ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να υπολογίσετε τα όρια:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (Μ 5)

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f''(x) = -\frac{x}{x^2+1}f'(x),\quad x \in R$ και να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και το πρόσημο. (Μ 5)

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. Αν η f^{-1} είναι συνεχής, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\ln(\sqrt{2}+1)} f^{-1}(x)dx.$$ (Μ 5)

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx,\ a \in R^*.$$ (Μ 5)

Γ5. Ένα κινητό σημείο Μ ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x), x \geq 0$. Σε ποιο σημείο $M(x_o, y_o)$ της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x_o του σημείου Μ είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y_o, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$ *για κάθε* $t \geq 0$. (Μ 5)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f: [0,+\infty) \to R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, κοίλη και $f(0) = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

Δ1) $f'(x) < \frac{f(x)}{x}$ *για κάθε* $x \in (0,+\infty)$ (Μ 7)

Δ2) $\frac{f(5)}{5} < \frac{f(3)}{3}$ (Μ 6)

Δ3) $\frac{f(5)}{5} < \frac{1}{8}\int_3^5 f(t)dt < \frac{f(3)}{3}$ (Μ 6)

Δ4) η εξίσωση $f(x) = \frac{x}{8}\int_3^5 f(t)\,dt$ έχει μοναδική λύση στο $(0,+\infty)$.

(Μ 6)

Καλό γράψιμο!

Τα Α.Ε.Ι. σε περιμένουν!

(Κεχράκος Ν., Μανιάτης Α., Χαριτίδης Θ.)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΕΙΩΣΗΣ 2025 ΓΟΙΚ ΚΑΙ ΓΘΕΤ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = εφx$. Να αποδείξετε οτι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1 = R - \{x / συνx = 0\}$ και ισχύει :

$(εφx)' = \frac{1}{συν^2 x}$. (Μ 5)

Α2. Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τον άξονα x'x, την γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησής g σε ένα διάστημα $[α,β]$, με $g(x) \le 0$ για κάθε $x \in [α,β]$ και τις ευθείες x = α και x = β.

Να αποδείξετε οτι: $E(Ω) = -\int_α^β g(x)\, dx$. (Μ 5)

Α3. Έστω f μία συνάρτηση και $A(x_0,f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Να γράψετε τον ορισμό της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της Α, αν υπάρχει. (Μ 3)

Α4. Να αναφέρετε την γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής. (Μ 2)

Α5. Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» (Σ) ή «Λάθος» (Λ) (Μ 10)

α) $\lim_{x \to +\infty} \frac{ημx}{x} = 1$.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x'x, της γραφικής παράστασης της f.

γ) Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, η παράγωγος της δεν είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ.

ε) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες .

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{\ln x}$. (Μ 2, 5, 6, 7, 5)

Β1) Να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού της.

Β2) Να την μελετήσετε ως προς μονοτονία και ακρότατα.

Β3) Να την μελετήσετε ως προς κυρτότητα και σημεία καμπής.

Β4)Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και το σύνολο τιμών της f.

Β5) Να σχηματίσετε πίνακα μεταβολών της f και να χαράξετε την γραφική της παράσταση.

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 2025

ΘΕΜΑ Α| Α1| σελ 114 Α2| σελ 226 Α3| σελ 94 Α4| σελ 129

Α5| Λ − Σ − Σ − Σ − Σ

ΘΕΜΑ Β| • $x>0$

Β1| • $\ln x \neq 0 \Rightarrow \ln x \neq \ln 1 \Rightarrow x \neq 1$, ($\ln x$: "1-1")

Άρα $A_f = (0,1) \cup (1,+\infty)$

Β2] $$f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{(x)'\ln x - x(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

• $f'(x) > 0 \Rightarrow \ln x - 1 > 0$, $(\ln^2 x > 0, \forall x \in A_f) \Rightarrow \ln x > 1 \Rightarrow \ln x > \ln e$
$\Rightarrow x > e \Rightarrow f: \uparrow (e,+\infty)$

