΕΜΑ 2018Ε**)

15.100 Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1}, & x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ 1 - x^2, & x \in (-1, 1) \end{cases}$. Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $t(x) = \varphi(x) \cdot \eta\mu(\pi x)$ στο διάστημα $[0, 2]$ (**ΘΕΜΑ 2019Ε**)



Ο Michel Rolle, (1652 – 1719) ήταν σπουδαίος Γάλλος μαθηματικός.

Έμεινε στην ιστορία για το ομώνυμο θεώρημα (1691) που διατύπωσε.

Το θεώρημά του είναι ένα από τα σημαντικότερα του διαφορικού λογισμού και μέσω αυτού αποδεικνύεται το θεώρημα μέσης τιμής διαφορικού λογισμού.

16. Θεώρημα Μέσης Τιμής(Θ.Μ.Τ.)

A. Διατύπωση Θεωρήματος Μέσης Τιμής

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- ▶ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$,
- ▶ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

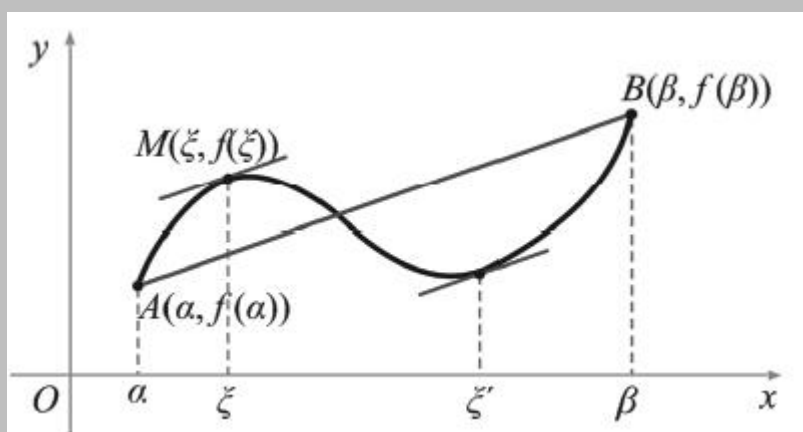
τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

(2013–2016 –2019 E)

B. Γεωμετρική Ερμηνεία Θεωρήματος Μέσης Τιμής

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB , όπου $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$

(2003–2008 E–2016 E–2019 E)



Ασκήσεις

A. Να Δείξουμε ότι $f'(\xi) = \alpha$

16.1 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(3) = 5f(1)$.
Να δείξετε ότι: $\exists \xi \in (1, 3) : f'(\xi) = 2f(1)$.

16.2 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $3f(5) + f(1) = 0$.
Να δείξετε ότι: $\exists \xi \in (1, 5) : f'(\xi) = f(5)$.

16.3 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ ώστε $f(2) = f(0) + 4$
Να δείξετε ότι: $\exists \xi \in (0, 2) : f'(\xi) = 2$

16.4 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 7)$ και $B(2, 1)$. Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f κάθετη στην ευθεία $x - 6y + 1 = 0$.

16.5 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[4, 10]$ με $f(4) = 6$ και $f(10) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (4, 10)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x'

16.6 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[1, 3]$ με $f(3) = 12$ και $f(1) = 4$. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο της εφαπτομένης της C_f στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 4x - 2$

16.7 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = 3x - 5$ και ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - x^2 + 5}{\sqrt{x+1} - 2} = -28$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $B(3, f(3))$

γ) Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (1, 3) : f'(\xi) = 3$

δ) Να δείξετε ότι $\exists x_0 \in (1, 3) : f''(x_0) = -2$

16.8 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(x) > 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$

Να αποδείξετε ότι: $\exists \xi \in (\alpha, \beta) : f'(\xi) = \ln \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} \cdot \frac{f(\xi)}{\beta - \alpha}$

16.9 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0, \forall x \in [1, 2]$.

Να αποδείξετε ότι: $\exists \xi \in (1, 2) : \frac{f(2)}{f(1)} = e^{\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$

16.10 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[0, 1]$ με $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in (0, 1)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$. (ΘΕΜΑ 2000)

B. Χωρισμός Διαστήματος ($\exists \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$)

16.11 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(6) = f(2) + 10$.

Να δείξετε ότι $\exists \xi_1, \xi_2 \in (2, 6) : f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 5$.

16.12 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 5]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 5)$ ώστε $5f(1) = f(5) = 2$.

Να αποδείξετε ότι $\exists \xi_1, \xi_2 \in (1, 5) : f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \frac{4}{5}$

16.13 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 9]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 9)$ ώστε $f(0) = f(9)$

Να αποδείξετε ότι $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0, 9) : f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 0$

16.14 Δίνεται συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(1) = 0$. Να δείξετε ότι :
 $\exists \xi_1, \xi_2 \in (0, 2) : f''(\xi_2) - f''(\xi_1) = f'(0) + f'(2)$

16.15 Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha, \beta]$,
να δείξετε ότι $\exists \xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta) : f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$

16.16 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$ ώστε $f(1) < f(3)$.

Να δείξετε ότι $\exists \xi_1, \xi_2 \in (1, 3) : f'(\xi_1) + f'(\xi_2) > 0$

16.17 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ ώστε $f(0) > f(2)$.

Να δείξετε ότι : $\exists \xi_1, \xi_2 \in (0, 2) : f'(\xi_1) + f'(\xi_2) < 0$

16.18 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = \frac{f(2)}{5} = -\frac{f(6)}{3}$.

Να δείξετε ότι $\exists \xi_1, \xi_2 \in (0, 6) : f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

16.19 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = \alpha, f(2) = 2\alpha, f(3) = \frac{5\alpha}{2}$

Να δείξετε ότι $\exists \xi_1, \xi_2 \in (0, 3) : f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \alpha$

16.20 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 6]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 6)$ ώστε $f(1) = f(6)$.

Να αποδείξετε ότι $\exists \xi_1, \xi_2 \in (1, 6) : f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = 0$.

16.21 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(5) = f(1) + 1$.

Να αποδείξετε ότι $\exists \xi_1, \xi_2 \in (1, 5) : f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 1$

16.22 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [1, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(8) = 2f(1)$. Να αποδείξετε ότι :

$\exists \xi_1, \xi_2 \in (1, 8) : 2f'(\xi_1) + 5f'(\xi_2) = f(1)$.

16.23 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 4]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 4)$ ώστε $f(1) = f(4)$.

Να αποδείξετε ότι $\exists \xi_1, \xi_2 \in (1, 4) : 2f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$

16.24 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1, f(4) = 2$.

Να αποδείξετε ότι $\exists \xi_1, \xi_2 \in (1, 4) : f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 1$

16.25 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(22) = f(2) + 4$.

Να αποδείξετε ότι : $\exists \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (2, 22) : f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 6f'(\xi_3) = 2$.

16.38 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε για την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha - x, & x \leq 0 \\ \beta \cdot e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$ να ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[-1, 1]$

16.39 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε για την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \beta, & x < 0 \\ x^3 + \alpha \cdot (x - 1), & x \geq 0 \end{cases}$ να ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[-2, 2]$

16.40 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 3, f(3) = 7, f(5) = 11$.
Να αποδείξετε ότι: $\exists \xi \in (1, 5): f''(\xi) = 0$

16.41 Δίνεται f παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f(0) = 0$ και $f(x) > 0, \forall x \in (0, 1)$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\exists \xi \in (0, 1): f(\xi) = (1 - \xi) \cdot f'(\xi)$. β) $\exists x_0 \in (0, \xi): f'(x_0) < \frac{f'(\xi)}{\xi}$

16.42 Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0, f(1) = 2, f(2) = 4$.
Να αποδείξετε ότι: $\exists \xi \in (0, 2): f''(\xi) = 0$

16.43 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(2) = f(0) + 4$ και $f(4) = f(3) + 2$.
Να αποδείξετε ότι: $\exists \xi \in (0, 4): f''(\xi) = 0$.

16.44 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(1) + f(4) = f(2) + f(3)$
Να αποδείξετε ότι: $\exists \xi \in (1, 4): f''(\xi) = 0$.

16.45 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[2, 6]$ ώστε $2f(4) = f(2) + f(6)$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2, 6)$.

16.46 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[1, 3]$ ώστε $2f(2) = f(1) + f(3)$.
Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (1, 3): f''(\xi) = 0$

16.47 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη f στο $[1, 10]$ ώστε να ισχύει $\frac{f(7) - f(1)}{f(10) - f(7)} = 2$
Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (1, 10): f''(\xi) = 0$

16.48 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε οι αριθμοί $f(-1), f(0), f(1)$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να αποδείξετε ότι: $\exists \xi \in (-1, 1): f''(\xi) = 0$

16.49 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η C_f έχει τρία σημεία συνευθειακά.
Να δείξετε ότι $\exists \xi \in \mathbb{R}: f''(\xi) = 0$

16.50 Δίνεται η τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[2, 3]$ για την οποία ισχύει $f(3) = f(2) + \alpha$ και $f'(3) = f'(2) = \alpha$. Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (2, 3): f'''(\xi) = 0$

16.51 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη και περιττή συνάρτηση $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$
Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχουν $\xi_1 \in (-1, 0)$ και $\xi_2 \in (0, 1)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 1$
β) υπάρχει $\exists x_0 \in (-1, 1): f''(x_0) + f'(x_0) = 1$

16.52 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ για την οποία ισχύει $f^2(1) - f^2(0) > 1$.
Να αποδείξετε ότι $\exists x_0 \in (0, 1): f'(x_0) \cdot f(x_0) > \frac{1}{2}$

16.53 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $2f(\alpha + 1) = f(\alpha) + f(\alpha + 2)$.

Να αποδείξετε ότι η f' δεν είναι 1-1

16.54 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(\alpha + 1) + f(\alpha + 2) = f(\alpha) + f(\alpha + 3)$.

Να αποδείξετε ότι η f' δεν είναι 1-1

16.55 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Αν τα σημεία $A(1, f(1))$, $B(2, f(2))$, $\Gamma(3, f(3))$ είναι συνευθειακά, τότε να δείξετε ότι η f' δεν είναι 1-1.

16.56 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι: $f(2) + f(3) < f(1) + f(4)$.

16.57 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε: $f(1) < \frac{f(0) + f(2)}{2}$

16.58 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(x + 1) + f(x + 2) > f(x) + f(x + 3)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

16.59 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι: $f(2x + 3) - f(2x + 7) < f(2x + 1) - f(2x + 5)$.

16.60 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι: $f(x^2 + 1) + f(x^2 + 2) < f(x^2) + f(x^2 + 3)$.

16.61 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι: $x \cdot (f(x) - f(1)) < f(x^2) - f(x)$, $x > 1$

16.62 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x$. Να δείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα β) $\forall x > 1: (x - 1) \cdot f'(1) < f(x) < (x - 1) \cdot f'(x)$

16.63 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x \cdot (\ln x - 1) + x^2$. Να δείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα β) $\forall x > 0: f(x + 2) + f(x + 4) < f(x) + f(x + 6)$

16.64 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο ώστε $f(3) \neq 0$, $3f(1) = 9f(3) = f(5)$.

Να αποδείξετε ότι: $\exists \xi \in (1, 5): f'(\xi) = 0$.

16.65 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$ με $f(0) + f(2) = f(1) + f(3)$

α) Να δείξετε ότι: $\exists \xi_1, \xi_2 \in (0, 3): f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$

β) Αν η f' είναι 1-1 και συνεχής να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 3)$

16.66 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο ώστε να ισχύουν $f(1) = -6$,

$f(3) = -2$ και $f(5) = 22$. Να δείξετε ότι:

α) $\exists \xi_1, \xi_2 \in (1, 5): f'(\xi_1) = 2, f'(\xi_2) = 12$.

β) $\exists x_0 \in (1, 5): f'(x_0) = 2x_0$

16.67 Δίνεται f παραγωγίσιμη στο $[4, 5]$ με $f(4) = -1$ και $f'(x) > 6, \forall x \in (4, 5)$. Να δείξετε ότι:

α) $f(5) > 5$

β) η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(4, 5)$

16.68 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$. Να δείξετε ότι :

α) $f(\alpha) \neq f(\beta)$

β) $\exists x_0 \in (\alpha, \beta) : 5f(x_0) = 2f(\alpha) + 3f(\beta)$

γ) $\exists \xi_1, \xi_2, \xi \in (\alpha, \beta) : \frac{3}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} = \frac{5}{f'(\xi)}$

16.69 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ ώστε να ισχύει $f'(x) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι :

α) $f(\alpha) \neq f(\beta)$

β) $\exists x_0 \in (\alpha, \beta) : f(x_0) = \frac{2f(\alpha) + f(\beta)}{3}$

γ) $\exists \xi_1, \xi_2, \xi \in (\alpha, \beta) : \frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} = \frac{3}{f'(\xi)}$

16.70 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ ώστε $f(\alpha) = \alpha, f(\beta) = \beta$. Να αποδείξετε ότι :

α) υπάρχει τουλάχιστον μια εφαπτόμενη της C_f η οποία είναι παράλληλη στην $y = x + 6$

β) $\exists x_0 \in (\alpha, \beta) : f(x_0) = \frac{\alpha + \beta}{2}$

γ) $\exists \xi_1, \xi_2, \xi \in (\alpha, \beta) : \frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2$

16.71 Δίνεται συνάρτηση $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο ώστε $f(2) = 0, f(0) \cdot f(4) > 0$

Να αποδείξετε ότι : $\exists \xi \in (0, 4) : f'(\xi) = 0$

16.72 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(x) > 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι : $\exists \xi_1, \xi_2, \xi_0 \in (\alpha, \beta) : \frac{f'(\xi_1)}{f(\xi_1)} + \frac{f'(\xi_2)}{f(\xi_2)} = 2 \frac{f'(\xi_0)}{f(\xi_0)}$

16.73 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \leq 1 \\ x^3 - \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases}$. Αν ισχύει το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[-1, 2]$ τότε :

α) να βρεθούν οι τιμές των α και β .

β) να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο $A(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in [-1, 2]$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : 2x - y + 3 = 0$.

16.74 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Αν η C_f διέρχεται από τα $A(1, 5), B(-2, 1)$ να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-4 + f(x^2 - 8)) = -2$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon : y = -\frac{3}{4}x + 2$

16.75 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

α) Αν $A(-1, f(-1)), B(1, f(1))$, να δείξετε ότι $(AB) \geq 2\sqrt{2}$. Αν επιπλέον ισχύει $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$, να δείξετε ότι :

β) $f(0) = 0$

γ) $f(x) \geq x, \forall x \geq 0$

δ) η εξίσωση $\frac{f(\alpha^2 + 2) - \alpha^2 + 1}{x - 2} + \frac{f^2(\alpha^2) - \alpha^4 + 1}{x - 1} = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1, 2)$.

16.76 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Αν η C_f διέρχεται από τα $A(1, 2005), B(-2, 1)$ να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y = -\frac{1}{668}x + 2005$ (**ΘΕΜΑ 2005 Ε**)

Δ. Διπλές Ανισώσεις και Θ.Μ.Τ.

16.77 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 2]$ με $f(0) = 3$ και $\forall x \in (0, 2)$ ισχύει $-2 \leq f'(x) \leq 3$.
Να δείξετε ότι: $-1 \leq f(2) \leq 9$.

16.78 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 2]$ με $f(1) = 3$ και $\forall x \in (1, 2)$ ισχύει $3 \leq f'(x) \leq 5$.
Να δείξετε ότι: $6 \leq f(2) \leq 8$

16.79 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και ισχύει $4 \leq f'(x) \leq 5$.
Να δείξετε ότι: $9 \leq f(2) \leq 11$

16.80 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 4]$ με $f(0) = 1$ και ισχύει $2 \leq f'(x) \leq 5$.
Να δείξετε ότι: $9 \leq f(4) \leq 21$ (**Σχολικό**)

16.81 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 5]$ με $f(1) = -2$ και $\forall x \in (1, 5)$ ισχύει $|f'(x)| \leq 2$.
Να δείξετε ότι: $-10 \leq f(5) \leq 6$

16.82 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ και $|f'(x)| \leq 2$
Να δείξετε ότι: $-7 \leq f(5) \leq 9$

16.83 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(4) = 1$ και $1 < f'(x) < 2$. Να δείξετε ότι:
α) $-3 < f(2) < -1$ β) $\exists x_0 \in (2, 4): f(x_0) = 1 - x_0$

16.84 Αν η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Να δείξετε: $f'(1) < f(1) < f'(0)$

16.85 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' γνησίως αύξουσα
Να δείξετε ότι $f'(1) < f(2) - f(1) < f'(2)$

16.86 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' γνησίως αύξουσα.
Να δείξετε ότι $f'(x) < f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$.

16.87 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' γνησίως αύξουσα.
Να δείξετε ότι $2f(x) < f(x-1) + f(x+1)$

16.88 Να δείξετε ότι: $2 - \frac{e}{2} < \ln 2 < \frac{2}{e}$

16.89 Να δείξετε ότι: $\frac{2}{5} < \ln \frac{5}{3} < \frac{2}{3}$.

16.90 Να δείξετε ότι: $\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} < \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\alpha - \beta} < \frac{1}{2\sqrt{\beta}}$ για κάθε $0 < \beta < \alpha$

16.91 Να δείξετε ότι: $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $x > 0$.

16.92 Να δείξετε ότι : $\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1, x > 1$

16.93 Να δείξετε ότι : $1+x < e^x < 1+ex, x \in (0,1)$.

16.94 Να δείξετε ότι : $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}, x > 0$.

16.95 Να δείξετε ότι : $\frac{1}{x} < \ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right) < \frac{1}{x-1}, x > 1$.

16.96 Να δείξετε ότι : $e^\alpha + e^\alpha \cdot (\beta - \alpha) < e^\beta < e^\alpha + e^\beta \cdot (\beta - \alpha)$ με $\alpha < \beta$

16.97 Να δείξετε ότι : $1 < \frac{e^x-1}{x} < e^x, x > 0$.

16.98 Να δείξετε ότι : $\frac{1}{\sin^2 \alpha} < \frac{\varepsilon \varphi \alpha - \varepsilon \varphi \beta}{\alpha - \beta} < \frac{1}{\sin^2 \beta}$ με $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$

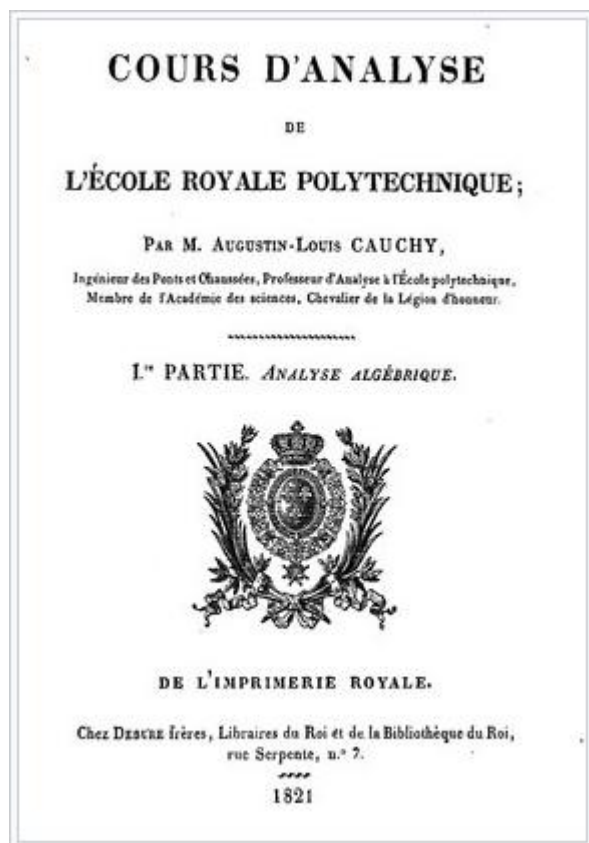
16.99 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, f(0) = 0$.

α) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f

β) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x), \forall x > 0$ (ΘΕΜΑ 2002)

16.100 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x), \forall x > 0$ (ΘΕΜΑ 2008)



Ο βαρώνος Ωγκυστέν-Λουί Κωσύ (1789 –1857)

ήταν Γάλλος μαθηματικός από τους πρωτοπόρους της ανάλυσης .

Το ΘΜΤ , ένα από τα πιο σημαντικά θεωρήματα στην Μαθηματική Ανάλυση, στη σύγχρονη μορφή διατυπώθηκε από τον Cauchy.

17. Συνέπειες Θ.Μ.Τ.

A. Θεώρημα Σταθερής Συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν :

- ▶ f συνεχής στο Δ και
 - ▶ $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ
- τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Για να είναι f σταθερή στο Δ , αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

- ▶ Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$
- ▶ Αν $x_1 < x_2$ τότε αφού f συνεχής στο $[x_1, x_2]$, f παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , τότε η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Επειδή το ξ εσωτερικό σημείο του Δ τότε:

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

- ▶ Αν $x_1 > x_2$ τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$, οπότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ .

(2004 E–2009–2014)

- Το παραπάνω θεώρημα ισχύει σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) = 0, \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ τότε η f είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ **(2019)**

- ▶ Η πρόταση αυτή είναι ψευδής. Πράγματι :

- ▶ Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ έχει $f'(x) = 0, \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

B. Πόρισμα Σταθερής Συνάρτησης

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν :

- ▶ f, g είναι συνεχείς στο Δ και
 - ▶ $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ,
- τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) = g(x) + c$.

▶ Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

▶ Για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ ισχύει : $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$

Άρα η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή, οπότε υπάρχει σταθερά c ώστε :

$$f(x) - g(x) = c \Leftrightarrow f(x) = g(x) + c.$$

- Το παραπάνω πόρισμα ισχύει σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Ασκήσεις

A. Σταθερή Συνάρτηση

17.1 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f''(x) + f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) + (f'(x))^2$ είναι σταθερή.

17.2 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = f(x), f(0) = 1$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή. β) Να βρείτε τον τύπο της f .

17.3 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = 3f(x), f(0) = \frac{1}{3}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{-3x}f(x)$ είναι σταθερή. β) Να βρείτε τον τύπο της f .

17.4 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = 2f(x), f(0) = 1, f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η $g(x) = \ln f(x) - 2x$ είναι σταθερή. β) Να βρείτε τον τύπο της f .

17.5 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(0) = 2, f'(x) = f(x)(2x + 1), \forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^{x^2+x}}$ είναι σταθερή. β) Να βρείτε τον τύπο της f .

17.6 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 3$ και $x \cdot f'(x) = 3x - 2f(x)$ για κάθε $x > 0$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x) - x^3$ είναι σταθερή. β) Να βρείτε τον τύπο της f .

17.7 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ και $f'(x) = e^{-f(x)}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)} - x$ είναι σταθερή. β) Να βρείτε τον τύπο της f

17.8 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(4) = 4e^{-2}, 2\sqrt{x}f'(x) + f(x) = e^{-\sqrt{x}}$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{\sqrt{x}}f(x) - \sqrt{x}$ είναι σταθερή στο $[0, +\infty)$

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

17.9 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x)\sqrt{1+x^2} = f(x), f(0) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η $g(x) = (\sqrt{1+x^2} - x)f(x)$ είναι σταθερή. β) Να βρείτε τον τύπο της f .

17.10 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ και $x \cdot f'(x) = f(x) - x^2, \text{ για } x > 0$

α) Να δείξετε ότι η $g(x) = \frac{f(x) + x^2}{x}$ είναι σταθερή β) Να βρείτε τον τύπο της f

17.11 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $(\ln x + 1)f(x) + f'(x) = 0, x > 0$

α) Να δείξετε ότι η $g(x) = x^x f(x), x > 0$ είναι σταθερή. β) Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(1) = 1$.

17.12 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(0) = 1$ και $f(0) = 0$ για την οποία ισχύει $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^{2x}$

17.13 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(0) = 3$ και $f(0) = 1$ για την οποία ισχύει $f''(x) - 6f'(x) + 9f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{3x}$

17.14 Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = g(1)$, $g(x) \neq 0$, $f'(x)g(x) = g'(x)f(x), \forall x \in \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι $f = g$

17.15 Αν για μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$,
να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή. (Σχολικό)

17.16 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) + 2xf(x) = e^{x-x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η $g(x) = e^{x^2} f(x) - e^x$ είναι σταθερή

β) Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x) - \eta \mu x}{x} = 1$, να βρείτε τον τύπο της f

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

17.17 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(x) = \sqrt{1 + f^2(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x) + f'(x))e^{-x}$ είναι σταθερή

β) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

γ) Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της C_f και τη χρονική στιγμή που περνάει από το $A(\ln 10, \kappa)$ η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό 20 μον/s. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη χρονική στιγμή που το M περνάει από το A

17.18 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(x)(f(x) - x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - 2xf(x)$ είναι σταθερή

β) Να βρείτε τον τύπο της f

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{|x| + \eta \mu x}$

δ) Αν h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = f(x)$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\xi) = h(x+1) - h(x)$

17.19 Δίνεται $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $e^{2xf''(x)}(e^{3f(x)})f'(x) = 1$.

Επίσης η εφαπτόμενη της C_f στο $M(16, f(16))$ είναι η ευθεία $\varepsilon : \sqrt{e} \cdot x + 64y - 80\sqrt{e} = 0$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(16)$ και $f'(16)$

β) Να δείξετε ότι η $g(x) = \sqrt{x} \cdot \ln f(x)$ είναι σταθερή

γ) Να βρείτε τον τύπο της f

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu \frac{1}{x}}{f(x)}$

17.20 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = -2xf^2(x), f(0) = 1$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2, x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή.

β) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (ΘΕΜΑ 2001)

17.21 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}, x \in \mathbb{R}, f(0) = 3$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x), x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή.

β) Να δείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$. (ΘΕΜΑ 2010)

B. Πόρισμα Σταθερής Συνάρτησης

17.22 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 1, f'(x) = x^3 + 3x^2$

17.23 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1) = 5, f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

17.24 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 2, f'(x) = 3x^2 - 2x + \sin x - 2, \forall x \in \mathbb{R}$
Να βρείτε τον τύπο της f .

17.25 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 3, f'(x) = e^x - \eta \mu x, \forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε τον τύπο της f .

17.26 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = e^2, f'(x) = 2e^{2x} + \frac{1}{x}$
Να βρείτε τον τύπο της f .

17.27 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 3, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{x-1}{x^2} \quad \forall x > 0$.
Να βρείτε τον τύπο της f .

17.28 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 0, f'(x) = 2x - e^{-x}$.

17.29 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 1, f'(x) = e^{2x} + \sin 2x$.

17.30 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1) = -1, f'(x) = \frac{3x+1}{x^2}, \forall x > 0$.

17.31 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f'(x) = 3\eta \mu^2 x \cdot \sin x$

17.32 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1) = 6, x \cdot f'(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x$

17.33 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1) = 0, f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x}, x > 0$

17.34 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 0, f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

17.35 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = \ln 5, f'(x) = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+5}$

17.36 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 0, f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

17.37 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = \frac{\ln 2}{2}, f'(x) = 2xe^{-x^2} + \frac{x}{x^2+2}$

17.38 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 1, f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} = x, x \in \mathbb{R}$

17.39 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = e, f'(x) = 2x \cdot \left(\frac{1}{x^2+1} + e^{x^2+1}\right)$

17.40 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 3, f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + 2^x \cdot \ln 2$

17.41 Δίνεται συνεχής $f: (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και ισχύει $2\sqrt{1-x} \cdot f'(x) = 1 + \frac{2\sqrt{1-x}}{x}$, $\forall x \in (0, 1)$. Να δείξετε ότι :

α) $f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$, $x \in (0, 1]$

β) η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f^{-1}(x)) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x} = 0$

δ) η εξίσωση $f(x) = -x$ έχει ακριβώς μια ρίζα

17.42 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f'(1) = 2$, $f(0) = 1$, $f''(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

17.43 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f'(0) = 1$, $f(1) = -3$, $f''(x) = 6x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

17.44 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f'(1) = 2$, $f(0) = 1$, $f''(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

17.45 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f'(0) = 1$, $f(1) = -3$, $f''(x) = 6x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

17.46 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f'(0) = 2$, $f(0) = 2$, $f''(x) = 6x + 4e^{2x}$

17.47 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f'(0) = -1$, $f(0) = 2$, $f''(x) = e^{-x} - \sin x$

17.48 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f''(x) = 6x + 4$ και η εφαπτόμενη της C_f στο $M(0, 1)$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 1$. Να βρείτε :

α) τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$

β) τον τύπο της f

γ) το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{x+1}$

17.49 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 2$, $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$

17.50 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 1$, $f'(x) = \eta\mu x + x \cdot \sin x - e^{-x}$

17.51 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 1$, $f'(x) = \sin x - x \cdot \eta\mu x$

17.52 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$, $f(1) = -1$.

Να βρείτε την f .

17.53 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $xf'(x) = 2x^2 \ln x + x^2$, $f(1) = 0$.

Να βρείτε την f .

17.54 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $e^{-x}f'(x) = x^3 + 3x^2$ και η εφαπτόμενη της C_f στο $M(1, f(1))$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη $\frac{1}{2}$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(1) = 2f(1)$

β) Να βρείτε τον τύπο της f

17.55 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f'(x) = \frac{x \sin x - \eta\mu x}{x^2}$, $x > 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}$

17.56 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $x^2 f'(x) + \ln x = 1$, $x > 0$, $f(1) = 0$

17.57 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(x) + xf'(x) = 3x^2 + 1$, $f(1) = 2$, $x > 0$

17.58 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(x) + xf'(x) = \sin x$, $f(\pi) = \frac{1}{\pi}$, $x > 0$

17.59 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $2f(x) + xf'(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(1) = 0$, $x > 0$

17.60 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $(x^2 + 1) \cdot f'(x) + 2x \cdot f(x) = 1$, $f(0) = 2$.

17.61 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $(x^2 - x) \cdot f'(x) + x \cdot f(x) = 1$, $x > 0$

17.62 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $x \cdot f'(x) + f(x) = e^x$, $x \geq 0$

17.63 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f'(x) = \frac{f(x)}{x-1} + e^x(x-1)$, $x > 1$ με $f(2) = e^2$

17.64 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $xf'(x) + x^2 = f(x) + x^2 e^x$, $f(1) = e - 1$, $x > 0$

17.65 Να βρείτε τον τύπο της f αν ισχύουν $xf'(x) - f(x) = x^2 \ln x + x^3 \sin x$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$, $x > 0$.

17.66 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = -3$, $f'(x) = \frac{2x - x^2}{e^{-x}}$

17.67 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f'(x) + 2xf(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$, $f(x) > 0$.

17.68 Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(0) = f'(0) = 1$ και τέτοια ώστε $f''(x) - f'(x) = 6x - 3x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

17.69 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x) > 0$ με $f''(x) - 2xf'(x) = 2f(x)$ και $f'(0) = 0$, $f(2) = e$. Να βρείτε τον τύπο της f .

17.70 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ με $f(2) = e^5$, $xf'(x) + f(x) \ln f(x) = 2xf(x)$, $x > 0$. Να βρείτε τον τύπο της f .

17.71 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(e) = 2$ και $xf'(x) \ln x + 2f(x) = 0$, $x > 1$. Να βρείτε τον τύπο της f .

17.72 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f'(x) = (2x + 1) \cdot e^{-f(x)}$, $f(0) = 0$.

17.73 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, $f'(x) - 4x^3 \cdot e^{-f(x)} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

17.74 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $xf'(x) = (x - 1) \cdot e^{-f(x)}$, $f(1) = 0$, $x > 0$.

17.75 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(e) = -2$, $e^{f(x)}(xf'(x) + 1) = -\frac{1}{x^2}$, $x > 0$. Να βρείτε τον τύπο της f .

17.76 Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(0, +\infty)$ ώστε $2f'(x) = \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) \cdot e^{f(x)}$, $f(1) = 0$

17.77 Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(0, +\infty)$ ώστε να ισχύει $f'(x) = (3x^2 + 2x) \cdot e^{-f(x)}$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(2, f(2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta: 4x - 3y + 8 = 0$

17.78 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$, $\frac{f'(x)}{x+1} = e^{x-f(x)}$, $x > 0$
Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x + x$, $x > 0$.

17.79 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f'(x)f(x) = x$, $f(0) = 1$.

17.80 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1) = -2$, $f'(x) \cdot f(x) = 2x^3$, $x > 0$

17.81 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = -2$, $f'(x)f(x) = e^{2x} + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε τον τύπο της f .

17.82 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $e^{-2x} \cdot f'(x) \cdot f(x) - 1 = 0$, $f(0) = 1$.

17.83 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με $f(0) = \sqrt{2}$ και $f'(x) = \frac{x - e^{-x}}{f(x)}$ Να βρείτε τον τύπο της f .

17.84 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x$, $f(0) = 1$, $f(x) > 0$

17.85 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{x^2+1} + 1$, $f(0) = 1$, $f(x) > 0$

17.86 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $\frac{f'(x)}{2 \cdot \sqrt{f(x)}} = 2x$, $f(0) = 1$, $f(x) > 0$

17.87 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f'(x) = 4x\sqrt{f(x)}$, $f(1) = 9$, $f(x) > 0$

17.88 Να βρείτε τον τύπο της $f(x) > 0$ αν ισχύουν $f'(x)f(x) = e^x \sqrt{1 + f^2(x)}$, $f(0) = \sqrt{3}$

17.89 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f'(x) + 2xf^2(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$, $f(x) \neq 0$

17.90 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ με $f(1) = 1$, $x^2 f'(x) + f^2(x) = 0$. Να βρείτε την f

17.91 Να βρείτε τον τύπο της $f(x) \neq 0$ αν $(x+1)f'(x) + f^2(x) = 0$, $x > 0$, $f(e-1) = 1$

17.92 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 1 - e^x$, $f(0) = 1$, $f(x) > 0$

17.93 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 2$, $f'(x) + 2f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

17.94 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(\ln 2) = 1$, $f'(x) + f(x) = x + 1$.

17.95 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 1$, $f'(x) - f(x) = e^{2x}$.

17.96 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f(-1) = -2$, $f'(x) = (2x+1)f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

17.97 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f(-1) = 2$, $f'(x) = (3x^2 + 2x)f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

17.98 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 1$, $f'(x) + 3x^2 \cdot f(x) = x^2$

19.99 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1) = \frac{3}{e}$, $2xf(x) + f'(x) = 2x \cdot e^{-x^2}$

17.100 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 1$, $f'(x) = 2x \cdot (1 + f(x))$.

17.101 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f(1) = e^2$, $f'(x) - f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$.

17.102 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f(1) = e$, $f'(x) = f(x) + \ln^2 x - 2 \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

17.103 Έστω παραγωγίσιμη f στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, $f'(x) = e^{\sin x} - \eta \mu x \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^{\sin x}$ β) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

17.104 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f(4) = 1$, $2xf'(x^2) + f(x^2) = 0$, $\forall x > 0$

17.105 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1) = 2$, $f'(2x - 1) = 4x$.

17.106 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1) = 2$, $f'(x - 2) = 2x + 3$.

17.107 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1) = 2e$, $f'(\ln x) = 2x + 1$, $x > 0$

17.108 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(1) = 2$, $f'(e^x) = x + 1$, $x > 0$.

17.109 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f(x) + x) \cdot (f'(x) + 1) = x$, $f(0) = 1$

Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

17.110 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $(f(x) + 2x) \cdot (f'(x) + 2) = 4x$, $f(0) = 1$, $x \in \mathbb{R}$

17.111 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}^*$ με $f(-1) = -4$, $f(1) = 3$ και $f'(x) = \frac{3x^2 + x + 2}{x^2}$

Να βρείτε τον τύπο της f

17.112 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}^*$ με $f(-1) = 3$, $f(1) = 2$ και $f'(x) = 2 - \frac{f(x)}{x}$

Να βρείτε τον τύπο της f

17.113 Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ \frac{2}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$, $f(1) = 0$. Να βρείτε τον τύπο της f

17.114 Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 2, & x < 1 \\ \frac{2}{x}, & x > 1 \end{cases}$, $f(1) = 1$. Να βρείτε τον τύπο της f

17.115 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x < 0 \\ 2x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$, $f(1) = \frac{2}{3}$. Να βρείτε τον τύπο της f

17.116 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ για την οποία ισχύει $f''(x) = [f'(x)]^2$, $x < 1$. Να δείξετε ότι $f(x) = -\ln(1 - x)$

17.117 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$ και $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f

17.118 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f(0) = f'(0) = 1$, $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$

17.119 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $2f(0) = f'(0) = 2$, $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = e^x$

17.120 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x^2 + 1)f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Αν η διχοτόμος της 1ης γωνίας των αξόνων εφάπτεται στη C_f στο $M(0, f(0))$, να βρείτε τον τύπο της f

17.121 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 2$, $f'(x) + f(x) = 1$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 1 + e^{1-x}$

β) Να δείξετε ότι $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ ισχύει $(\alpha - \beta)e^{1-\alpha} < e^{1-\beta} - e^{1-\alpha} < (\alpha - \beta)e^{1-\beta}$

17.122 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$, $f'(1) = 2$ για την οποία ισχύει $x^2 \cdot f''(x) + 1 = x$. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $g(x) = f(x) - \ln x$ και $h(x) = x \cdot \ln x$ είναι ίσες για κάθε $x > 0$

17.123 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $3f'(x) = e^{x-f(x)}$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

γ) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης.

17.124 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ και $f'(x) + \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x^2}$

α) Να δείξετε ότι η $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x^2) \cdot \sin 2x]$

17.125 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$, $f(0) = 1$, $2f'(x) = -f^2(x) \sin x$

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$

β) Να βρείτε τον τύπο της f

γ) Να δείξετε ότι $f(x) \leq 2$

δ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία $y = x$

ε) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot f(x))$

17.126 Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ώστε να ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - x - \eta \mu x \cdot \eta \mu 3x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2} = -8$ και

$f''(x)f(x) = (f'(x))^2 + 6xf^2(x)$. Να βρείτε :

α) την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$

β) τον τύπο της f

17.127 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, $(x^2 + 1)(f(x) + f'(x)) = 2xf(x)$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να δείξετε ότι :

β1) η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο $A(x_0, y_0)$ με την γραφική παράσταση της $g(x) = x$

β2) $\exists \xi \in (0, x_0) : f'(\xi) = 1 - \frac{1}{x_0}$

17.128 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) + f(x) \sin x = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

β) Αν επιπλέον ισχύει $f''(0) = -2$, να βρείτε :

β1) την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$

β2) τον τύπο της f

17.129 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) - f(x) = 2xe^x$ και η C_f στο σημείο τομής της με τον άξονα $y'y$ έχει εφαπτόμενη κάθετη στην ευθεία $y = x$. Να βρείτε :

α) τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$

β) την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$

γ) τον τύπο της f

δ) το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

17.130 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, $2f'(x) = e^{x-f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f . (ΘΕΜΑ 2005)

17.131 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} = 0$ και $f(1) = e^2$. Να βρείτε τον τύπο της f . (ΘΕΜΑ 2009 Ε)

17.132 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(x) + 2x = 2x(f(x) + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f . (ΘΕΜΑ 2010Ε)

17.133 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(0) = f(0) = 0$ και ικανοποιεί τη σχέση $e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(e^x - x)$. (ΘΕΜΑ 2011)

17.134 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ και $2f'(x) = \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)e^{f(x)}$ με $x > 0$.

Να δείξετε ότι $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)$ (ΘΕΜΑ 2012 Ε)

17.135 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$. (ΘΕΜΑ 2013)

17.136 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $f(1) = \frac{1}{2}$

Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ (ΘΕΜΑ 2013 Ε)

17.137 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x)[e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2$, $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$.

Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (ΘΕΜΑ 2015)

17.138 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$, $(x^2 - x)f'(x) + xf(x) = 1$, $\forall x > 0$.

Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ (ΘΕΜΑ 2015 Ε)

17.139 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{2}$

για κάθε $x > 0$ και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $M(1, 1)$.

Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ (ΘΕΜΑ 2019 Ε)

Γ. Η Ιδιότητα $f'(x) = f(x)$

17.140 Να βρείτε τον τύπο της f αν ισχύουν $f(1) = e$ και $\forall x > 0$ ισχύει $nx^2 f'(x) + 2xf(x) = x^2 \cdot f(x)$

17.141 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f(0) = 3$, $f'(x) - x^3 = f(x) - 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

17.142 Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0) = 1$ και $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(x^2 + 2)f'(x) + 2xf(x) = (x^2 + 2) \cdot f(x)$

17.143 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(0) = 2$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(x^2 + x + 1)f'(x) - (2x + 1)f(x) = (x^2 + x + 1)f(x)$

17.144 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f(x) > 0$, $f'(x) = f(x) \cdot \ln f(x)$, $f(1) = e^e$, $x \in \mathbb{R}$.