• $f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

x	0		1		e		$+\infty$
f'	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$\searrow$	‖	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

$f: \downarrow (0,1)$, $f: \downarrow (1,e)$, $f: \uparrow (e,+\infty)$ f: συνεχής ως πράξη συνεχών

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = e$, το $f(e) = e$

Β3| $$f''(x) = \left(\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\right)' = \frac{(\ln x - 1)'\ln^2 x - (\ln x - 1)(\ln^2 x)'}{\ln^4 x}$$

$$= \frac{\frac{\ln^2 x}{x} - 2\ln x \cdot \frac{1}{x}(\ln x - 1)}{\ln^4 x} = \frac{\ln^2 x - 2\ln x(\ln x - 1)}{x \ln^4 x}$$

$$= \frac{\ln x - 2(\ln x - 1)}{x \ln^3 x} = \frac{\ln x - 2\ln x + 2}{x \ln^3 x}$$

$$= -\frac{\ln x - 2}{x \ln^3 x}$$

• $f''(x) > 0 \Rightarrow -\dfrac{\ln x - 2}{\ln x} > 0$, $\left(\dfrac{1}{x \ln^2 x} > 0, \forall x \in A_f\right)$

$\Rightarrow -\ln x(\ln x-2)>0 \Rightarrow 0<\ln x<2 \Rightarrow \ln 1<\ln x<\ln e^2$

$\Rightarrow 1<x<e^2$, $(\ln x: \uparrow (0,+\infty))$

$\Rightarrow$ f: κυρτή στο $(1,e^2)$

• $f''(x)=0 \Rightarrow \ln x-2=0 \Rightarrow \ln x=2 \Rightarrow x=e^2$

x	0		1		e^2		$+\infty$
f''	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	$\cap$	‖	$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$	

f: κοίλη στο $(0,1)$, f: κυρτή στο $(1,e^2)$, f: κοίλη στο $(e^2,+\infty)$

Ορίζεται εφαπτομένη στην C_f, στο $(e^2, f(e^2)) = \left(e^2, \frac{e^2}{\ln e^2}\right)$

$= \left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$

Άρα το $\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f

B4 • $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot\frac{1}{\ln x}\right) = 0$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x} = 0$

Άρα η ευθεία $x=0$ **δεν** είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

• $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x\cdot\frac{1}{\ln x}\right) = -\infty$

διότι $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x = 0 \\ \ln x<0,\ \forall x\in(0,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\ln x} = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x\cdot\frac{1}{\ln x}\right) = +\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x = 0$ και $\ln x>0, \forall x\in(1,+\infty) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{\ln x} = +\infty$

Άρα η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 = \lambda \in \mathbb{R}$, (αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-\lambda x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x)'}{(\ln x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \notin \mathbb{R}$

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$

$\left.\begin{array}{l} f: \downarrow (0,1) \\ f: \text{συνεχής} \end{array}\right\} \Rightarrow f((0,1)) = \left(\lim\limits_{x\to1^-} f(1), \lim\limits_{x\to0^+} f(x)\right) = (-\infty, 0)$