17.145 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f'(x) \cdot \sin x - f(x) \cdot \eta\mu x = f(x) \cdot \sin x$, $f(0) = 4$

17.146 Να βρείτε τον τύπο της f ορισμένη στο $(0, \pi)$ με $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}$, $f'(x) \cdot \eta\mu x = f(x) \cdot (\eta\mu x - \sin x)$

17.147 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $[f'(x) - f(x)] \cdot (2 + \sin x) - f(x)\eta\mu x = 0$, $f(0) = 2$

17.148 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν ισχύουν $f(2) = 3e^2$ και για κάθε $x > 1$ ισχύει $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} f(x)$, $\forall x > 1$

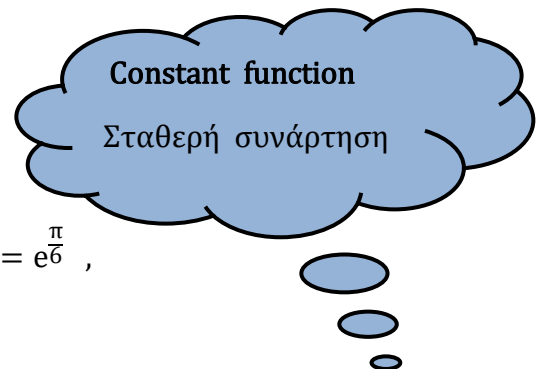
17.149 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο $A(0, f(0))$ έχει εξίσωση $y = 3x - 1$. Να βρείτε την f .

17.150 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = f'(0) = e$, $f(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) \cdot f''(x) - f(x) \cdot f'(x) = (f'(x))^2$. Να βρείτε τον τύπο της f .

17.151 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f''(x) + [f'(x)]^2 = f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $y = x + 1$ εφάπτεται στη C_f στο $M(0, 1)$, να βρείτε τον τύπο της f

17.152 Δίνεται 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$ και $2xf'(x) + x^2 f''(x) = -f'(x)$, $x > 0$. Να βρείτε τον τύπο της f .

17.153 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = \sqrt{2}$, $f(x) \neq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $2f'(x) = 2 + f(x) - x - \frac{1}{f(x) - x}$. Να βρείτε τον τύπο της f .



18. Μονοτονία Συνάρτησης

A. Θεώρημα Μονοτονίας

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .

Αν f συνεχής στο Δ και $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ .

Για να είναι f γνησίως αύξουσα στο Δ , αρκεί να δείξουμε ότι:

$\forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

► Αφού f συνεχής στο $[x_1, x_2]$, f παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , τότε η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi)$$

► Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$ θα είναι και $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

(2006 – 2012 – 2017 – 2019)

● Αντίστοιχα, αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ , με f συνεχής στο Δ και $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα Δ .

● Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) στο Δ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική (ή αρνητική) στο εσωτερικό του Δ .

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ , παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . (2020)

► Η πρόταση αυτή είναι ψευδής. Πράγματι :

► Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αλλά δεν ισχύει $f'(x) > 0$ αφού $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ μιας και $f'(0) = 0$.

Ασκήσεις

A. Μελέτη Μονοτονίας

18.1 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = x^2 - 8x + 5$

18.2 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$.

18.3 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 3x^2$

18.4 Ομοίως : α) $f(x) = x^3 + 3x - 4$ β) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ (Σχολικό)

18.5 Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

18.6 Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 6$

18.7 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2020$

18.8 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 1$

18.9 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

18.10 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

18.11 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$

18.12 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$

18.13 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ (Σχολικό)

18.14 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2+1}$

18.15 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$

18.16 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-5x+4}$

18.17 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$

18.18 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$

18.19 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

18.20 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

18.21 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = x - \ln x$

18.22 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = x - \ln(x + 1)$

18.23 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x$

18.24 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = x^2 - x - \ln x$

18.25 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x$.

18.26 Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της $f(x) = x(\ln x - 3)$

18.27 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = x - e^x$

18.28 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^x$

18.29 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$

18.30 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - x^2$

18.31 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = (2x^2 - 8x) \cdot \ln x - x^2 + 8x + 2$

18.32 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$

18.33 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$

18.34 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

18.35 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = e^{x^3 - 12x}$

18.36 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - 4x + 3$

18.37 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot \ln(x^2 + 4)$

18.38 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$

18.39 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 8)$

18.40 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + \ln(3x + 21)$

α) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f

18.41 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x$

18.42 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 - \ln(x + 1)$

18.43 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(2x) + 4x^2 - 2x - 3$

18.44 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = 3e^x + x^2 - 3x + 7$

18.45 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = 4e^x + 2x^2 - 4x$

18.46 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = e^x + x \ln x - (e + 1)x$

18.47 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-1} - x^2 + 3$

18.48 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

18.49 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

18.50 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

18.51 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 1 \\ x + 2, & x > 1 \end{cases}$ (Σχολικό)

18.52 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x, & x < 0 \end{cases}$

18.53 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x + 1 - e^x, & x > 0 \end{cases}$

18.54 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x - 2 \ln x, & x > 1 \end{cases}$

18.55 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 5, & x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 3, & x > 2 \end{cases}$

18.56 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 1, & x \leq 3 \\ x^2 - 8x + 37, & x > 3 \end{cases}$

18.57 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = |x^2 - 1|$ (Σχολικό)

18.58 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = |x^2 - x - 12|$

18.59 Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = e^x + 2x - 1$

18.60 Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = e^{x+1} + 3x + 2$

18.61 Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = e^{2x} - \frac{1}{x} + 1$

18.62 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^5(x) + f^3(x) + f(x) = x^3 + x^2 + x - 3$, $x \in \mathbb{R}$
Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την f

18.63 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + e^{f(x)} = 1 - x - x^3$, $x \in \mathbb{R}$.
Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την f

18.64 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $3f(x) + \sin(f(x)) = x$, $x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

18.65 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = e^x$, $f(0) = 1$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση f

18.66 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $g(x) = f(x+3) - f(x+2)$

18.67 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^5 + 5x - 6$ και $g(x) = 2\sqrt{x} + x - 3$

α) Να δείξετε ότι οι f, g είναι γνησίως αύξουσες

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών τους

γ) Να δείξετε ότι οι εξισώσεις $x^5 + 5x - 6 = 0$, $2\sqrt{x} + x - 3 = 0$ έχουν μοναδική λύση $x = 1$ (Σχολικό)

18.68 Δίνεται η $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$

α) Να μελετήσετε την μονοτονία της f

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

18.69 Δίνεται η $f(x) = \ln(e^x - e)$

α) Να μελετήσετε την μονοτονία της f

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

18.70 Δίνεται η $f(x) = 3e^{2x-4} + 1$, $x \geq 2$

α) Να μελετήσετε την μονοτονία της f

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

18.71 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \sqrt{x-4}$

α) Να βρείτε την μονοτονία της f .

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

γ) Να ορίσετε την αντίστροφη.

18.72 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} + 1}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Να βρείτε την αντίστροφή της.

18.73 Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)f'(x) - \eta\mu^2(x-1)}{\sqrt{x+3}-2} = -168 \text{ και } xf''(x) + f'(x) = 18x^2, x > 0.$$

α) Να δείξετε ότι $f'(1) = -42$

β) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την f

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(1) = 3$, να βρείτε:

γ1) τον τύπο της f γ2) την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$

18.74 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = e^x - e \ln x$ (ΘΕΜΑ 2007 Ε)

18.75 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1)$ (ΘΕΜΑ 2009)

18.76 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ (ΘΕΜΑ 2013 Ε)

18.77 Να αποδείξετε ότι η $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 0 και στη συνέχεια ότι είναι γνησίως αύξουσα. (ΘΕΜΑ 2014)

18.78 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (ΘΕΜΑ 2019Ε)

18.79 Αν $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (ΘΕΜΑ 2020)

B. Επίλυση Εξισώσεων με Μονοτονία

18.80 Να λυθεί η εξίσωση: $3x^2 + 2x = 5 - \ln x$.

18.81 Να λυθεί η εξίσωση: $e^{x-1} + x^3 = 3 - x$.

18.82 Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 + 6\ln x = 4x - 3$.

18.83 Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x^2}{2} - 4x + 4\ln x + \frac{7}{2} = 0$

18.84 Να λυθεί η εξίσωση: $\ln(e + x) = 1 - x$

18.85 Να λυθεί η εξίσωση: $\ln x + 2 = \sqrt{5 - x}$

18.86 Να λυθεί η εξίσωση: $e^{\eta \mu x} = 1 - \eta \mu x$

18.87 Να λυθεί η εξίσωση: $2^x + 5^x = 7^x$

18.88 Να λυθεί η εξίσωση: $\ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} = x$

18.89 Να λυθεί η εξίσωση: $e^{x^3+x} - e^{2x} = x - x^3$

18.90 Να λυθεί η εξίσωση: $\ln x = x - 1$.

18.91 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3\ln x$ και $g(x) = 4x - 3 + \ln x$. Να δείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν μοναδικό σημείο τομής.

18.92 Δίνεται η $f(x) = e^x - 1 + \ln(x+1)$. Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι γνησίως αύξουσα

β) η εξίσωση $e^x = 1 - \ln(x+1)$ έχει ακριβώς μια λύση $x = 0$ (Σχολικό)

18.93 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f^3(x) + \ln[f(x)] + e^{f(x)} = x^3 + x^2 + 2x - 1, f(x) > 0$

α) Να βρείτε την μονοτονία της f

β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(\ln x) = f(1 - x^2)$.

18.94 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 8^x$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της f

β) Να λύσετε την εξίσωση $(5x - 1)^3 + 8^{5x-1} = (11 - 7x)^3 + 8^{11-7x}$



18.95 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^{x^2} - e$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της f

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} - e^9 = \ln \frac{3}{x}$

18.96 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e}{x} - \ln x$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της f .

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{e}{x} = \ln x$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{e}{|x|+3} - \frac{e}{2|x|+1} = \ln \frac{|x|+3}{2|x|+1}$

18.97 Δίνεται η $f(x) = x^5 + 2^{x-1} + x - 3$

α) Να βρείτε την μονοτονία της f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $x^5 + 2^{x-1} + x = 3$

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2|\ln x - 1|^5 + 2^{|\ln x - 1|} = 6 - 2|\ln x - 1|$

18.98 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x^4 + 1) = f(2e^{x^2-1})$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{\ln^2 x + 1}$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1, e)$

18.99 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

β) Να λυθούν οι εξισώσεις:

β1) $\ln\left(\frac{e}{x}\right) = x$

β2) $2 - \ln(x^2 - 1) = x^2$

β3) $f(x) + f(x^{11}) = f(x^5) + f(x^{96})$

18.100 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1 + \ln x$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

β) Να λυθεί $f(x) + f(e^{x-1}) = f(\sqrt{x})$

18.101 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x + \ln x - 1$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

γ) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2+1} - e^{2x} = \ln \frac{2x}{x^2+1} - (x-1)^2$

18.102 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 7x^5 + 3e^x - 10$

α) Να βρείτε την μονοτονία της f .

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $7(2x-3)^5 + 3e^{2x-3} = 7(4-5x)^5 + 3e^{4-5x}$

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $7x^5 + 3e^x = 10$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$

18.103 Δίνεται η $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x) - 2016) = 1$ έχει μοναδική λύση.

δ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f , $C_{f^{-1}}$

18.104 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 2$

- α) Να μελετήσετε την μονοτονία της f
 β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα
 γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f , $C_{f^{-1}}$
 δ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) \geq 1$
 ε) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$

18.105 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{1}{2} \ln^2 x$.

- α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}\left(f(x) - e + \frac{3}{2}\right) > 1$.

18.106 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sqrt{x+1} - 1)$, $x > 0$

- α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f
 β) Να ορίσετε την αντίστροφη f^{-1}
 γ) Να βρείτε τα όρια: $\gamma 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{e^{2x}}$ $\gamma 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x}$

18.107 Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο ώστε :

$$f(x) = -f(2-x), f'(x) \neq 0.$$

- α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
 β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα. (ΘΕΜΑ 2003Ε)

18.108 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$

- α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση f
 β) Να λύσετε την εξίσωση $2(x^2 - 3x + 2) = \ln\left[\frac{(3x-2)^2 + 1}{x^4 + 1}\right]$ (ΘΕΜΑ 2010)

18.109 Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(1-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 β) Να λύσετε στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση: $f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x) = f(\epsilon\varphi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x})$ (ΘΕΜΑ 2019Ε)

Γ. Απόδειξη Ανισώσεων με Μονοτονία

18.110 Να δείξετε ότι: $\ln(x+1) < x$, $x > 0$

18.111 Να δείξετε ότι: $e^x > (1-x)^3$, $x > 0$

18.112 Να αποδείξετε ότι: $e^x \geq 1 - \sqrt{x}$, $x \geq 0$

18.113 Να δείξετε ότι: $\frac{2(x-1)}{x+1} < \ln x$, $x > 1$

18.114 Να δείξετε ότι: $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$, $x > 0$

18.115 Να δείξετε ότι: $\ln(x+1) < e^x - 1$, $x > 0$

18.116 Να δείξετε ότι : $\ln(x+1) > \frac{2x}{x+2}$, $x > 0$

18.117 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x - x^2$

α) Να βρείτε την μονοτονία της f

β) Να δείξετε ότι : $f(e^x) < f\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$, $x > 0$

18.118 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της f .

β) Να αποδείξετε ότι : $e^{\alpha-\beta} > \frac{\beta}{\alpha}$, $\alpha > \beta > 0$

18.119 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^6}{e^x}$

α) Να βρείτε την μονοτονία της f .

β) Να αποδείξετε ότι : $e^{\alpha-\beta} > \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^6$, $\alpha > \beta > 6$

18.120 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) > 3x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι $f(2) - f(1) > 7$

18.121 Έστω f συνεχής στο $[0, +\infty)$, παραγωγίσιμη $(0, +\infty)$ ώστε $f'(x) > -\frac{f(x)}{x}$, $x > 0$

Να δείξετε ότι $f(x) > 0$, $x > 0$

18.122 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f'(x) > \frac{1}{x \cdot \ln x}$, $x > 1$.

Να δείξετε ότι $f(3) - f(e) > \ln 3$

18.123 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 + e^x}{1 + e^{x+1}}$

α) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης f .

β) Για κάθε $x < 0$ να αποδείξετε ότι : $f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$ (ΘΕΜΑ 2006 Ε)

18.124 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση

β) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$ (ΘΕΜΑ 2016 Ε)

18.125 Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$

α) Να δείξετε ότι $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$, $x > 0$

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης

γ) Να δείξετε ότι $f(x) > 2^{f(x)} - 1$, $x > 0$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x} = 0$ όπου $0 < \alpha < 1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x , μια στο $(0, 1)$ και μια στο $(1, 2)$ (ΘΕΜΑ 2018 Ε)

Δ. Επίλυση Ανισώσεων με Μονοτονία

18.126 Να λύσετε την ανίσωση: $e^{x-1} < 1 - \ln x$

18.127 Να λύσετε την : $e^x + 2x < e^{-x} - x^3$

18.128 Να λύσετε την ανίσωση : $e^\alpha - e^\beta + \alpha - \beta < \sin \beta - \sin \alpha$

18.129 Να λυθεί η ανίσωση : $x - 1 \leq \frac{\eta \mu x^2 - \eta \mu x^3}{3x^2}$

18.130 α) Να μελετηθεί ως προς μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^x$

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda > 0$: $\ln \frac{\lambda}{2} > e^2 - e^\lambda$

18.131 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την μονοτονία της f

β) Να λυθεί η ανίσωση: $f(2^x + x) - f(4 - x^3) < 0$

18.132 Δίνεται η $f(x) = \ln(x^2 + 1) - 2x$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της f

β) Να λύσετε την ανίσωση : $f(f(x)) < 0$

18.133 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της f

β) Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq x + 6$

ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+10} > x^2 + 3x - 10$

iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < \sin x - x - 1$

18.134 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$

α) Να βρείτε την μονοτονία της f

β) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x} < e^{\frac{x-1}{x+1}}$, $x > 0$.

18.135 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της f

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ f$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $(f \circ f)(x) - f(x) \leq 0$.

18.136 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^x$

α) Να βρείτε την μονοτονία της f

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{4}{3}\right)^{x^2} - \left(\frac{4}{3}\right)^{2-x} > (2-x)^3 - x^6$

18.137 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $x \cdot f'(x) = x + 1$, $x > 0$, $f(1) = 1$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την f

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2} \geq 1 - x$

18.138 Να λυθεί η ανίσωση $f(5(x^2 + 1)^3 - 8) \leq f(8(x^2 + 1)^2)$ αν $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ γνησίως αύξουσα.
(ΘΕΜΑ 2013 Ε)

19. Τοπικά Ακρότατα Συνάρτησης

A. Ορισμός Τοπικού Μεγίστου

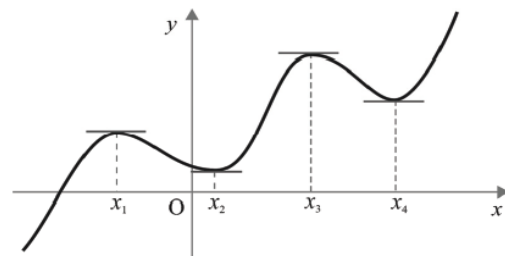
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f . (2012)

B. Ορισμός Τοπικού Ελαχίστου

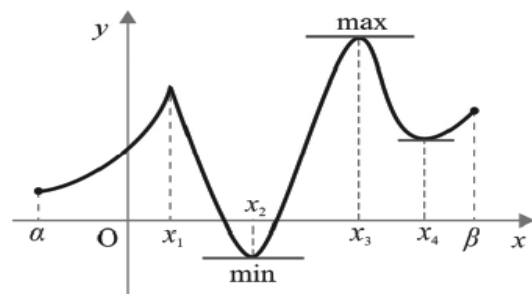
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f . (2015)

● Τα τοπικά μέγιστα και τα τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα, λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων**

● Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.



● Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει ελάχιστο, αυτό είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα.



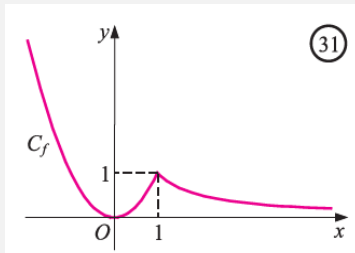
● Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε και μέγιστο αυτής. Επίσης, το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα, δεν είναι πάντοτε και ελάχιστο αυτής

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν μια συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο
τότε αυτό είναι και (ολικό) μέγιστο .

► Η πρόταση αυτή είναι ψευδής. Πράγματι :

► Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$ ενώ παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ τοπικό μέγιστο, το $f(1) = 1$ εντούτοις δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο .



Γ. Θεώρημα Fermat

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ .

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό , τότε $f'(x_0) = 0$

● Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο.

► Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σε αυτό τοπικό μέγιστο , υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και $f(x) \leq f(x_0)$ (1) για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , άρα : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Επομένως :

① αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ τότε $x < x_0 \Leftrightarrow x - x_0 < 0$ και λόγω της (1) θα είναι $f(x) - f(x_0) \leq 0$

άρα $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ οπότε θα έχουμε $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ (2)

② αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ τότε $x > x_0 \Leftrightarrow x - x_0 > 0$ και λόγω της (1) θα είναι $f(x) - f(x_0) \leq 0$

άρα $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ οπότε θα έχουμε $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ (3)

Άρα από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

- Γεωμετρικά, το θεώρημα Fermat σημαίνει ότι αν μια συνάρτηση f σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και επιπλέον είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, τότε στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.
- Το αντίστροφο του θεωρήματος Fermat δεν ισχύει. Ενδέχεται δηλαδή για μια συνάρτηση f να ισχύει $f'(x_0) = 0$ και το x_0 να μην είναι θέση ακροτάτου.

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και $f'(x_0) = 0$ τότε το x_0 είναι πάντα θέση τοπικού ακροτάτου

- ▶ Η πρόταση αυτή είναι ψευδής. Πράγματι :
- ▶ Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ έχει $f'(0) = 0$, όμως το 0 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Δ. Πιθανές Θέσεις Τοπικών Ακροτάτων

- Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ , είναι:
 - ① Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται
 - ② Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται
 - ③ Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της)

Ε. Ορισμός Κρίσιμων Σημείων

Κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ λέγονται τα εσωτερικά σημεία του Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος της είναι ίση με το μηδέν. **(2013 Ε)**

Ζ. Θεώρημα Τοπικών Ακροτάτων

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

► Αφού f συνεχής στο x_0 και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε: $x \leq x_0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0)$ (1) για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$.

► Αφού f συνεχής στο x_0 και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε: $x \geq x_0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0)$ (2) για κάθε $x \in [x_0, \beta)$.

● Άρα από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής. **(2012 E – 2016 – 2019 E)**

● Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$,

τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

► Αφού η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$,

έστω ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 , θα είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα

από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως για $x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f .