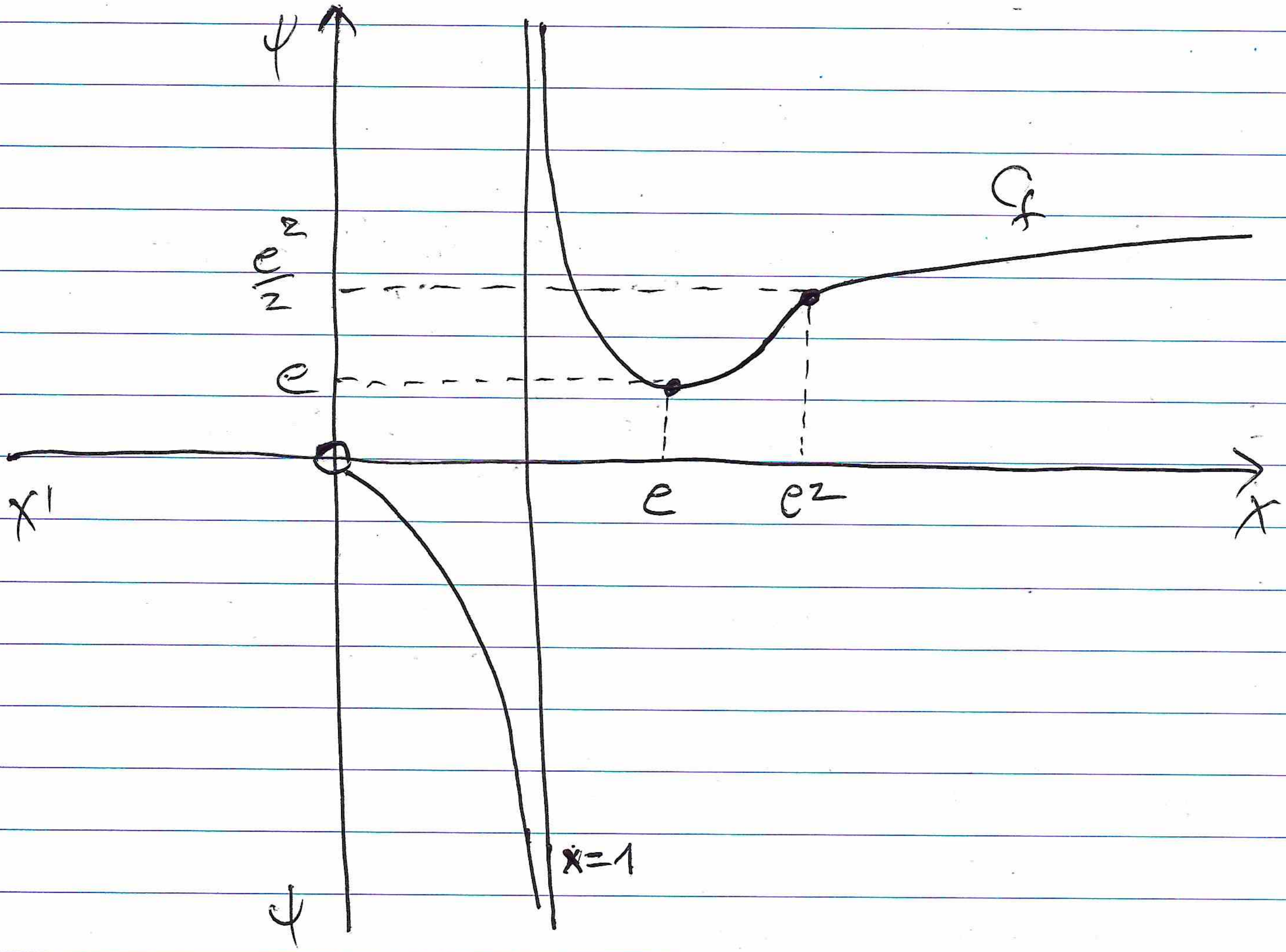
$\left.\begin{array}{l} f: \downarrow (1,e] \\ f: \text{συνεχής} \end{array}\right\} \Rightarrow f((1,e]) = \left[f(e), \lim\limits_{x\to1^+} f(x)\right) = [e, +\infty)$

$\left.\begin{array}{l} f: \uparrow [e,+\infty) \\ f: \text{συνεχής} \end{array}\right\} \Rightarrow f([e,+\infty)) = \left[f(e), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = [e, +\infty)$

$f(A_f) = f((0,1)) \cup f((1,e]) \cup f([e,+\infty))$
$= (-\infty,0) \cup [e,+\infty) \cup [e,+\infty)$
$= (-\infty,0) \cup [e,+\infty)$

B5

x	0		1		e		e^2		$+\infty$
f''	‖	$-$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
f'	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
f	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	e T.E.	↗	$\frac{e^2}{2}$ Σ.Κ.	↗	$+\infty$



ΘΕΜΑ Γ

Γ₁ Είναι $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$

άρα $x+\sqrt{x^2+1} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Οπότε $A_f = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \ell_1$$

Θέτουμε $u=\sqrt{x^2+1}+x$

με $\lim\limits_{x\to+\infty} u = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = +\infty$.