► Θα δείξουμε τώρα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$ θα είναι $f(x_1) < f(x_2)$

Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$ θα είναι $f(x_1) < f(x_2)$

Αν $x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$

Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

(2014 E – 2018 E)

Ασκήσεις

Α. Εύρεση Ακροτάτων Συνάρτησης

19.1 Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία και τις θέσεις των πιθανών ακροτάτων των συναρτήσεων :

α) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$ β) $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$, $x \in [0, 2]$

19.2 Ομοίως: α) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ β) $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$

19.3 Ομοίως: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, & x < 3 \\ 2x^3 - 15x^2 + 24x + 9, & x \geq 3 \end{cases}$

19.4 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

19.5 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

19.6 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

19.7 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ β) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ γ) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ (Σχολικό)

19.8 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 4x^2 + 1$

19.9 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = e^{2x} - 2x$

19.10 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων: α) $f(x) = e^x - x$ β) $f(x) = x^x$, $x > 0$ (Σχολικό)

19.11 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = e^{x^2 - x \cdot \ln x}$

19.12 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = (x - 2)e^x$

19.13 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = e^x(x^2 - 7x + 13)$

19.14 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x^2(\ln x - 1)$

19.15 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x \ln x - 2x + e$

19.16 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = (x - 3)e^x - \frac{x^2}{2} + 2x$

19.17 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 8 \ln x$

19.18 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = 2 \ln x - x^2$

19.19 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 5)$

19.20 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 9}{x^2 - 4}$

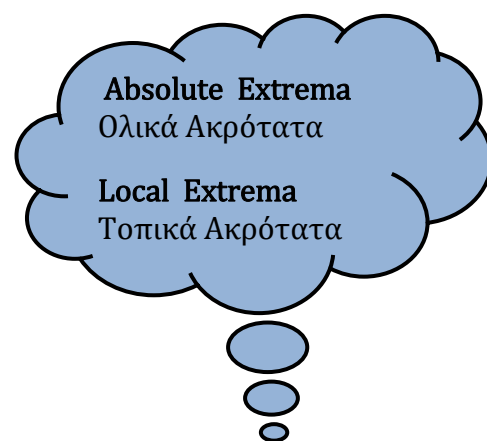
19.21 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x}{x^2+9}$

19.22 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$

19.23 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x}{\ln x}$

19.24 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{(x-1)^3}{e^x}$

19.25 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln x^3 - x - 6}{x}$



19.26 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f στο $[-1, 3]$ με $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5$

19.27 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{10x}{x^2+1}$, $x \in [-2, 2]$

19.28 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x+11}{x+1}$, $x \in [2, 8]$

19.29 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $x \in [1, 3]$

19.30 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

19.31 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2-2x-3}$

19.32 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{8x-x^2}$

19.33 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{-x^2+4x+5}$

19.34 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = (2x-1)\ln x - x$

19.35 Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x) = (x-1)\ln x$

19.36 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = e^x + x\ln x - (e+1)x$

19.37 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \ln x - e^{x-1} + 2$

19.38 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2\frac{\ln x}{x} + x$ δεν έχει ακρότατα

19.39 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - |x|$ με $x \in [-1, 2]$. Να βρείτε :

α) τα κρίσιμα σημεία της f

β) τις πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων

γ) το σύνολο τιμών της f

19.40 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ με $g'(x) > 0, \forall x > 0$ και $g(e) = e$. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln g(x)}{g(x)}$

19.41 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0, f'(x) - f(x) = 2xe^x$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 e^x$

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

19.42 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

α) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

19.43 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) = x^3 + 2x - 5, x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

19.44 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

19.45 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + 3f(x) = x^3 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

19.46 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + 3f(x) = \ln x - x + 1, x > 0$.

Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα για $x > 0$

19.47 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Αν η συνάρτηση f δεν είναι 1-1, να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο.

19.48 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) - (x - 3)e^{f(x)} = 0, x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι το $f(3)$ είναι τοπικό ελάχιστο αυτής.

19.49 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

19.50 Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι συναρτήσεις :

α) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ e^{1-x}, & x > 1 \end{cases}$ β) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x < 1 \\ x^2 - 4x + 3, & x \geq 1 \end{cases}$ (Σχολικό)

19.51 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \\ -\ln x, & x \geq 1 \end{cases}$

19.52 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 8, & x > 2 \end{cases}$

19.53 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \ln x - x^2 + 2, & x \geq 1 \\ x^2 + 2x - 2, & x < 1 \end{cases}$

19.54 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ με $\beta^2 < 3\gamma$
 α) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.
 β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. (ΘΕΜΑ 2001)

19.55 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \ln(e^x - x)$ (ΘΕΜΑ 2011)

19.56 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύουν :

– Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

– $f(1) = 1$

– $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$. Να αποδείξετε ότι :

α) $f'(1) = 0$

β) Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$

(ΘΕΜΑ 2013)

19.57 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ (ΘΕΜΑ 2016)

19.58 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$ (ΘΕΜΑ 2018)

19.59 Δίνεται η $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2\eta\mu x - x$. Να βρείτε τα ακρότατα της f (ολικά και τοπικά) (ΘΕΜΑ 2018Ε)

B. Εύρεση Παραμέτρων στα Ακρότατα

19.60 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x = -1$ και $x = 1$. Στη συνέχεια να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων (Σχολικό)

19.61 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 12x + 1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x = 1$ και $x = 2$. Στη συνέχεια να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων

19.62 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta \ln x$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x = 1$ και $x = 3$. Στη συνέχεια να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων.

19.63 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 12x - 7$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x = -2$ και $x = 1$. Στη συνέχεια να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων

19.64 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 3x + 4$ παρουσιάζει ακρότατο στο 1 με τιμή ίση με 2 .

19.65 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = 2\alpha \ln x + \beta x^2 + 3x + 2$ παρουσιάζει ακρότατο στο 1 το 3.

19.66 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = 2\alpha \ln x - \frac{\beta}{x} + 3\alpha$ παρουσιάζει ακρότατο στο 1 το 5.

19.67 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = (\alpha x + \beta) \cdot e^x$ παρουσιάζει ακρότατο στο 1 με τιμή ίση με $-e$, για $x \geq 0$.

19.68 Δίνεται η $f(x) = \alpha \ln x + x^2 + \beta x + 2$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το $x = 3$ είναι κρίσιμο σημείο της f και η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $K(1, f(1))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $x = 2y$

19.69 Δίνεται η $f(x) = \alpha \ln x - x^2, \alpha \in \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο $x = 1$.

α) Να βρείτε την τιμή του α

β) Να λύσετε την ανίσωση: $(3|x| + 1)^2 - (|x| + 9)^2 < 2 \ln \frac{3|x| + 1}{|x| + 9}$

Γ. Ανισώσεις και Ακρότατα

19.70 Να αποδείξετε ότι: $x^2 \geq 1 + 2\ln x, x > 0$

19.71 Να αποδείξετε ότι: $x^2 \geq x + \ln x, x > 0$

19.72 Να αποδείξετε ότι: $\ln x \leq x - 1, x > 0$

19.73 Να αποδείξετε ότι: $\ln x \leq ex - 2, x > 0$

19.74 Να αποδείξετε ότι: $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}, x > 0$

19.75 Να δείξετε ότι: $\ln(1 + x) \geq \frac{x}{1 + x}, x > -1$

19.76 Να αποδείξετε ότι: $e^{x-1} \geq 1 + \ln x$

19.77 Να δείξετε ότι: $2x^2 \ln x \geq 3x^2 - e^2, x > 0$

19.78 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x - 4x^2 + 1$

α) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να δείξετε ότι εξίσωση $\ln x = 2x^2 - \frac{1}{2}$ είναι αδύνατη

19.79 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x + 2$

α) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να δείξετε ότι εξίσωση $x \cdot e^{\frac{2}{x}} = 1$ είναι αδύνατη

19.80 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2}{e^{-x}}$

α) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να δείξετε ότι $x^2 \leq 8e^{x-2}, x > 0$

19.81 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$

α) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να δείξετε ότι $e^{x-1} \geq x, x > 0$

19.82 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, x > 0$.

α) Να βρείτε τα ακρότατα της f β) Να δείξετε ότι $\forall \alpha, \beta, \gamma > 0: \frac{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}}{3} \leq e^{\frac{1}{e}}$

19.83 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

α) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f . β) Να δείξετε ότι $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$, $x > 0$

19.84 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + 3f(x) = e^{2x} - 2x - 5$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

19.85 Δίνεται η παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $xf'(x) + 2f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $f(1) = 0$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f

γ) Να δείξετε ότι $x^{2e} \leq e^{x^2}$, $x > 0$

19.86 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να δείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$, $x \in \mathbb{R}$. (ΘΕΜΑ 2003)

19.87 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e \ln x$. Να δείξετε ότι $f(x) \geq e$, $\forall x > 0$ (ΘΕΜΑ 2007Ε)

19.88 Δίνεται η $f(x) = x^2 - 2 \ln x$, $x > 0$. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$, $x > 0$ (ΘΕΜΑ 2008 Ε)

19.89 Να λυθεί η εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$. (ΘΕΜΑ 2016)

19.90 Δίνεται η $f(x) = -\eta \mu x$, $x \in [0, \pi]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες που άγονται από το $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, τις οποίες και να βρείτε. (ΘΕΜΑ 2017)

Δ. Από Ανίσωση σε Ισότητα

19.91 Αν για $x > 0$ ισχύει $x^2 + x \geq 2 + \alpha \ln x$. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

19.92 Αν ισχύει $e^x \geq \alpha x + 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του α

19.93 Αν για $x > 0$ ισχύει $x^3 \geq x^2 + \alpha \ln x$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του α .

19.94 Αν για $x > 0$ ισχύει $\alpha \ln x \leq x - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του α .

19.95 Αν για $x > 0$ ισχύει $\ln x + \frac{2\alpha}{x+1} \geq \alpha x^2$. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

19.96 Δίνεται συνάρτηση f με $f'(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $e^{f(x)} \geq \alpha f(x) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(1) = 0$, να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

19.97 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $e^{f(x)} \geq (\alpha - 2)f(x) + \eta \mu\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(1) = 0$
Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ ή ότι η f παρουσιάζει ένα κρίσιμο σημείο.

19.98 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \leq e^x + \ln(x^2 + 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, 1)$

19.99 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \geq x^2 + \eta \mu x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$
Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$

19.100 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$, $2f(x) - x^2 \leq 2\ln x + 1$, $x > 0$.
Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 3$.

19.100 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$, $f(e^x) \leq x^2 + 1$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$

19.101 Δίνεται παραγωγίσιμη $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x^2 - x + 1) - f(1) \geq x - x^2, x > 0$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x$

19.102 Δίνονται οι παραγωγίσιμες $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 3$, $f(x) + g(x) \leq x^3 + x^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της C_g στο $M(1, g(1))$ έχει εξίσωση $y = 3x + 1$, τότε να βρείτε:

α) τις τιμές $g(1)$, $g'(1)$.

β) την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $B(1, f(1))$

10.103 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

οι C_f, C_g τέμνονται στο μηδέν και $f(x) + e^x \geq g(x) + x + 1, x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτόμενη στο μηδέν.

19.104 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, τρεις φορές παραγωγίσιμη, με $f(1) = f(2) = 0$.

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (1, 2): f'''(\xi) = 0$

19.105 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ (ΘΕΜΑ 2004 Ε)

19.106 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.

Αν ισχύει $f(x) \geq 1$, για $x > -1$ να βρείτε το α (ΘΕΜΑ 2009)

Ε. Πλήθος Ριζών – Σύνολο Τιμών

19.107 Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

19.108 Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 1 + e^{-x^2}$

19.109 Δίνεται συνάρτηση $f: [-1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$. Να βρείτε:

α) την μονοτονία και τα ακρότατα της f β) το σύνολο τιμών της f

19.110 Δίνεται η $f(x) = x^3 - 3x + 2, x \in [-2, 0]$. Να βρείτε :

α) τα κρίσιμα σημεία της f β) τα ακρότατα της f καθώς και το σύνολο τιμών

19.111 Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln x + x^2 - 3x + 12 = 0$

19.112 Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ έχει ακριβώς 3 πραγματικές ρίζες.

19.113 Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2x^3 - 6x + 1 = 0$.

19.114 Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3 - 3x + \alpha = 0$.

19.115 Δίνεται η $f(x) = 1 - e^{2x} \cdot (1 + 2x)$. Να βρείτε :

[illegible]

γ) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2x = e^{-2x} - 1$

19.116 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x + 1$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(f(x) - \frac{3}{2}\right) = 2$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

19.117 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1) \cdot \ln x - 1$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2018}$, έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες

19.118 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $1 + 2018 \cdot x = \ln x$

19.119 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, $f'(x) + f(x) = e^{-x}$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x - 2018 \cdot e^x = 0$

19.120 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = \ln(e + 1)$, $f'(x) + e^{-x-f(x)} = 0$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(e + e^{-x})$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφή της.

δ) Αν $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $f(\alpha) + f(\beta + 1) > f(\beta) + f(\alpha + 1)$

19.121 Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = x^2 \ln x$ (ΘΕΜΑ 2004)

19.122 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες. (ΘΕΜΑ 2006)

19.123 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$, $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ μια σταθερά.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες. (ΘΕΜΑ 2007)

19.124 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (ΘΕΜΑ 2008)

19.125 Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x+2)$ (ΘΕΜΑ 2009 Ε)

19.126 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες. (ΘΕΜΑ 2010 Ε)

19.127 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x - 1$, $x > 0$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$ έχει ακριβώς 2 θετικές ρίζες. (ΘΕΜΑ 2012)

19.128 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (ΘΕΜΑ 2014 Ε)

19.129 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(e^{3-x}(x^2 + 1)) = \frac{e^2}{5}$ έχει ακριβώς μια ρίζα. (ΘΕΜΑ 2015)

19.130 Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = e^{x-1} - \ln x$ (ΘΕΜΑ 2015 Ε)

19.131 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + x, & x < 1 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία είναι αρνητική.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$ (ΘΕΜΑ 2019)

Ζ. Συνδυαστικές Ασκήσεις στα Ακρότατα

19.132 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$, $(f'(x))^2 \neq f(x)f''(x)$.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$ έχει το πολύ ένα ακρότατο.

19.133 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αν η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $[-1, 2]$ και $f(\alpha) = 0, f(\beta) = 1$, να δείξετε ότι:

α) $\exists x_1, x_2 \in (\alpha, \beta): f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

β) Η εξίσωση $f'(x) = (x^2 + 1)f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) αν η f' είναι συνεχής

19.134 Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) < f(1) < f(4) < f(3)$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f παρουσιάζει ένα ολικό ελάχιστο και ένα ολικό μέγιστο

β) $\exists x_0 \in (1, 4): f''(x_0) = 0$

19.135 Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) < f(0) < f(3) < f(2)$

Να αποδείξετε ότι: $\exists x_0 \in (0, 3): f''(x_0) = 0$

19.136 Έστω η $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ και $\gamma, \delta \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\gamma) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\delta)$. Αν η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α, β) .

19.137 Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, 3]$ με $f(1) = 2$ και $f(3) = 4$ και σύνολο τιμών το $[-1, 5]$. Να δείξετε ότι:

α) $\exists x_1, x_2 \in (1, 3): f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

β) $\exists x_0 \in (1, 3): f''(x_0) = 0$

19.138 Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη ώστε $2f(x) \geq f(1) + f(2)$, με $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α) $f(1) = f(2)$

β) $\exists x_0 \in (1, 2): f'''(x_0) = 0$.

γ) η εξίσωση $f''(x) = f'(x)$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο $(1, 2)$.

19.139 Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη ώστε $2f(x) \geq f(3) + f(4)$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

α) $f(3) = f(4)$

β) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (3, 4)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f''(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

19.140 Έστω $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη ώστε $f(2) < f(1) < f(4) < f(3)$. Να δείξετε ότι :

α) η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο $(1, 4)$.

β) η εξίσωση $f''(x) + 2xf'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1, 4)$.

19.141 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \leq 2 - x + \frac{f(1) + f(3)}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α) $f(1) - f(3) = 2$.

β) η εξίσωση $f'(x) = -1$ έχει τουλάχιστον τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

19.142 Έστω η συνάρτηση $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή f' στο $[1, 4]$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $[-3, 2]$ και $f(1) = -2$, $f(4) = 1$. Να αποδείξετε ότι :

α) υπάρχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη της C_f κάθετη στην ευθεία $\zeta: 2x + 2y - 2020 = 0$.

β) η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο $(1, 4)$.

γ) η εξίσωση $f'(x) = (e^x + x^2) \cdot f(x)$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1, 4)$.

19.143 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη ώστε $f(1) = f(3)$, $f''(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό τοπικό ακρότατο, του οποίου να βρείτε το είδος.

19.144 Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η εφαπτόμενη της C_f στο $A(4, f(4))$ είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 3y = -x + 2$.

Επιπλέον ισχύει $f(e^x) \leq x^3 + 2x^2 + f(1)$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

α) η εφαπτόμενη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

β) η εξίσωση $f''(x) = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 4)$.

19.145 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο ώστε να ισχύει $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 1$. Να δείξετε ότι :

α) η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $\mathbb{R}$

β) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (**ΘΕΜΑ 2016**)

19.146 Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια :

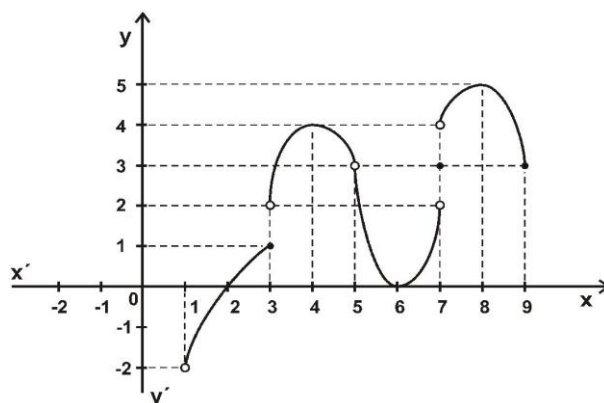
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 3} f(x), \lim_{x \rightarrow 5} f(x), \lim_{x \rightarrow 7} f(x), \lim_{x \rightarrow 9} f(x)$$

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}, \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}, \lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$$

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής

ε) Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f ώστε να ισχύει $f'(x_0) = 0$ (**ΘΕΜΑ 2016 Ε**)



$$19.147 \text{ Δίνεται η } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι το $x_0 = 1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$ (ΘΕΜΑ 2016 Ε)

$$19.148 \text{ Δίνεται η } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \cdot \eta\mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[-1, \pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της

γ) Να λύσετε την εξίσωση $16 \cdot e^{-\frac{3\pi}{4}} \cdot f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} \cdot (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$ (ΘΕΜΑ 2017)

$$19.149 \text{ Να βρείτε τα κρίσιμα της συνεχούς } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (\text{ΘΕΜΑ 2020})$$

19.150 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x + x^2 - e \cdot x - 1$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x_0) = x_0^2 - (e + 2) \cdot x_0 + e - 1$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right]$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x = x_0$ για $x \in (x_0, 1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ .

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x_0) > f(\rho) \cdot (f'(\kappa) + 1)$ για κάθε $\kappa \in (\rho, 1)$ (ΘΕΜΑ 2020/COVID)

19.151 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x \cdot \ln x - \ln(\lambda x)$, $x > 0$, $\lambda > 0$ και $g(x) = x^x$, $x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$, το οποίο να βρείτε.

Στην συνέχεια, να βρείτε την ευθεία που ανήκει το σημείο ακροτάτου της f , καθώς $\lambda > 0$

β) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει $x^x \geq \lambda x$ για κάθε $x > 0$. Αν $\lambda = 1$:

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ είναι η μοναδική εφαπτόμενη της C_g , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (ΘΕΜΑ 2020)

Η. Προβλήματα Μεγίστων – Ελαχίστων

19.152 Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με εμβαδόν 16 cm^2 να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου που έχει την μικρότερη περίμετρο.

19.153 Να αποδείξετε ότι από όλα τα οικόπεδα σχήματος ορθογωνίου με εμβαδόν 400 m^2 , το τετράγωνο χρειάζεται την μικρότερη περίφραξη (Σχολικό)

19.154 Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με περίμετρο 16 , να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

19.155 Με συρματοπλέγμα μήκους 80 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου. Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν (Σχολικό)

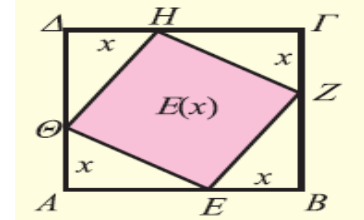
19.156 Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου έχει περίμετρο 400 m .

Αν το μήκος του είναι x m , τότε να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο , καθώς και ποια είναι η μέγιστη τιμή του εμβαδού .

19.157 Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο 20 cm και μήκος x cm .

Να βρείτε για ποια τιμή του x η διαγώνιος του παραλληλογράμμου έχει το ελάχιστο μήκος .

19.158 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος με πλευρά 2 cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ, να βρείτε το x ώστε το εμβαδόν του ΕΖΗΘ να γίνει ελάχιστο. (Σχολικό)



19.159 Με ένα σύρμα μήκους 4 m κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς x m και ένα τετράγωνο πλευράς y m . Να βρείτε:

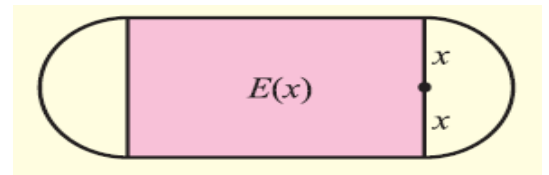
α) το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων συναρτήσει της πλευράς x

β) για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο (Σχολικό)

19.160 Ο στίβος του κλασικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ημικύκλια

Αν η περίμετρος του στίβου είναι 400 m ,

να βρείτε τις διαστάσεις του, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου μέρους του, να γίνεται μέγιστο . (Σχολικό)



19.161 Μια ώρα μετά τη λήψη x mgr ενός αντιπυρετικού, η μείωση της θερμοκρασίας ενός

ασθενούς δίνεται από την συνάρτηση $T(x) = x^2 - \frac{x^3}{4}$, $0 < x < 3$. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η δόση του αντιπυρετικού, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας να γίνει μέγιστος (Σχολικό)

19.162 Δίνονται τα σημεία $A(2, -\kappa)$, $B(\kappa + 1, 3)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του κ ώστε η απόσταση των σημείων να είναι ελάχιστη, καθώς και την απόσταση αυτή.

19.163 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2 - 4\alpha x + 16\alpha}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει ελάχιστη τιμή .

β) Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, η ελάχιστη τιμή της f γίνεται μέγιστη .

19.164 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 8\ln x + x^2 - 3x + 2$.Να βρείτε σε ποιο σημείο M της γραφικής παράστασης της f , ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης γίνεται ελάχιστος .

19.165 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$. Να βρείτε σε ποιο σημείο M της γραφικής παράστασης της f , ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης γίνεται μέγιστος .

19.166 Δίνεται η $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8x + 1$. Να βρείτε σε ποιο σημείο M της γραφικής παράστασης της f , ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης γίνεται ελάχιστος

19.167 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2\ln x$. Να βρείτε για ποια τιμή του x , ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x , γίνεται ελάχιστος .

19.168 Δίνεται η $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 4$ της οποίας η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο $A(-2, 0)$

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 3$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

γ) Να βρείτε σε ποιο σημείο M της C_f , ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης γίνεται ελάχιστος

19.169 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ και το σημείο $A(2, 0)$. Να βρείτε σημείο M της C_f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.

19.170 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A(\frac{9}{2}, 0)$.

α) Να βρείτε σημείο M της C_f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση

β) Να δείξετε ότι η εφαπτόμενη της C_f στο M είναι κάθετη στην AM **(Σχολικό)**

19.171 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 2$ και έστω (ϵ) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$. Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός σημείου $M(x, y)$ της εφαπτομένης (ϵ) έτσι ώστε η απόσταση του M από την αρχή των αξόνων να γίνεται ελάχιστη.

19.172 Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος είναι $K(x) = x^2 + 50x + 100$ σε ευρώ με $0 \leq x \leq 150$. Η είσπραξη από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος είναι $450 - x$ σε ευρώ. Να βρείτε την ημερήσια παραγωγή x του εργοστασίου για την οποία το κέρδος είναι μέγιστο και πόσο είναι αυτό

19.173 Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος είναι

$K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000$ σε ευρώ με $6 \leq x \leq 50$. Η είσπραξη από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος είναι $420 - 2x$ σε ευρώ. Να βρείτε την ημερήσια παραγωγή x του εργοστασίου για την οποία το κέρδος είναι μέγιστο και πόσο είναι αυτό

19.174 Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος είναι

$K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000$ σε ευρώ με $0 \leq x \leq 105$. Η είσπραξη από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος είναι $420x - 2x^2$ σε ευρώ. Να βρείτε την ημερήσια παραγωγή x του εργοστασίου για την οποία το κέρδος είναι μέγιστο και πόσο είναι αυτό **(Σχολικό)**

19.175 Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2 cm . Αν το τετράγωνο $EZH\Theta$ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του $AB\Gamma\Delta$:

α) Να εκφράσετε την πλευρά EZ συναρτήσει του x

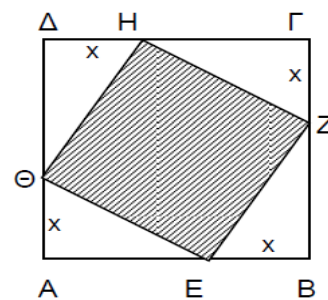
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τετραγώνου

$EZH\Theta$ δίνεται από την συνάρτηση

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, 0 \leq x \leq 2$$

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδό του τετραγώνου $EZH\Theta$ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου $EZH\Theta$ ισούται με $4e^{x_0} + 1 \text{ cm}^2$ **(ΘΕΜΑ 2017 Ε)**



19.176 Ένα σύρμα μήκους 8 m το κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι :

$$E(x) = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} \quad \text{με } 0 < x < 8$$

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με την διάμετρο του κύκλου

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m , ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2 (ΘΕΜΑ 2018)

11.177 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο $M(1, 1)$.

Έστω το σημείο $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση. (ΘΕΜΑ 2019Ε)

11.178 Ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας 1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και $\widehat{BOM} = \theta$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

ως συνάρτηση της γωνίας θ είναι :

$$E(\theta) = (1 + \sin\theta) \cdot \eta\mu\theta, \quad \theta \in (0, \pi)$$

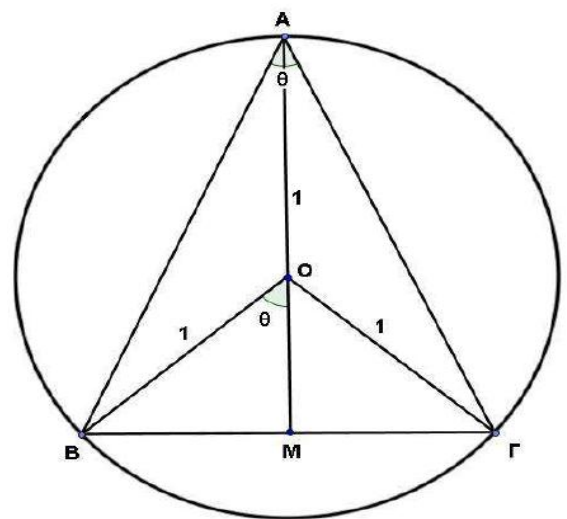
β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο γωνίες θ_1, θ_2 με $\theta_1 < \theta_2$ για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου

ισούται με $\frac{3}{4}$

δ) Για τις γωνίες θ_1, θ_2 του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \cdot E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) \cdot E'(\xi_2) \quad (\text{ΘΕΜΑ 2020})$$



Ο Πιερ ντε Φερμά (160 -1665)

ήταν Γάλλος νομικός και ερασιτέχνης μαθηματικός με μεγάλη συμβολή στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού.

Μαζί με τον Ρενέ Ντεκάρτ, ο Φερμά θεωρείται ένας από τους δύο κορυφαίους μαθηματικούς του πρώτου ημίσεος του 17ου αιώνα.

20. Κυρτότητα – Σημεία Καμπής

A. Ορισμός Κυρτής Συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι η f **στρέφει τα κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ . (2006)

B. Ορισμός Κοίλης Συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι η f **στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ . (2010 - 2014)

ΠΡΟΣΟΧΗ

► Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη C_f , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

► Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται πάνω από τη C_f , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Γ. Θεώρημα Κυρτότητας

● Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

- ① Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι **κυρτή** στο Δ .
- ② Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι **κοίλη** στο Δ .

► Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή, αν η f είναι κυρτή (ή κοίλη) στο Δ , τότε η δεύτερη παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική (ή αρνητική) στο εσωτερικό του Δ .

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν f συνεχής σε ένα διάστημα Δ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και f κυρτή στο Δ τότε θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

► Η πρόταση αυτή είναι ψευδής. Πράγματι :

► Η συνάρτηση $f(x) = x^4$ έχει $f'(x) = 4x^3$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα $\mathbb{R}$, επομένως η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, αλλά δεν ισχύει $f''(x) > 0$ αφού $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ μιας και $f''(0) = 0$

● Ομοίως για την κοίλη με $f(x) = -x^4$

Δ. Ορισμός Σημείου Καμπής

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν:

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως και
 - η έχει C_f εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$
- τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της C_f

ΠΡΟΣΟΧΗ

► Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f , τότε λέμε ότι η f **παρουσιάζει καμπή** στο x_0 και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**.

► Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f **διαπερνά** την καμπύλη.

Ε. Θεώρημα Σημείου Καμπής

● Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε $f''(x_0) = 0$

► Το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή αν $f''(x_0) = 0$, το $A(x_0, f(x_0))$ δεν είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της C_f .

Αν η f παρουσιάζει καμπή στο x_0 τότε

$$f''(x_0) = 0$$

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
και για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ και ισχύει $f''(x_0) = 0$, τότε το
 x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f (2017 E)

► Η πρόταση αυτή είναι ψευδής. Πράγματι :

► Η συνάρτηση $f(x) = x^4$, με $f''(x) = 12x^2$ έχει $f''(0) = 0$,
αλλά το 0 δεν είναι θέση σημείου καμπής της f ,
γιατί η συνάρτηση είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και επομένως δεν έχει σημεία καμπής.

Ζ. Πιθανές Θέσεις Σημείων Καμπής

● Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι :

- ① τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται
- ② τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''

► Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f'' είναι διάφορη του μηδενός
δεν είναι θέσεις σημείων καμπής

► Κριτήριο Σημείων Καμπής

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν :

- ① η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ② ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$,
τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

Ασκήσεις

A. Εύρεση Κυρτότητας - Σημείων Καμπής

20.1 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$

20.2 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 4$

20.3 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = x^4 - 6x^2 + 7x - 2$

20.4 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3$

20.5 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4}{4} - 6x^2$

20.6 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{8}{x}$

20.7 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$

20.8 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

20.9 Ομοίως: α) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2$ β) $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^3}$ (Σχολικό)

20.10 Ομοίως: α) $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ β) $f(x) = x^2 \cdot (2\ln x - 5)$ (Σχολικό)

20.11 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{-x}$

20.12 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = (x + 2) \cdot e^{-x}$

20.13 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

20.14 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = e^x (x^2 - 4x + 5)$

20.15 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = (x + 1) \cdot \ln x$

20.16 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = x - 2\ln x - \frac{1}{x}$

20.17 Ομοίως: α) $f(x) = e^{-x^2}$ β) $f(x) = \varepsilon\phi x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (Σχολικό)

20.18 Να βρείτε τα σημεία καμπής της $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ και να δείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο (Σχολικό)

20.19 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = 2x + x \cdot \ln x - e^{x-1}$

20.20 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την συνάρτηση $f(x) = \ln^3 x$

20.21 Να αποδείξετε ότι $\forall \alpha \in (-2, 2)$ η $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ (Σχολικό)

20.22 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1, & x < 0 \\ -x^3 + 3x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ (Σχολικό)

20.23 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5, & x < 0 \\ -x^3 + x^2 + 5, & x \geq 0 \end{cases}$

20.24 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 9x^2 + 12x, & x < 2 \\ 2x^3 - 12x^2 + 12x, & x \geq 2 \end{cases}$

20.25 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(x) + f(x) = e^{-x}$. Να βρείτε :

- α) τον τύπο της συνάρτησης
- β) την μονοτονία και τα ακρότατα της f
- γ) το σύνολο τιμών της f
- δ) την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f

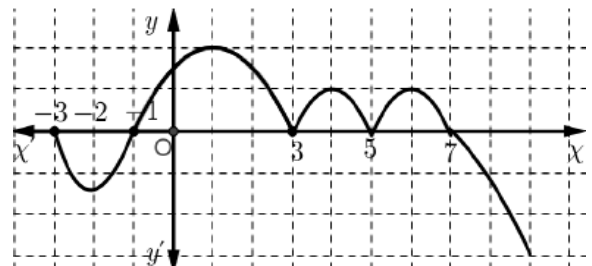
20.26 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(e) = e^2$ και $f'(x) = \frac{2f(x)}{x} - 2x$, $x > 0$

- α) Να δείξετε ότι η $g(x) = \frac{f(x)}{x^2} + 2\ln x$, $x > 0$ είναι σταθερή.
- β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης
- γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

20.27 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f .

Να βρείτε :

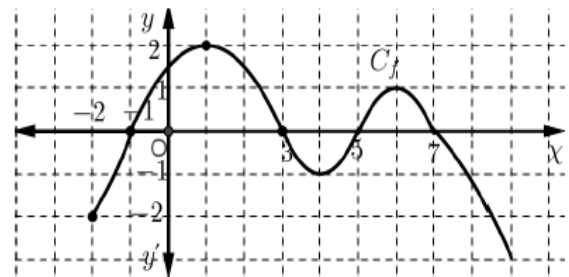
- α) τη μονοτονία και τα ακρότατα της f
- β) την κυρτότητα και τα Σ.Κ. της f



20.28 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f .

Να βρείτε :

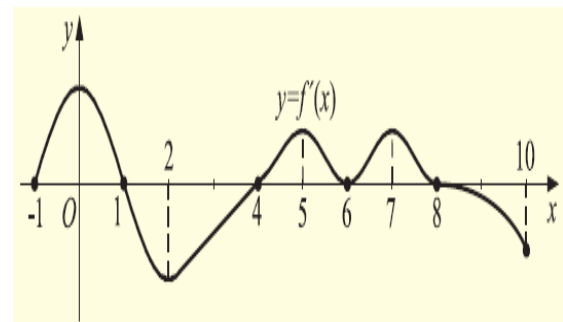
- α) τη μονοτονία και τα ακρότατα της f
- β) την κυρτότητα και τα Σ.Κ. της f



20.29 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f .

Να βρείτε :

- α) τη μονοτονία και τα ακρότατα της f
- β) την κυρτότητα και τα Σ.Κ. της f (Σχολικό)

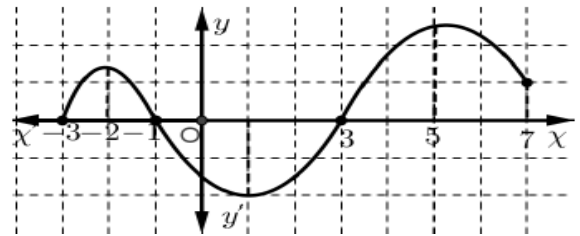


20.30 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f .

Να βρείτε :

γ) τη μονοτονία και τα ακρότατα της f

δ) την κυρτότητα και τα Σ.Κ. της f



20.31 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f .

Να βρείτε :

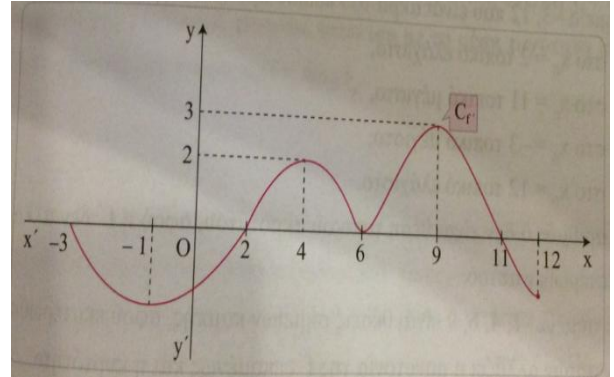
α) τη μονοτονία και τα ακρότατα της f

β) την κυρτότητα και τα Σ.Κ. της f

γ) το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (4, 9)$ τέτοιο, ώστε:

$$f''(\xi) = \frac{1}{5}$$



20.32 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $e^{f(x)} + f(x) = x, x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

20.33 Δίνεται η $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ Να δείξετε:

α) η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής

β) τα σημεία A, B, Γ με τετμημένες x_1, x_2 τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 τη θέση του σημείου καμπής αντίστοιχα, είναι συνευθειακά. (Σχολικό)

20.34 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την $f(x) = x^5 + x^3 + x$ (ΘΕΜΑ 2003)

20.35 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ (ΘΕΜΑ 2006)

20.36 Δίνεται η $f(x) = x^3 - 3x - 2\mu^2\theta, \theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ μια σταθερά.

Να δείξετε ότι η f έχει ένα σημείο καμπής.

(ΘΕΜΑ 2007)

20.37 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την $f(x) = e^x - \ln(x+1)$ (ΘΕΜΑ 2009)

20.38 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$ (ΘΕΜΑ 2010)

20.39 Να δείξετε ότι η $f(x) = \ln(e^x - x)$ έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής. (ΘΕΜΑ 2011)

20.40 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$ (ΘΕΜΑ 2014)

20.41 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (ΘΕΜΑ 2015)

20.42 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ (ΘΕΜΑ 2016)

20.43 Αν $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, να δείξετε ότι η f είναι κυρτή. (ΘΕΜΑ 2016)

20.44 Αν $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής (ΘΕΜΑ 2017)

20.45 Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα Σ.Κ. την $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$ (ΘΕΜΑ 2018)

20.46 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$, $\alpha > 1$. Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής (ΘΕΜΑ 2018)

Β. Εύρεση Παραμέτρων στην Κυρτότητα

20.47 Δίνεται η $f(x) = e^{2x} - 2\alpha x^2$. Να βρείτε το α ώστε η f να έχει θέση σημείου καμπής στο 1

20.48 Δίνεται η $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$. Να βρείτε τα α, β ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A(-1, 4)$

20.49 Δίνεται η $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$. Να βρείτε τα α, β ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A(1, 0)$

20.50 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 - \ln^2 x + \beta$. Να βρείτε τα α, β ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A(1, 5)$

20.51 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 + 2$. Να βρείτε τα α, β ώστε η C_f να έχει καμπή για $x = 1$ και $x = 2$

20.52 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 6x$. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο -1 και καμπή στο $\frac{1}{2}$, να βρείτε τα α, β .

Γ. Κυρτότητα και Εφαπτομένη

20.53 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^4$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$

γ) Να δείξετε ότι $\frac{2017 + 2x - x^4}{e^{2x} + 2016} \leq 1$

20.54 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$

γ) Να δείξετε ότι $e^{2x} \geq 1 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$

20.55 Δίνεται συνάρτηση $f: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = -1$

γ) Να δείξετε ότι $f(x) + 2e + 3ex \geq 0$

20.56 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x \cdot \ln x$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$

γ) Να δείξετε ότι $f(x) - e \cdot x \geq x - 1$

20.57 Δίνεται η $f(x) = (x + \alpha \cdot \ln x)^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: 8x - 2y + 2020 = 0$.

- α) Να βρείτε τον αριθμό α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε)
 β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
 γ) Να δείξετε ότι $3 + (x + \ln x)^2 \geq 4x$, $x > 0$.

20.58 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x + 1) \cdot \ln x$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
 β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
 γ) Να δείξετε ότι $\frac{1}{2} \cdot \ln x < \frac{x-1}{x+1}$, $x \in (0, 1)$

20.59 Δίνεται η $f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^{x-1}$.

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
 β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
 γ) Να δείξετε ότι $e^{x-1} \geq \frac{x+2}{x^2 - 4x + 6}$, $x \in \mathbb{R}$.

20.60 Δίνεται η $f(x) = \ln(1-x) + 5x - 2$.

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
 β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$
 γ) Να δείξετε ότι $e^{-x} \geq 1 - x$

20.61 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x+e^x}$.