$\boxed{\text{Άρα } \lim\limits_{u\to+\infty} \ln u = +\infty.}$

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \ell_2$$

Θέτουμε $u=\sqrt{x^2+1}+x$ Αναζητούμε το $\lim\limits_{x\to-\infty} u =$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)x} = \left(\frac{1}{-2}\right)\cdot 0 = 0.$$

$\boxed{\text{Άρα } \lim\limits_{u\to0^+} \ln u = -\infty.}$

Επειδή $\sqrt{x^2+1}-x \geq 0$. άρα $u \to 0^+$

Γ2. $$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)' = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{1}} = \frac{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}\,\cancel{(\sqrt{x^2+1}+x)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$$

άρα $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$ γνησίως

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = -\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1} = -\frac{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = -\frac{x}{x^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= -\frac{x}{x^2+1}\cdot f'(x).$$

για $x>0$ $f''(x)<0$ → f κοίλη

για $x<0$ $f''(x)>0$ f κυρτή.

Και αφού f συνεχής, το σημείο για $x_0=0$ $f(0)=0$ είναι σ.κ.

Επειδή $f\nearrow$, για $x<0 \Rightarrow f(x)<f(0) \rightarrow f(x)<0$

για $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0) \rightarrow f(x)>0$.

Γ3 Αφού $f \uparrow$ και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

$$I = \int_0^{\ln(\sqrt{2}+1)} f^{-1}(x)\,dx = ?$$ Αφού f αντιστρέφεται

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$ Οπότε $dx = f'(y)\,dy$.

$$I = \int_0^1 y \cdot f'(y)\,dy =$$

για $x=0 \Rightarrow y=0$.

για $x = \ln(\sqrt{2}+1) \Rightarrow$

$f(1) = \ln(\sqrt{2}+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 1$.

$$\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\,dy = \int_0^1 \frac{2y}{2\sqrt{y^2+1}}\,dy = \boxed{\left[\sqrt{y^2+1}\right]_0^1} = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2}-1$$

$=$

Γ4. Αφού $A_f = R$ Για κάθε $x \in R$ το $-x \in R$

Με $f(-x) = \ln\left(\sqrt{(-x)^2+1} - x\right) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \ln \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} =$

$\ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{-1} = -\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = -f(x)$. Άρα περιττή.

$$A = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{-a} f(-u)(-du) = \int_a^{-a} + f(u)\,du = -\int_{-a}^{a} f(u)\,du = -A$$

Θέτουμε $x = -u$.
$dx = -du$.

Άρα $2A = 0 \Leftrightarrow \boxed{A = 0.}$

$x = a \quad u = -a$

$x = -a \quad u = +a$

Γ5. Έστω στιγμή $x(t_0)$ όπου ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x_0 είναι διπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y_0 είναι $x'(t_0) = 2y'(t_0) \Leftrightarrow$

$x'(t_0) = 2f'(x(t_0)) \cdot x'(t_0) \Leftrightarrow 1 = 2 \cdot f'(x(t_0)) \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{x^2(t_0)+1}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2(t_0)+1} = 2 \Leftrightarrow x^2(t_0)+1 = 4$

$x^2(t_0) = 3$ όμως $x \geq 0$. άρα $x(t_0) = \sqrt{3}$.