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
 β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$
 γ) Να δείξετε ότι $e^{x+e^x-1} \geq 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

20.62 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
 β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $2f(x) = x - \ln 4$

20.63 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - \ln x$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
 β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $x = e^{x^4-3x+2}$

20.64 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+3}{e^x}$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
 β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x) + 3x - 3) = 3$
 δ) Να δείξετε ότι $\frac{x^2}{3} + 1 \geq (1-x)e^x$

20.65 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-1} - x + 1$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
 β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
 γ) Να δείξετε ότι $f(x) - x \geq 1$
 δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

20.66 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3x}{x - 1} = 4$

- α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
 β) Αν η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(x) - 7x + 4 \leq 0$, $x \in \mathbb{R}$

20.67 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
 β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
 γ) Να δείξετε ότι $\ln x \leq \frac{1}{x} + 2x - 3$, $\forall x > 0$.
 δ) Να λύσετε την εξίσωση $x^x \cdot e^{3x} - 2x^2 - 1 = 1$

20.68 Δίνεται παραγωγίσιμη $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$

και $f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x}$, $\forall x > 0$

- α) Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot \ln x$
 β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
 γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
 δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x - 1$
 ε) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x \cdot \ln x - x + 1}$

20.69 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x \cdot f(x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = 2$

- α) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f'(0)$ β) Να δείξετε ότι $f(x) \geq 2x$, $x \in \mathbb{R}$

20.70 Αν $f(x) = \ln \frac{1}{x}$ και $g(x) = x \ln \frac{1}{x}$ να δείξετε

- α) Η C_f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και η C_g στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω
 β) Οι C_f , C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτόμενη
 γ) $x \ln \frac{1}{x} \leq \ln \frac{1}{x}$, $x > 0$

20.71 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f

στο σημείο $A(0, f(0))$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να δείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς μια λύση. **(ΘΕΜΑ 2012 Ε)**

20.72 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\eta \mu x$, $x \in [0, \pi]$ και $\varepsilon : y = x - \pi$ εφαπτομένη της.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \eta \mu x}{\pi - x - \eta \mu x}$ **(ΘΕΜΑ 2017)**

20.73 Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2\eta \mu x - x$. Να αποδείξετε ότι $\forall x_0 \in [0, \pi]$ η C_f και η εφαπτόμενη στο $A(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο **(ΘΕΜΑ 2018 Ε)**

Δ. Κυρτότητα και άλλα Θεωρήματα

20.74 Δίνεται παραγωγίσιμη $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι κοίλη, να δείξετε $2f(x) > f(x+1) + f(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$.

20.75 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x \ln x$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
 β) Να αποδείξετε ότι $f(2x) + f(4x) > 2f(3x)$
 γ) Να αποδείξετε ότι $x^2 + \ln x \geq 4 - \frac{3}{x}$

Convex function
Κυρτή συνάρτηση

Concave function
Κοίλη συνάρτηση

Inflection point
Σημείο καμπής

20.76 Δίνεται συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή και ισχύουν $f(0) = 0, f(1) = 1$. Να δείξετε ότι $f(2) > 2$

20.77 Δίνεται παραγωγίσιμη $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι κοίλη και $f(1) = f(2) = 0$. Να δείξετε ότι:

- α) υπάρχει μοναδικός $\xi \in (1, 2) : f'(\xi) = 0$ β) η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση ξ
 γ) αν επιπλέον ισχύει $f'(1) = 1$, να δείξετε ότι $f(\xi) < 1$

20.78 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η f είναι κυρτή και η εφαπτομένη της C_f στο $A(0, f(0))$ έχει εξίσωση $y = 2x + 4$

- α) Να βρείτε τις τιμές $f'(0)$, $f(0)$ β) Να αποδείξετε ότι $f(-3) + f(3) > 8$
 γ) Να αποδείξετε ότι $f(x+2) - f(x) > 4, x > 0$

20.79 Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f''(x) < -4f(x) + 4f'(x), x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$

- α) Να δείξετε ότι η g είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$
 β) Αν η C_g εφάπτεται στον άξονα $x'x$ να δείξετε ότι $f(x) \leq 0, x \in \mathbb{R}$.

20.80 Αν η f είναι κυρτή και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι :

- α) υπάρχει $\xi \in \mathbb{R} : f'(\xi) > 0$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

20.81 Δίνεται η $f(x) = \ln(x+1) + x - 1$. Να δείξετε ότι :

- α) Η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη β) $f(5x) + 2f(2x) < 3f(3x), x > 0$
 γ) υπάρχει μοναδικό $\xi \in (3\alpha, 5\alpha)$ με $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε $f(5\alpha) + 2f(2\alpha) = 3f(\xi)$

20.82 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και $(x^2 + 1)^2 f'(x) = x(2 - x) + (x^2 + 1)f(x), x \in \mathbb{R}$

- α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$
 β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα
 γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
 δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f
 ε) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f(\xi^2 - \xi) = (1 - \xi)(2\xi - 1)f'(\xi^2 - \xi)$

20.83 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x - x$

- α) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή
 β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-1} = \frac{1}{x}$
 γ) Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της C_f προς την ευθεία $\delta: x + y + 1 = 0$, καθώς και την ελάχιστη απόσταση των σημείων της C_f από την ευθεία (δ).

20.84 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 4f(x) = 4x$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο
 β) Να ορίσετε την αντίστροφη
 γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
 δ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(e^{1-x} - x + 2) + e^{1-x} < 6 + x$

20.85 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = x$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο
 β) Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
 γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{f(x) - x}$

21. Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Ασκήσεις

21.1 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

21.2 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

21.3 Ομοίως για την $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ (Σχολικό)

21.4 Να μελετήσετε τη $f(x) = x^4 - 2x^2$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση (Σχολικό)

21.5 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση .

21.6 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x + 1}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

21.7 Να μελετήσετε τη $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση (Σχολικό)

21.8 Να μελετήσετε τη $f(x) = x + \frac{1}{x}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση . (Σχολικό)

21.9 Να μελετήσετε τη $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x - 1}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση .

21.10 Να μελετήσετε τη $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση (Σχολικό)

21.11 Να μελετήσετε τη $f(x) = \frac{1 + 2\ln x}{x}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

21.12 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x + \eta \mu x$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ (Σχολικό)

21.13 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 4}{x - 1}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση

έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ στην ευθεία $y = -x + 2$

α) Να βρείτε τα α, β

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση .

21.14 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 9}{x - 1}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση

έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ στην ευθεία $y = 2x - 7$

α) Να βρείτε τα α, β

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση .

21.15 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(\sqrt{3}) = 2$, $2xf(x) + x^2f'(x) = -3f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

21.16 Αν για την $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν $f''(x) = -\frac{2}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow e} f(x) = -e$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

21.17 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση (ΘΕΜΑ 2016)

21.18 Αν $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής, να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες και να κάνετε την γραφική της παράσταση (ΘΕΜΑ 2017)

21.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση (ΘΕΜΑ 2018)

21.20 Δίνεται η συνεχής $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & , x > 1 \\ x^2 + 1 & , x \leq 1 \end{cases}$. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση (ΘΕΜΑ 2018Ε)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ολοκληρωτικός Λογισμός

22. Αρχική Συνάρτηση

A. Ορισμός Αρχικής Συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .

Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f σε ένα διάστημα Δ , ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$

(2006 E–2011 E – 2014 E–2019 E)

B. Θεώρημα Παραγουσών

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .

Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε :

- ▶ Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ .
- ▶ Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει την μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

▶ Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ αφού :
 $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$

▶ Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν οι σχέσεις :
 $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε θα είναι και $F'(x) = G'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Άρα από το πόρισμα της σταθερής συνάρτησης θα υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$. (2003 E–2010–2015 E)

Γ. Πίνακας Παραγουσών Βασικών Συναρτήσεων

a/a	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$f(x) = 0$	$G(x) = c, c \in \mathbb{R}$
2	$f(x) = 1$	$G(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	$G(x) = \ln x + c, c \in \mathbb{R}$
4	$f(x) = x^\alpha, \alpha \neq -1$	$G(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, c \in \mathbb{R}$
5	$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$G(x) = \sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$
6	$f(x) = \sin x$	$G(x) = -\cos x + c, c \in \mathbb{R}$
7	$f(x) = \cos x$	$G(x) = \sin x + c, c \in \mathbb{R}$
8	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$G(x) = -\cot x + c, c \in \mathbb{R}$
9	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$G(x) = \tan x + c, c \in \mathbb{R}$
10	$f(x) = e^x$	$G(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R}$
11.	$f(x) = a^x$	$G(x) = \frac{a^x}{\ln a} + c, c \in \mathbb{R}$

Δ. Πίνακας Παραγουσών Συναρτήσεων που προκύπτουν από τους Κανόνες Παραγωγής

a/a	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$k(x) = f'(x) + g'(x)$	$K(x) = f(x) + g(x) + c, c \in \mathbb{R}$
2	$k(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	$K(x) = f(x) \cdot g(x) + c, c \in \mathbb{R}$
3	$k(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$	$K(x) = \frac{f(x)}{g(x)} + c, c \in \mathbb{R}$
4	$k(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$	$K(x) = g(f(x)) + c, c \in \mathbb{R}$

Ε. Πίνακας Παραγουσών Σύνθετων Συναρτήσεων

a/a	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$g(x) = f'(x)$	$G(x) = f(x) + c, c \in \mathbb{R}$
2	$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$G(x) = \ln f(x) + c, c \in \mathbb{R}$
3	$g(x) = f^\alpha(x) \cdot f'(x), \alpha \neq -1$	$G(x) = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c, c \in \mathbb{R}$
4	$g(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$G(x) = \sqrt{f(x)} + c, c \in \mathbb{R}$
5	$g(x) = \sin f(x) \cdot f'(x)$	$G(x) = \eta \mu f(x) + c, c \in \mathbb{R}$
6	$g(x) = \eta \mu f(x) \cdot f'(x)$	$G(x) = -\sin f(x) + c, c \in \mathbb{R}$
7	$g(x) = \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$	$G(x) = \varepsilon \phi f(x) + c, c \in \mathbb{R}$
8	$g(x) = \frac{f'(x)}{\eta \mu^2 f(x)}$	$G(x) = -\sigma \phi f(x) + c, c \in \mathbb{R}$
9	$g(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$G(x) = e^{f(x)} + c, c \in \mathbb{R}$
10	$g(x) = \alpha^{f(x)} \cdot f'(x)$	$G(x) = \frac{\alpha^{f(x)}}{\ln \alpha} + c, c \in \mathbb{R}$

Ασκήσεις

22.1 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν επιπλέον η F είναι μια παράγουσα της f με $F(1) = 0$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 2$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 1, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{x^2 - 2x + 1}$

Primitive function
Αρχική συνάρτηση

Anti-derivative function
Παράγουσα συνάρτηση

22.2 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ ώστε $F(0) = F(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = F(x)$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

22.3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$ και F μια παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2, 4) : f'(\xi)F(\xi) = f(\xi)(\sqrt{2} - f(\xi))$

22.4 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ ώστε $F(0) = 0$ και $2f(x) - e^{x - F(x)} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f

22.5 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ ώστε $F(1) = 3$ που ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = (2x + 1)e^{x^2 + x - F(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f

22.6 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ ώστε $F(0) = 1$ και $F(x)f(x) = -e^{-2x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f

22.7 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ ώστε $F(0) = 1$ που ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = e^x + F(x)$. Να βρείτε τον τύπο της f

22.8 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ ώστε $F(0) = 1$ που ικανοποιεί τη σχέση $(F(x) - x) \cdot (f(x) - 1) = x$. Να βρείτε τον τύπο της f

22.9 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια παράγουσά της στο $(0, +\infty)$ με $F(1) = 0$. Αν ισχύει $F(x) \leq e^{-x^2} \ln x, \forall x > 0$, να δείξετε ότι $f(1) = \frac{1}{e}$

22.10 Δίνεται συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Αν επιπλέον η F είναι μια παράγουσα της f και για τη $G(x) = F(x) - x^2 + 3$, ισχύει $G(x) \geq G(1)$ να βρείτε τη μονοτονία της F

22.11 Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω F η παράγουσα της f . Να αποδείξετε ότι $3 \cdot F(x) < F(2x) + 2F\left(\frac{x}{2}\right), \forall x > 0$

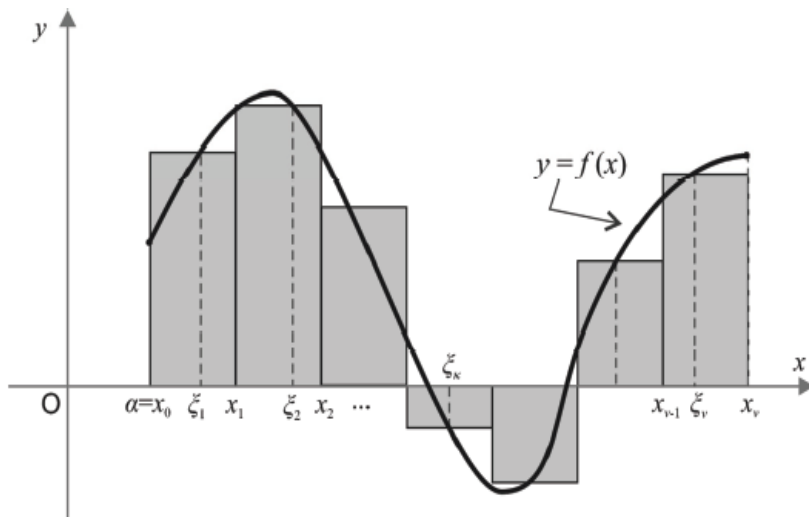
22.12 Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω F η παράγουσα της f . Να αποδείξετε ότι $(x + 1) \cdot F(x) > x \cdot F(1) + F(x^2), \forall x > 1$

22.13 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω F η παράγουσα της f . Αν η συνάρτηση F δεν είναι 1-1, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

23. Ορισμένο Ολοκλήρωμα

A. Η Έννοια του Ορισμένου Ολοκληρώματος

● Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



► Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{n}$ το καθένα, με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta$.

► Επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ και σχηματίζουμε το άθροισμα :

$$S_n = f(\xi_1) \cdot \Delta x + f(\xi_2) \cdot \Delta x + \dots + f(\xi_k) \cdot \Delta x + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x = (f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_k) + \dots + f(\xi_n)) \cdot \Delta x$$

$$\Leftrightarrow S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x \quad \text{το οποίο ονομάζεται και } \mathbf{\acute{\alpha}\theta\rho\omicron\iota\sigma\mu\alpha \text{ Riemann}}$$

► Αποδεικνύεται ότι το όριο του αθροίσματος S_n για $n \rightarrow +\infty$, δηλαδή το $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x)$, υπάρχει, είναι πραγματικός αριθμός και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιαμέσων σημείων ξ_k

► Το παραπάνω όριο ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β , συμβολίζεται με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ και διαβάζεται «ολοκλήρωμα της f από το α στο β »

$$\text{Δηλαδή: } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x)$$

B. Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος

① Οι αριθμοί α και β λέγονται όρια της ολοκλήρωσης.

② Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι πραγματικός αριθμός.

Στην έκφραση $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, το x είναι μια μεταβλητή που μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα οι εκφράσεις $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα.

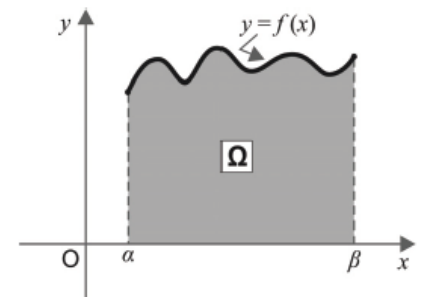
③ Αν $\alpha > \beta$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$

④ Αν $\alpha = \beta$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$

⑤ Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$. Δηλαδή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = E(\Omega)$

Επομένως

$$\text{Αν } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta] \text{ τότε} \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$$



⑥ Έστω f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν :

$$\blacktriangleright \int_{\alpha}^{\beta} \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

$$\blacktriangleright \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

$$\blacktriangleright \int_{\alpha}^{\beta} [\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)] dx = \lambda \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

⑦ Αν f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

⑧ Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

$$\text{Αν } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta] \text{ και η } f \text{ δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό,} \\ \text{τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$$

⑨ Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$, για τις οποίες ισχύει $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

$\blacktriangleright$ Αν $f(x) \geq g(x)$ και δεν είναι ίσες για όλα τα $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

Γ. Η Συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$

● Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α ένα σημείο του Δ , τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$, $x \in \Delta$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ . Δηλαδή ισχύει :

$$\left(\int_{\alpha}^x f(t)dt \right)' = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Δ. Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

● Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f , αφού $F'(x) = \left(\int_{\alpha}^x f(t)dt \right)' = f(x)$.

Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε : $G(x) = F(x) + c$. (1)

► Για $x = \alpha$ η (1) $\Rightarrow G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, άρα $c = G(\alpha)$, άρα $G(x) = F(x) + G(\alpha)$ (2)

► Οπότε $x = \beta$ η (2) $\Rightarrow G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) \Leftrightarrow G(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha) \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

(2002–2008 E–2013)

Ε. Παραγοντική Ολοκλήρωση

● Έστω f, g δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[\alpha, \beta]$. Η μέθοδος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες ή παραγοντική ολοκλήρωση εκφράζεται από τον τύπο :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g'(x)dx = [f(x) \cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \cdot g(x)dx$$

Ασκήσεις

Α. Υπολογισμός Βασικών Ολοκληρωμάτων

23.1 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_1^2 (x^2 - 4x + 3)dx$ β) $\int_{-2}^1 (3x^2 - 4x)dx$
 γ) $\int_{-2}^{-1} (4x^3 - 6x^2 + 2x)dx$ δ) $\int_4^9 \sqrt{x} dx$



23.2 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 (e^x + x)dx$ β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x) dx$
 γ) $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}} dx$ δ) $\int_{-1}^2 12x(x-1)^2 dx$

23.3 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x + 2\eta\mu x)dx$ β) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{\eta\mu^2 x}\right) dx$ γ) $\int_1^2 \left(3^x - \frac{5}{x^2}\right) dx$ δ) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right) dx$

23.4 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 (3x^2 - x - 1)dx$ β) $\int_0^1 (-\eta\mu\pi x + e^x) dx$ γ) $\int_1^2 \left(2^x + \frac{3x+2}{x^2}\right) dx$ δ) $\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$

23.5 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 2^x \cdot e^x dx$ β) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ γ) $\int_0^1 (e^x - e^{-x})dx$ δ) $\int_1^4 \frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} dx$

23.6 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_1^2 \frac{x^2 + x - 1}{x} dx$ β) $\int_1^2 \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x} dx$ γ) $\int_1^2 \frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{x^2} dx$ δ) $\int_0^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

23.7 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_{-1}^2 (x+1)e^x dx$ β) $\int_0^{\pi} (2x\sigma\upsilon\nu x - x^2\eta\mu x) dx$ γ) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^3} dx$ δ) $\int_1^2 \frac{xe^x - 2e^x}{x^3} dx$

23.8 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x)dx$ β) $\int_0^1 x^2 e^x (x+3)dx$ γ) $\int_{\pi}^{2\pi} \left(\ln x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \frac{\eta\mu x}{x}\right) dx$ δ) $\int_0^1 x e^x (2+x) dx$

23.9 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x \eta\mu x - x^2 \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} dx$ β) $\int_0^{\pi} \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{e^x} dx$ γ) $\int_1^e \frac{1 - \ln x}{x^2} dx$ δ) $\int_2^e \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx$

23.10 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$ β) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{\eta\mu x+3}} dx$ δ) $\int_2^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$

B. Υπολογισμός Ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{g(x)} dx$

23.11 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_4^5 \frac{1}{2x-6} dx$ β) $\int_0^1 \frac{e^x + 2x}{e^x + x^2} dx$

γ) $\int_1^2 \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$

23.12 Να υπολογίσετε τα: α) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2 + 2x + 3} dx$

β) $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x} dx$ γ) $\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx$

Το σύμβολο της ολοκλήρωσης

είναι ένα επίμηκες S

Το S σημαίνει άθροισμα, από την
Λατινική λέξη sum

23.13 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_3^4 \frac{2x-5}{x^2-3x+2} dx$ β) $\int_4^5 \frac{2}{x^2-2x-3} dx$

23.14 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_3^4 \frac{1}{x^2-4} dx$ β) $\int_2^3 \frac{2x-3}{x^2-x} dx$

23.15 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+3x+2} dx$ β) $\int_0^1 \frac{4x-1}{2x^2-x-3} dx$

23.16 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_{-1}^0 \frac{2x+1}{x^2-4x+3} dx$ β) $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2-5x+6} dx$

23.17 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_3^4 \frac{4}{x^3-4x} dx$ β) $\int_1^2 \frac{1}{x \cdot (x+1)} dx$

23.18 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_0^1 \frac{x-2}{x+3} dx$ β) $\int_2^3 \frac{3x-1}{x-1} dx$

23.19 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{x-1} dx$ β) $\int_{-1}^0 \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2} dx$

23.20 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_3^4 \frac{x^3-3x^2+5x-5}{x^2-3x+2} dx$ β) $\int_5^6 \frac{2x^3-5x^2-16x+22}{x^2-2x-8} dx$

23.21 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_2^3 \frac{x^3+x^2-2x-1}{x^2-x} dx$ β) $\int_2^3 \frac{x^2-x-2}{x+3} dx$

23.22 Να βρεθούν τα ολοκληρώματα α) $\int_{-1}^0 \frac{3x-5}{x^2-3x+2} dx$ β) $\int_1^2 \frac{6x-5}{3x-2} dx$ γ) $\int_0^{\pi} \frac{1-\eta\mu x}{x+\sigma\upsilon\nu x} dx$

23.23 Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\alpha} \frac{e^x+1}{e^x+x} dx - \alpha \right)$

Γ. Παραγοντική Ολοκλήρωση

23.24 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_1^2 (x^2-3x)e^x dx$ β) $\int_0^1 \frac{x^2+x}{e^x} dx$

23.25 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_1^2 x \cdot 5^x dx$ β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \eta\mu x dx$

23.26 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx$ β) $\int_0^1 x^2 \cdot e^{-x} dx$

23.27 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$ β) $\int_1^e x^3 \ln x dx$

23.28 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$ β) $\int_1^e \ln^2 x dx$

23.29 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_0^1 \ln(x+1) dx$ β) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

23.30 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin 2x} dx$ β) $\int_1^e (3x^2 - 2ex) \ln x dx$

23.31 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_0^{\pi} e^x \eta \mu x dx$ β) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{e^x} dx$

23.32 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \eta \mu x dx$ β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \eta \mu 2x dx$

23.33 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_0^1 (x^2 + 1)e^{2x} dx$ β) $\int_1^2 (2x + 2) \ln x dx$

23.34 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$. Να υπολογίσετε :

α) το ολοκλήρωμα $\int_0^{\alpha} f(x) dx$ β) το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\alpha^2} \cdot \int_0^{\alpha} f(x) dx \right)$

23.35 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x \cdot \ln x$. Να υπολογίσετε :

α) το ολοκλήρωμα $\int_1^{\alpha} f(x) dx$ β) το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\int_1^{\alpha} f(x) dx}{(\alpha-1)^2}$

23.36 Έστω F μια παράγουσα στο $\mathbb{R}$ της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ με $F(1) = 0$.

Να βρείτε το ολοκλήρωμα : $A = \int_0^1 F(x) dx$

23.37 Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2e^{x^2}$ και F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Αν η C_F τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1, f(1))$, να βρείτε το $A = \int_0^1 F(x) dx$

23.38 α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha) = \int_{\alpha}^0 (2x^2 - 3x)e^x dx$

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha)$ (ΘΕΜΑ 2004)

23.39 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 x e^{2x} dx$ (ΘΕΜΑ 2009 Ε)

Δ. Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση

23.40 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_1^2 (x-1)^3 dx$ β) $\int_0^1 (x-1)^3 (2x-1) dx$

23.41 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_0^1 (2x+1)^4 dx$ β) $\int_{-1}^1 (x^2 - x + 2)^3 (2x-1) dx$

23.42 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_0^3 x\sqrt{x+1} \, dx$ β) $\int_{\ln 3}^{3\ln 2} \sqrt{1+e^x} \, dx$

23.43 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} \, dx$ β) $\int_{-1}^0 x\sqrt{1-x} \, dx$

23.44 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_0^1 \frac{1}{3x+1} \, dx$ β) $\int_1^2 e^{4x-8} \, dx$

23.45 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^2} \, dx$ β) $\int_0^3 e^{3x-9} \, dx$

23.46 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}} \, dx$ β) $\int_1^3 \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx$

23.47 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x} \, dx$ β) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2} \, dx$

23.48 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$ β) $\int_0^1 (2x+1)e^{x^2+x} \, dx$

23.49 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_0^{\pi} (1-\eta\mu x)^4 \sin x \, dx$ β) $\int_0^1 12(3x+1)^3 \, dx$

23.50 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} \, dx$ β) $\int_1^e \frac{(\ln x)^{2017}}{x} \, dx$

23.51 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} \, dx$ β) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \, dx$ γ) $\int_1^e \frac{\ln x}{x \cdot \sqrt{1+\ln x}} \, dx$

23.52 Να βρεθούν τα ολοκληρώματα α) $\int_{-1}^0 x(x+1)^7 \, dx$ β) $\int_{-2}^{-1} x\sqrt{x+2} \, dx$ γ) $\int_1^3 \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx$

23.53 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_e^{2e} \frac{1}{x \cdot \ln^3 x} \, dx$ β) $\int_0^1 \frac{x+3}{(x^2+6x)^5} \, dx$

23.54 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_e^{e^4} \frac{1+\ln x}{\sqrt{3+x\ln x}} \, dx$ β) $\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}} \, dx$

23.55 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής. Να δείξετε ότι :

α) $\int_0^1 f(x-2) \, dx = \int_{-2}^{-1} f(x) \, dx$ β) $\int_0^1 f(2x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) \, dx$

23.56 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) + f(-x) = 1$.

Να βρείτε το ολοκλήρωμα $A = \int_{-2}^2 f(x) \, dx$

23.57 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\int_0^4 f(x) \, dx = 9$. Να βρείτε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^2 x \cdot f(x^2) \, dx$ β) $\int_1^{e^4} \frac{f(\ln x)}{x} \, dx$

23.58 Να αποδείξετε ότι : α) $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx$ β) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x f(1-e^x) \, dx = \int_{-1}^{-2} f(x) \, dx$

23.59 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\int_0^2 (x f'(x^2) + 1) \, dx = 4$. Να δείξετε ότι

α) υπάρχει $\rho \in (0, 4) : f'(\rho) = 1$. β) υπάρχει $\xi \in (0, 4) : f'(\xi) = \frac{\xi}{2}$

23.60 Δίνεται παραγωγίσιμη $f : [\alpha, \beta] \rightarrow (0, +\infty)$ με συνεχή παράγωγο ώστε $f(\alpha) = 1$ και $f(\beta) = 2$
 Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(x)}{f^2(x)+f(x)} dx$

23.61 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 x [2x + \ln(x^2 + 1)] dx$ (ΘΕΜΑ 2010)

23.62 Δίνεται η $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2\eta\mu x - x$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin x dx$ (ΘΕΜΑ 2018Ε)

Ε. Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος

23.63 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 1 \\ 3x^2 - 6x + 8, & x > 1 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής

β) Να βρείτε τα ολοκληρώματα $A = \int_{-4}^{-2} f(x) dx$, $B = \int_2^4 f(x) dx$, $\Gamma = \int_{-1}^3 f(x) dx$

23.64 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ e^x + 2, & x > 0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $A = \int_{-1}^1 f(x) dx$

23.65 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \cdot e^x, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f(x) dx$

23.66 Να υπολογίσετε τα : α) $\int_{-2}^2 (|x+1| + x - 4) dx$ β) $\int_{-2}^4 (3|x^2 - 2x - 3| + 4) dx$

23.67 Να υπολογίσετε τα : α) $\int_0^2 |x-1| dx$ β) $\int_1^3 |x^2 - 4| dx$ γ) $\int_0^1 \sqrt{x^2 - 8x + 16} dx$

23.68 Να βρείτε το ολοκλήρωμα $A = \int_{-1}^1 |e^x + 4x^3 - 1| dx$

23.69 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $A = \int_1^2 |f(x) - x + 1| dx$

23.70 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x, & x \leq 1 \\ 2x - \beta, & x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής και να ισχύει $\int_{-1}^2 f(x) dx = 9$

23.71 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} e^x + \alpha, & x \leq 1 \\ \beta \cdot \frac{\ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής και να ισχύει $\int_0^e f(x) dx = 1$

23.72 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α για τον οποίο ισχύει $\int_{-\alpha}^{\alpha} (4x + 6) dx = 36$.

23.73 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε $\int_{\lambda+3}^{\lambda^2+1} \frac{4x^2-3x-5}{x^2+4} dx + \int_{\lambda^2+1}^{\lambda+3} \frac{3x^2-3x-9}{x^2+4} dx = \int_{-1}^1 2 dx$

23.74 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α ώστε $\int_1^3 \frac{e^x + x^3 - x}{x^2 + 1} dx = \int_{-3}^1 \alpha dx + \int_3^1 \frac{x^3 + 3x - e^x}{x^2 + 1} dx$

23.75 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε $\int_{\lambda}^{3\lambda+2} \frac{\ln x + 6}{x^2 + 2} dx - \int_{-5}^4 2 dx = \int_{3\lambda+2}^{\lambda} \frac{3x^2 - \ln x}{x^2 + 2} dx$

23.76 Να δείξετε ότι: $2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot f'(x) dx = [f(\beta)]^2 - [f(\alpha)]^2$.

23.77 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με συνεχή πρώτη παράγωγο ώστε $f(1) = 2$.

Να βρείτε τα ολοκληρώματα: α) $A = \int_0^1 (f(x) + x \cdot f'(x)) dx$ β) $B = \int_0^1 \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{x \cdot f'(x)}{f^2(x)} \right) dx$

23.78 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο ώστε $f(1) = \frac{3}{e}$, $f(0) = 1$.

Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 e^x (f(x) + f'(x)) dx$.

23.79 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(2, 1)$ να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 x(2f(x) + xf'(x)) dx$

23.80 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο ώστε $f(1) = 5$, $\int_0^1 f(x) dx = 2$.

Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 x f'(x) dx$

23.81 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύουν $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \int_0^1 2x \cdot f(x) dx + \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx$ β) $B = \int_0^1 (f'(x) + x \cdot f''(x)) dx$

γ) $\Gamma = \int_0^1 \left(f'(x) \cdot \ln(x+1) + \frac{f(x)}{x+1} \right) dx$

23.82 Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο ώστε $f(1) = \ln 2$.

Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \left(1 + x \cdot f'(x) \right) \cdot e^{f(x)} dx$

23.83 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύουν $f(1) = 3$, $f'(1) = 2$ και $\int_0^1 f(x) dx = 5$. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 x^2 f''(x) dx$

23.84 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Οι εφαπτόμενες της C_f στα $A(1, 2)$ και $B(3, 9)$ τέμνονται στο σημείο $\Gamma(4, 11)$. Να βρείτε:

α) τις τιμές $f'(1)$, $f'(3)$

β) το ολοκλήρωμα $\int_1^3 x f''(x) dx$

23.85 Δίνεται η $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 3x + 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_0^1 f(x) dx = \frac{15}{4}$. Να βρείτε:

α) τον πραγματικό αριθμό α

β) το ολοκλήρωμα $\int_1^3 \frac{f(x)}{f'(x)} dx$

23.86 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, για την οποία ισχύει $\int_{-1}^1 f(x)dx = 12$ ενώ η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = 2x + 2$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

23.87 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(2) = e^3 f(1)$.

Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $A = \int_1^2 \frac{f'(x) + 4f(x)}{f(x)} dx$

23.88 Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο ώστε $f(1) = 5, \int_1^2 (xf'(x) + f(x))dx = 1$. Να βρείτε:

α) την τιμή $f(2)$

β) το ολοκλήρωμα $\int_1^2 x^2 (3f(x) + xf'(x)) dx$

23.89 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και τέτοια, ώστε $\int_0^1 (xf'(x) + 2f(x))dx = 0$, να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx = -f(1)$

23.90 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο ώστε $\int_0^1 f(x)dx = f(0)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε: $\int_0^1 xf'(x) dx = f'(\xi)$

23.91 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x) = -2f(x)$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο α και στο β , να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta x^2 f(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$

23.92 Έστω μια συνάρτηση g με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, \pi]$.

Αν $g(\pi) = 1$ και ισχύει $\int_0^\pi [g(x) + g''(x)] \cdot \etaμ x dx = 3$, να βρείτε το $g(0)$

23.93 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(0) = 1$, $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = 1$

Να βρείτε: α) την τιμή $f(1)$ β) το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{2xf^2(x) + e^x f(x) - e^x f'(x)}{f^2(x)} dx$

23.94 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει $\int_0^1 e^x (f'(x) + f''(x)) dx = 3$ και ο ρυθμός μεταβολής της f στο $x_0 = 1$ είναι $\frac{2}{e}$.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(0, 3)$

23.95 Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο.

Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (0, 1): \int_0^1 xf''(x)dx = f'(1) - f'(\xi)$

23.96 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με συνεχή παράγωγο, ώστε $\int_\alpha^\beta \frac{f'(x)}{f(x)} dx = 0$ με $\alpha < \beta$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (α, β)

23.97 Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο και η C_f διέρχεται από τα $A(1, 2), B(0, 3)$. Αν είναι $\int_0^1 xf''(x)dx = 0$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ σχηματίζει γωνία $\frac{3\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$

β) $\exists \xi \in (0, 1): f'(\xi) = f'(1)$

23.98 Δίνεται η παραγωγίσιμη $f: [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ ώστε να ισχύει $f'(x) - f(x) = f^2(x), \forall x \in [0, 1]$

Αν είναι $f(1) = e^2 f(0)$, να βρείτε το $\int_0^1 f(x)dx$

23.99 Αν μια συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, \pi]$ με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ και $\int_0^{\pi} [f''(x) + f(x)] \sin x \, dx = 0$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f στο 0.

23.100 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2$ και η C_f διέρχεται από το $A(0,1)$. Αν $\int_0^2 (xf''(x) + 3f'(x)) \, dx = 4$ τότε:

α) να βρείτε την τιμή $f(2)$

β) να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \frac{2f'(x)}{f^2(x) + 2f(x)} \, dx$

γ) να δείξετε ότι $\exists \xi \in (0, 2): f'(\xi) = 1$

23.101 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω F η αρχική της f ώστε να ισχύει $F(1)=0$ και $(x-2)F(x) \leq e^{x-2} - x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $\int_1^2 f(t) \, dt$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2): f(\xi) + F(\xi) = 0$.

23.102 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, $f'(x) = -\frac{2x}{x^2+1} \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Αν $F(x)$ είναι αρχική της $f(x)$ με $F(1) = 0$ να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 F(x) \, dx$

23.103 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή $f'(x)$ και έστω F η αρχική της f ώστε να ισχύει $F(1) = 0$ και $x F(x) \geq xe^x - e^x - x + 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(1) = e - 1$, $\int_0^1 f(t) \, dt = 1$

β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x f'(x) \, dx$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + F(x) = e^{-x}$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0, 1)$.

23.104 Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(x) \, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

23.105 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = 2x + \int_0^2 f(x) \, dx$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την f .

23.106 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = 9x^2 - \int_{-1}^1 2xf(t) \, dt$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την f .

23.107 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε να ισχύει $f(x) = \frac{1}{x} + 2 \int_1^2 t f(t) \, dt$, $x > 0$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

23.108 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_0^{\pi} f(t) \, dt = f(x) + 6$.

Να βρείτε την f και το ολοκλήρωμα $\int_{2016}^{2014} f(x) \, dx$

23.109 Να βρείτε συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει $\int_0^{\pi/3} \eta \mu x \cdot f(x) \, dx = f(x) + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

23.110 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 2$, $f'(x) = f(x) - \int_0^1 (f(x) - e^x) \, dx$. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x + 1$

23.111 Να βρείτε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_0^1 e^{1-x} f(x) \, dx = f(x) + e^x$.

23.112 Δίνεται η παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) = e^{x-f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Αν ισχύει $\int_0^1 x e^{f(x)} dx = 4$, να βρείτε την f

23.113 Δίνεται η συνεχής $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \cdot f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + 2$, $f(x) > 0$

Να βρείτε το ολοκλήρωμα $A = \int_0^1 f(x) dx$

23.114 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με $\int_0^1 f(x) \left(\int_0^1 f(x) dx \right) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx + 3$.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x) dx$

23.115 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{\int_0^1 f(x) dx} = \int_0^1 (f(x) + 3x^2) dx$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) dx$.

23.116 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $e^{x \cdot \int_0^1 f(t) dt} + x^2 - x \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(t) dt$

23.117 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$. Να αποδείξετε ότι :

α) $f'(x)\sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$

β) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(\sqrt{2} + 1)$ (ΘΕΜΑ 2003 Ε)

23.118 Δίνεται η συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt - 45$.

Να δείξετε ότι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$. (ΘΕΜΑ 2008)

23.119 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και άρτια συνάρτηση.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ (ΘΕΜΑ 2016 Ε)

Ζ. Εύρεση Ολοκληρώματος Αντίστροφης

23.120 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$.

23.121 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x + 3$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^6 f^{-1}(x) dx$.

23.122 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x^3 - 3$

α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-3}^0 f^{-1}(x) dx$.

23.123 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x + 1$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f^{-1}(x) dx$.

23.124 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f^{-1}(x)dx$.

23.125 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^e f^{-1}(x)dx$.

23.126 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx$.

23.127 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 2x - 5$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη

β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_{-4}^{e-3} f^{-1}(x)dx$.

23.128 Δίνεται η $f(x) = \ln x - x - e^x$, $x > 1$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x)dx$.

23.129 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x) = x + \ln x$, $x > 0$.

Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e+1} f(x)dx$

23.130 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, ώστε να ισχύει $f^3(x) + f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να ορίσετε την αντίστροφη

β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^2 f(x)dx$

23.131 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, ώστε να ισχύει $e^{f(x)} + f(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να ορίσετε την αντίστροφη

β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^e f(x)dx$

23.132 Δίνεται συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $[1, 10]$ της οποίας η γραφική παράσταση

διέρχεται από τα σημεία $A(1, 8)$ και $B(10, 13)$. Να δείξετε ότι: $\int_1^{10} f(x)dx + \int_8^{13} f^{-1}(x)dx = 122$

23.133 Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(\sqrt{e}) = 2$, $xf'(x)\ln x + f(x) = 0$, $x > 1$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να ορίσετε την αντίστροφη

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x} dx + \int_1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{x}} dx$

23.134 Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2e^x + 2x^3 - x^2 - 2x - 2$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^{2e-3} f^{-1}(x)dx$.

23.135 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x - 1) > x$

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$

δ) Να υπολογίσετε το $\int_{f(1)}^{f(e)} f^{-1}(x) dx$.

Η. Εύρεση Αναγωγικού Τύπου

23.136 Αν ισχύει ότι $I_v = \int_1^e \ln^v x dx$ να δείξετε ότι $I_v + v \cdot I_{v-1} = e$.

23.137 Αν ισχύει ότι $I_v = \int_0^2 x^v e^x dx$ να δείξετε ότι $I_v = 2ve^2 - v \cdot I_{v-1}$, $v \geq 2$

23.138 Δίνεται το ολοκλήρωμα $I_v = \int_0^\pi x^v \sin x dx$, $v \in \mathbb{N}^*$.

α) Να δείξετε ότι $I_v = -v\pi^{v-1} - v(v-1)I_{v-2}$ για κάθε $v \geq 4$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi x^5 \sin x dx$

Θ. Ανισότητες και Ολοκληρώματα

23.139 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - x + 1$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

β) Να δείξετε ότι $\int_1^2 x^x dx > e - 1$

23.140 Να δείξετε ότι $2 \leq e^4 \int_0^2 e^{x^3-3x^2} dx \leq 2e^4$.

23.141 Να δείξετε ότι $1 \leq \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx \leq \sqrt{2}$

23.142 Να δείξετε ότι $12 \leq \int_0^4 \sqrt{x^2 + 9} dx \leq \sqrt{20}$

23.143 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

β) Να δείξετε ότι $\frac{e-1}{e} \leq \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \leq \frac{e-1}{2}$

23.144 Να αποδείξετε ότι: α) $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$, $x > 0$ β) $\int_1^{17} x^e dx < \int_1^{17} e^x dx$

23.145 Να αποδείξετε ότι: α) $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$, $x > 0$ β) $\int_1^2 x^x dx \geq e - 1$.

23.146 Να δείξετε ότι: α) $x^2 \ln x + 2 > x$, $x > 1$ β) $\int_2^4 x^2 \ln x dx > 2$

23.147 Να αποδείξετε ότι: α) $(x+1) \cdot \ln(x+1) \geq x$, $x > -1$ β) $\int_0^1 (x+1)^{x+1} dx > e - 1$

23.148 Να αποδείξετε ότι: α) $\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$, $x > 1$ β) $1 < \int_2^{e+1} \frac{1}{\ln x} dx < e$

23.149 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να δείξετε ότι $\int_1^2 x^x dx > e - 1$

23.150 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$.

α) Να δείξετε ότι f είναι κυρτή.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

γ) Να δείξετε ότι $\int_0^2 e^{x^2} dx > 2e$.

23.151 Δίνεται η $f(x) = \ln(1-x) + 5x - 2$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

γ) Να δείξετε ότι $e^{-x} \geq 1 - x$, $x < 1$

δ) Να δείξετε ότι $\int_{-1}^0 [\ln(1-x) + 5x] dx \leq -2$

23.152 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx > \frac{1}{2}$

23.153 Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, παραγωγίσιμη ώστε $f'(x) + f(x) > 2xe^{-x}$, $x \in [0, 1]$.