Άρα το ζητούμενο σημείο $(\sqrt{3}, \ln(2+\sqrt{3}))$

ΘΕΜΑ Δ **Δ1** Πρέπει $f'(x) < \frac{f(x)}{x}$, $\forall x \in (0,+\infty)$

$\Leftrightarrow$ $f'(x) < \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, $f(0)=0$

$\Leftrightarrow$ $f'(x) < f'(\xi)$, $\xi \in (0,x)$ από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,x]$

καθώς • f: συνεχής στο $[0,x] \subseteq [0,+\infty)$ ως παραγωγίσιμη

• f: παραγωγίσιμη στο $(0,x) \subseteq [0,+\infty)$ ως παραγωγίσιμη

$\Rightarrow$ $x > \xi$ ($f' \downarrow (0,+\infty)$ καθώς f: κοίλη)

$\Rightarrow$ $0 < \xi < x$ προφανές. Άρα δείχθηκε

Δ2 Έστω $H(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in (0,+\infty)$

$\Rightarrow H'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x)\cdot x - f(x)\cdot(x)'}{x^2} = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

$\Rightarrow H'(x) = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} < 0$ (από Δ1) $f'(x) < \frac{f(x)}{x} \Rightarrow xf'(x)-f(x)<0$, $x>0$)

$\Rightarrow H \downarrow (0,+\infty)$

$\Rightarrow H(5) < H(3)$

$\Rightarrow \frac{f(5)}{5} < \frac{f(3)}{3}$

Δ3

$H \downarrow (0,+\infty) \Rightarrow H(5) \leq H(x) \leq H(3)$, $\forall x \in [3,5]$

$\Rightarrow \frac{f(5)}{5} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(3)}{3}$, $\forall x \in [3,5]$

$\Rightarrow \frac{f(5)}{5}x \leq f(x) \leq \frac{f(3)}{3}x$, $\forall x \in [3,5]$

Προφανώς οι παραπάνω διαφορές κανα δύο δεν είναι ισχύει μηδέν, άρα $\int_3^5 \frac{f(5)}{5} x\,dx < \int_3^5 f(x)\,dx < \int_3^5 \frac{f(3)}{3} x\,dx$

$\Rightarrow \frac{f(5)}{5} \int_3^5 x\,dx < \int_3^5 f(x)\,dx < \frac{f(3)}{3} \int_3^5 x\,dx$

$\Rightarrow \frac{f(5)}{5} \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^5 < \int_3^5 f(x)\,dx < \frac{f(3)}{3} \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^5$

$\Rightarrow \frac{f(5)}{5} \frac{25-9}{2} < \int_3^5 f(x)\,dx < \frac{f(3)}{3} \frac{25-9}{2}$

$\Rightarrow 8\frac{f(5)}{5} < \int_3^5 f(x)\,dx < 8\frac{f(3)}{3}$

ή $\frac{f(5)}{5} < \frac{1}{8}\int_3^5 f(t)\,dt < \frac{f(3)}{3}$, $\left(\int_3^5 f(x)\,dx = \int_3^5 f(t)\,dt\right)$

Δ4) $H = \downarrow (3,5) \subseteq (0,+\infty) \Rightarrow H(5) < \frac{1}{8}\int_3^5 f(t)\,dt < H(3)$

Δηλαδή ο αριθμός $\frac{1}{8}\int_3^5 f(t)\,dt = \eta$, είναι μεταξύ

των $H(3), H(5)$ και
- H = συνεχής στο $[3,5]$
- $H(3) \neq H(5)$ από (Δ2)

άρα από Θ. ενδιάμεσων τιμών $\Rightarrow$
$\exists\, x_0 \in (3,5)$: $H(x_0) = \eta = \frac{1}{8}\int_3^5 f(t)\,dt$

Όμως H = "1-1" αφού $H = \downarrow (0,+\infty)$
$\Rightarrow \exists!\, x_0 \in (3,5)$: $H(x_0) = \frac{1}{8}\int_3^5 f(t)\,dt$

$\Rightarrow \frac{f(x_0)}{x_0} = \frac{1}{8}\int_3^5 f(t)\,dt$

$\Rightarrow f(x_0) = \frac{x_0}{8}\int_3^5 f(t)\,dt$