Να δείξετε ότι $3 \int_0^1 e^x f(x) dx > 1$.

23.154 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, $f(0)=0$ και να ισχύει $f'(x) + 2xf(x) > 2xe^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx > \frac{e-1}{e}$.

23.155 Δίνεται η $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ώστε $f(0) = 0$, $f(1) = 3$ και $f'(x) > 2$, $\forall x \in [0, 1]$.

Να δείξετε ότι: $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 2$.

23.156 Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα, με συνεχή δεύτερη

παράγωγο, $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi$. Να δείξετε ότι $0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$ (ΘΕΜΑ 2016)

23.157 Δίνεται η $f(x) = -\eta \mu x$, $x \in [0, \pi]$ και $\varepsilon: y = x - \pi$ εφαπτομένη της.

Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$ (ΘΕΜΑ 2017)



Ο Γκεόργκ Φρίντριχ Μπέρναρντ Ρίμαν (1826 – 1866)

ήταν Γερμανός μαθηματικός που συνεισέφερε σημαντικά στη Μαθηματική Ανάλυση, την Τοπολογία, την Αναλυτική Θεωρία των αριθμών και τη Διαφορική Γεωμετρία.

Ο **Riemann** ήταν αυτός που έδωσε έναν αυστηρό μαθηματικό ορισμό του ολοκληρώματος.

24. Εμβαδόν Επίπεδου Χωρίου

A. Εμβαδόν μεταξύ C_f του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = \alpha$ και $x = \beta$

● Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha$ και $x = \beta$.

① Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω ισούται με : $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$

② Αν $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω ισούται με : $E(\Omega) = - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$

► Γενικά, το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι ίσο με :

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$$

● Σύμφωνα με τα προηγούμενα, το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$

B. Εμβαδόν μεταξύ C_f , C_g και των ευθειών $x = \alpha$ και $x = \beta$

● Έστω f και g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη C_f , τη C_g και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha$ και $x = \beta$ ισούται με :

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$$

Ασκήσεις

A. Εμβαδό μεταξύ C_f και άξονα $x'x$

24.1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$ (Σχολικό)

24.2 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 2x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

24.3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x - 2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -2$ και $x = 3$.

24.4 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x - x^2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$

24.5 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$

24.6 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$.

24.7 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -2$ και $x = 4$.

24.8 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - e^{-x}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$

24.9 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \ln 2$

24.10 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 e^x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$.

24.11 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} \cdot (x + 1)$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -2$ και $x = 0$

24.12 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις $x = e^{-1}$, $x = e$

24.13 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+3}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$.

24.14 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x}$, $x > 0$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

24.15 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$, $x > 0$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

24.16 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα $x'x$.

24.17 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα $x'x$ **(Σχολικό)**

24.18 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - x^2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα $x'x$.

24.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα $x'x$.

24.20 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα $x'x$.

24.21 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα $x'x$.

24.22 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 3)\ln x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα $x'x$.

24.23 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 - 4)\ln x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα $x'x$.

24.24 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 3}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα $x'x$.

24.25 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x + 1}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα $x'x$.

24.26 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}{x - 2}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα $x'x$.

24.27 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.

24.28 Δίνεται η $f(x) = x\sqrt{x + 1}$, $x > -1$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 3$.

24.29 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 2$.

24.30 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x$, $x > 0$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

24.31 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+3}{x^2-25}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x' και την ευθεία $x = 3$.

24.32 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+4x}{x+1}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x' και την $x = -2$.

24.33 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-3)e^x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τους άξονες x' και $y'y$

24.34 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία και ακρότατα

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x' και τις $x = 2$, $x = 5$.

24.35 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία και ακρότατα

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$.

24.36 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \cdot e^x, & x \leq 0 \\ \frac{x}{x^2+1}, & x > 0 \end{cases}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = -1$, $x = 1$

24.37 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \leq 0 \\ e^{-x} - 1, & x > 0 \end{cases}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = -2$, $x = 1$.

24.38 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3, & x < 2 \\ -x + 5, & x \geq 2 \end{cases}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = -1$, $x = 5$.

24.39 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3, & x < 1 \\ 2\sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = -1$, $x = 2$ **(Σχολικό)**

24.40 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, & x < 2 \\ -2x + 5, & x \geq 2 \end{cases}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x' **(Σχολικό)**

24.41 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x^2 - x - 2|$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = -2$, $x = 3$

24.42 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.

24.43 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 2$.

24.44 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Να βρείτε:

- α) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις $x = 0$ και $x = 1$
 β) την ευθεία $x = \alpha$ η οποία διαιρεί το χωρίο αυτό σε δύο ισοεμβαδικά χωρία

24.45 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα $x'x$, να βρείτε την τιμή του $\alpha \in (1, 3)$ έτσι, ώστε η ευθεία $x = \alpha$ να χωρίζει το E σε δύο ισοεμβαδικά χωρία

24.46 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - x^2$. Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα $x'x$, να βρείτε την τιμή του $\alpha \in (-1, 1)$ έτσι, ώστε η ευθεία $x = \alpha$ να χωρίζει το E σε δύο ισοεμβαδικά χωρία

24.47 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2}$. Να βρείτε:

- α) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις $x = 2$ και $x = 4$
 β) την ευθεία $x = \alpha$, με $2 < \alpha < 4$ η οποία διαιρεί το χωρίο αυτό σε δύο ισοεμβαδικά χωρία

24.48 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha + \ln x, & 0 < x \leq 1 \\ 1 + \sqrt{x-1}, & x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε:

- α) την τιμή του α αν η f είναι συνεχής
 β) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$

24.49 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

- α) Να υπολογιστεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = e$ και $x = \lambda$ με $\lambda > e$
 β) Να βρείτε τα $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$ και $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{E(\lambda)}{\lambda}$

24.50 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$

- α) Να υπολογιστεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda$ με $\lambda > 1$
 β) Να βρείτε την ευθεία $x = \alpha$ η οποία χωρίζει το $E(\lambda)$ σε δύο ισοεμβαδικά χωρία
 γ) Να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{E(\lambda)}{\lambda}$

24.51 Να βρεθεί το ελάχιστο εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από την $f(x) = x^2 - 5x + 7$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \alpha + 3$

24.52 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x t \cdot e^{x-t} dt$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

24.53 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$ και έστω F αρχική της f στο $\mathbb{R}$ με $F(1) = 0$

α) Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τους $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 1$

24.54 Δίνονται οι παραγωγίσιμες $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και $F(x) = x + e^{g(x)}$, όπου F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Αν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = 3$ είναι ίσο με 2 τ.μ., να δείξετε ότι $\xi \in (1, 3) : g'(\xi) = 0$

24.55 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$, $x > 0$. Αν $E(\Omega)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$, $x = 3$, να δείξετε ότι: $\frac{e^2}{4} < E(\Omega) < \frac{e^3}{9}$

24.56 Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 5$, $xf'(x) = 2(1 - f(x))$, $x > 0$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$, $x > 0$

β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda$ με $0 < \lambda \neq 1$

γ) Αν $\lambda > 1$ και το λ αυξάνεται με ρυθμό 3 μον/s, τότε να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(\lambda)$ τη στιγμή που είναι $\lambda = 2$

24.57 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 3 \\ \frac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$. Να βρείτε :

α) την τιμή του α αν η f είναι συνεχής

β) την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(4, f(4))$

γ) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$ (**ΘΕΜΑ 2001**)

24.58 Αν ισχύει ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$, $\forall x > 0$ και αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ να δείξετε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$ (**ΘΕΜΑ 2002**)

24.59 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)\ln x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$. (**ΘΕΜΑ 2012**)

24.60 Δίνεται η $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $\varphi(x) = e^x(h(x) + \ln 2)$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$ (**ΘΕΜΑ 2014**)

24.61 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 1$, γνησίως αύξουσα για $x < 1$.

Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$

και $x = x_0$ με $x_0 < 1$ να δείξετε ότι $E = \frac{-x_0^2 - 2x_0 + 2}{2}$ (**ΘΕΜΑ 2016 Ε**)

24.62 Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(1-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον x και την ευθεία $x = 1$ ισούται με $\frac{1}{2}$

β) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 2f^2(x)dx < 1$ (**ΘΕΜΑ 2019 Ε**)

B. Εμβαδό μεταξύ C_f , C_g

24.63 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 4x - 5$ και $g(x) = x + 1$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = -2$ και $x = 2$.

24.64 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 2$ και $g(x) = -x^2 + 2x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 4$

24.65 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x - 1$ και $g(x) = 2x + 1$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$

24.66 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x - 2x - 2$ και $g(x) = x^2 - e^x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$

24.67 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$

24.68 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{1-x}{x}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και την ευθεία $x = 2$

24.69 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 4x$ και $g(x) = x + 4$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g

24.70 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = 4x - x^2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τις C_f , C_g .

24.71 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + x$ και $g(x) = -x^2 + 3x + 4$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g .

24.72 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = 2x - x^2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g . (**Σχολικό**)

24.73 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = 7x - 6$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g .

24.74 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ και $g(x) = 2x^2 + 4x - 3$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g .

24.75 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x^3 - 2x$ και $g(x) = 2x - x^3$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g

24.76 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + 2x$ και $g(x) = 3x^2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g .

24.77 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + 1$ και $g(x) = ax + 1$. Να βρείτε την τιμή του $a > 0$ για την οποία το εμβαδόν που περικλείεται από τις C_f, C_g να είναι 36 τ.μ.

24.78 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \frac{x+1}{3}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g (**Σχολικό**)

24.79 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(1+x)$ και $g(x) = x - \frac{x^2}{2}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και $x = 1$

24.80 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x - 1$ και $g(x) = \ln(1+x)$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 0, x = 1$

24.81 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4 - x^2$ και την ευθεία $x - y - 2 = 0$ (**Σχολικό**)

24.82 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ και την ευθεία $x - 2y = 0$

24.83 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την εφαπτομένη της στο σημείο με τετμημένη $x = 3$ και τον άξονα $y'y$.

24.84 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 - 2x + 3$. Να βρείτε :

α) την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2, -5)$

β) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την εφαπτομένη της στο A και τον άξονα $y'y$

24.85 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - x + 1}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την πλάγια ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x = 0, x = 1$

24.86 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την πλάγια ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x = 1, x = 2$

24.87 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την πλάγια ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και την ευθεία $x = 2$.

24.88 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-1} - x + 1$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την πλάγια ασύμπτωτή της στο $-\infty$, την ευθεία $x = 1$ και τον άξονα $y'y$.

24.89 α) Να δείξετε ότι $e^{3x} \geq x + 1$, $\forall x \geq 0$.

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = e^{-2x}(x + 1)$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g , τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = 1$

24.90 α) Αν ισχύει ότι $\ln x \geq \frac{\alpha \cdot (x-1)}{x}$, $\forall x > 0$, να δείξετε ότι $\alpha = 1$

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ και $g(x) = x^2 - x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$

24.91 Δίνεται η $f(x) = 3x + \frac{1}{2x^2}$. Να βρείτε :

α) τις ασύμπτωτες της C_f

β) το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την πλάγια ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και των ευθειών $x = 1$, $x = \alpha$, $\alpha > 1$

γ) το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$

24.92 α) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-1)^2}$ της πλάγιας ασύμπτωτής της στο $+\infty$ και των ευθειών $x = 3$, $x = \lambda$ με $\lambda > 3$.

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$

24.93 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x) - x + 2| \leq \frac{2|x|}{x^2 + 1}$

α) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

β) Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την πλάγια ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$, να δείξετε ότι $E \leq \ln 2$

24.94 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις: $f''(x) = g''(x) + e^x$, $f'(0) = g'(0) + 1$ και $f(0) = g(0)$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και την ευθεία $x = 1$

24.95 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{e^x}{e^x + 1}$

α) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την πλάγια ασύμπτωτή της και τις ευθείες $x = 1$, $x = \lambda$, με $\lambda > 1$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$

24.96 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x = 0$

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την εφαπτομένη και των ευθειών $x = -1$ και $x = 1$

24.97 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x = 1$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

γ) Να δείξετε ότι $2x - 1 \geq \frac{\ln x}{x} + x$, $\forall x \in [1, e]$

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την εφαπτομένη και την ευθεία $x = e$

24.98 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - x^4$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
 β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x = 1$
 γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την εφαπτομένη και των ευθειών $x = 1$ και $x = 2$

24.99 Έστω F, G οι αρχικές των f, g αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει $F(x) - G(x) = x^2 - 4x + 4$ και $F(2) = G(2) = 0$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και $x = 0$

24.100 Το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + 1$ και την ευθεία $y = 5$ χωρίζεται από την ευθεία $y = \alpha^2 + 1, \alpha > 0$ σε δύο ισοεμβαδικά χωρία. Να βρείτε το α . (Σχολικό)

24.101 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(2x - 1), g(x) = e^{2x-2} - 1$

- α) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των C_f, C_g στο κοινό τους σημείο $A(1, 0)$
 β) Να μελετήσετε τις f, g ως προς την κυρτότητα
 γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και $x = 2$

24.102 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x}, \lambda > 0$.

- α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
 β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda e \cdot x$. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M .
 γ) Να δείξετε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται από την C_f , της

εφαπτομένης της στο σημείο M και του άξονα $y'y$, είναι $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta \mu \lambda}$ (ΘΕΜΑ 2005)

24.103 Δίνεται η $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta, \theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ μια σταθερά. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ (ΘΕΜΑ 2007)

24.104 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \cdot \eta\mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g με $g(x) = e^{5x}$ τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = \pi$ (ΘΕΜΑ 2017)

24.105 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την ευθεία $y = -x + 2$ και των ευθειών $x = 1, x = 2$ (ΘΕΜΑ 2019)

Γ. Εμβαδό μεταξύ C_f, C_g, C_h

24.106 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$, την εφαπτομένη ευθεία ε της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και την ευθεία $x = -1$.

24.107 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$, την εφαπτομένη ευθεία ε της C_f στο σημείο της $A(1, e)$ και την ευθεία $x = -1$.

24.108 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = -x^2 - x + 2$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x = -1$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη.

24.109 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 3x^2$. Να βρείτε :

α) την εφαπτομένη της C_f στο $x = 1$

β) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη (**Σχολικό**)

24.110 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x = 1$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη

24.111 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Να βρείτε :

α) την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: x - 2y + 2020 = 0$.

β) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την εφαπτομένη και τον ευθεία $y = -4$

23.112 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x$. Να βρείτε:

α) τις εξισώσεις των εφαπτόμενων στα σημεία που η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$

β) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις δύο εφαπτόμενες

24.113 α) Να βρείτε το εμβαδό $E(\lambda)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις

των συναρτήσεων $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $g(x) = \ln x$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \lambda$, $\lambda > e$

β) Να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$ (**Σχολικό**)

24.114 Δίνεται η παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x-2) = 4x - 8$, $f(1) = 2$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x^2$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x = 1$

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη.

24.115 Δίνεται η $f(x) = x^2 + x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο σημείο τομής της με την ευθεία $x = 2$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $y_0 = -3$, τότε να βρείτε :

α) το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ)

β) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f ,

της εφαπτομένης (ϵ), του άξονα $x'x$ και της ευθείας $x = \frac{3}{5}$ (**ΘΕΜΑ 2006 Ε**)

24.116 Δίνεται η $f(x) = -\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ και δύο εφαπτόμενες που άγονται από το $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$

έχουν εξισώσεις $\epsilon_1: y = x$ και $\epsilon_2: y = x - \pi$. Αφού σχεδιάσετε την C_f και τις εφαπτόμενες,

να αποδείξετε ότι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$, όπου E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και

τις ευθείες ϵ_1, ϵ_2 και E_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και του άξονα $x'x$ (**ΘΕΜΑ 2017**)

24.117 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, 1)$ και τον άξονα $x'x$ (**ΘΕΜΑ 2019Ε**)

Δ. Εμβαδό και Αντίστροφη Συνάρτηση

24.118 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = 3$.

24.119 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x - 3$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, την ευθεία $x = -6$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

24.120 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = e$.

24.121 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1 + \ln x$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = e$.

24.122 Να δείχθεί ότι η $f(x) = \ln(x + 1) + x$ αντιστρέφεται και να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

24.123 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1} του άξονα $x'x$ και της ευθείας $x = e$.

γ) Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη να βρείτε την εφαπτομένη της f^{-1} στο $x_0 = 0$.

24.124 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x - x^2 + 1$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της f .

β) Να δείξετε ότι $f([0, 1]) = [3, 2e]$.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

δ) Αν η f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 3$, $x = 2e$.

24.125 Δίνεται η συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x) = \left(\int_0^3 f(t)dt + 20\right) e^{x-3} - x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2e^x - x^2 - 2x$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

δ) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της αντίστροφης, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{2}{e^2}$, $x = 2$.

24.126 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη ώστε $f^3(x) + f(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την ευθεία $x = 1$ και τους $x'y$,

24.127 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη ώστε $f^3(x) + f(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τους άξονες $x'y$.

24.128 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{2007} + x - 1$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_f, C_{f^{-1}}$ και τις ευθείες $x = -1, x = 1$

24.129 Δίνεται η $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_f, C_{f^{-1}}$

24.130 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \frac{3}{4}x$

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_f, C_{f^{-1}}$

24.131 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με την διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_f, C_{f^{-1}}$

24.132 Δίνεται η $f(x) = x^2 + 2x, x \geq -1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f, f^{-1}

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1}

24.133 Δίνεται η $f(x) = x^2 - 2x + 2, x \geq 1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f, f^{-1}

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_f, C_{f^{-1}}$

24.134 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[0, 1]$ ώστε $f^3(x) + 2f(x) = 3x, x \in [0, 1]$.

α) Να δείξετε ότι $f(0) = 0, f(1) = 1$

β) Να βρείτε την αντίστροφη, αν ορίζεται

γ) Να δείξετε ότι $\int_0^1 f^{-1}(x)dx = 1 - \int_0^1 f(x)dx$

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις f, f^{-1} και των ευθειών $x = 0$ και $x = 1$

24.135 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, για την οποία ισχύει $f(x) = x - 1 - F(x), x \in \mathbb{R}$, όπου F αρχική της f στο $\mathbb{R}$ με $F(0) = 0$

α) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη

β) Να βρείτε τον τύπο της f

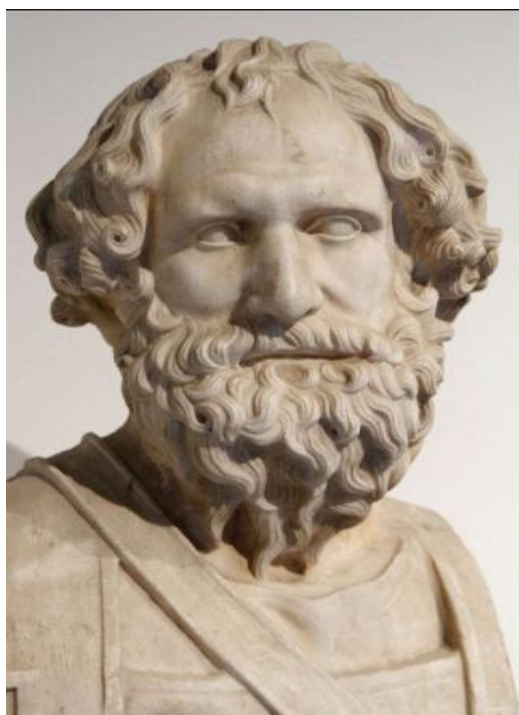
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_f, C_{f^{-1}}$ και τις ευθείες $x = -1, x = 0$

24.136 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 3$. (ΘΕΜΑ 2003)

24.137 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)}(f^2(x) - 2f(x) + 3) = x$
α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της.

β) Να μελετήσετε την αντίστροφη ως προς την κυρτότητα.

Στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της αντίστροφης, την εφαπτομένη της αντίστροφης στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = 1$ (ΘΕΜΑ 2014 Ε)



Ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιος (287 π.Χ. – 212 π.Χ.) ήταν αρχαίος Έλληνας μαθηματικός, μηχανικός, φυσικός, εφευρέτης και αστρονόμος.

Θεωρείται ως μία από τις μεγαλύτερες μαθηματικές ιδιοφυΐες όλων των εποχών και ένας από τους λαμπρότερους επιστήμονες της κλασικής αρχαιότητας.

Ο Αρχιμήδης θεωρείται ότι είναι ο σπουδαιότερος από τους μαθηματικούς της αρχαιότητας και ένας από τους σπουδαιότερους όλων των εποχών.

Ο Αρχιμήδης μπορούσε να χρησιμοποιήσει τα απειροελάχιστα με τρόπο παρόμοιο με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό