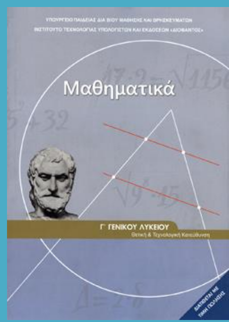
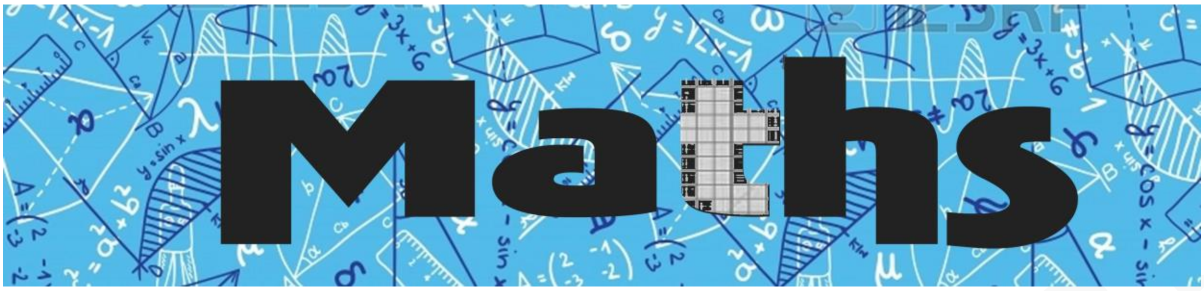
Γ΄ Λυκείου

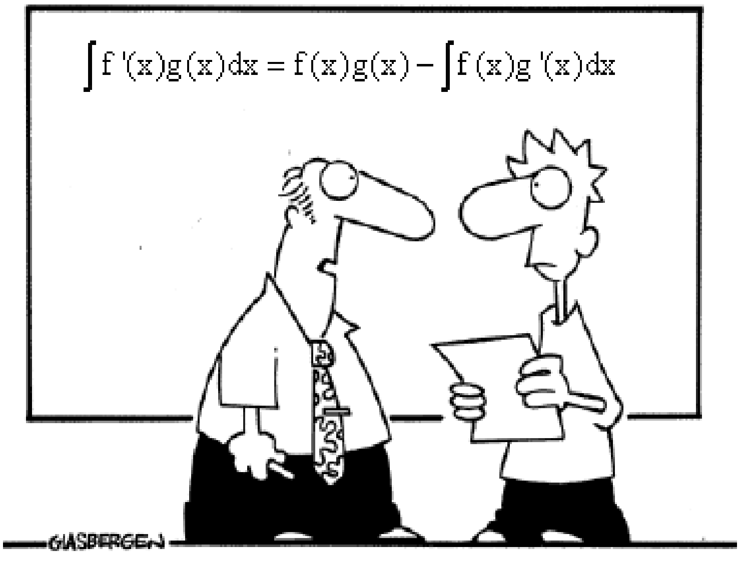
Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών



Ερωτήσεις Κατανόησης

Η Θεωρία σε Ερωτήσεις





2015-2016

ΤΑΞΗ Γ
Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών
Θ Ε Ω Ρ Ι Α
¨Συναρτήσεις¨

1. Τι ονομάζεται πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;
Απάντηση:……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

2. Πότε δυο συναρτήσεις λέγονται ίσες;

Απάντηση:……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

3.Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g;

Απάντηση:……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

4. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της

Απάντηση:……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

5. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι έχει (ολικό) μέγιστο; και πότε ελάχιστο;

Απάντηση:……………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

6.Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται ¨1-1¨

Απάντηση:……………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

7. Τι λέγεται αντίστροφη συνάρτηση μιας συνάρτησης f;

Απάντηση:……………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

8. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Απάντηση:……………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

9. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις

i. Αν το πεδίο ορισμού της f είναι A και το πεδίο ορισμού της g είναι B τότε το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$

ii. Αν f, g είναι δυο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g\circ f$ και $f\circ g$ τότε αυτές είναι ίσες;

iii. Μια συνάρτηση f είναι 1-1 αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μια λύση ως προς x

iv. Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι γνησίως μονότονη

v. Ισχύει $f^{-1}(f(x))=x \quad x\in A$

vi. Ισχύει $f(f^{-1}(y))=y \quad y\in A$

vii. Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = - x$

viii. Αν f, g,h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h\circ(g\circ f)$ τότε ορίζεται και η $(h\circ g)\circ f$ και ισχύει: $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$

ix. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης -f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ της γραφικής παράστασης της f.

x. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης |f | αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

i.	ii.	iii.	iv.	v.	vi.	vii.	viii.	ix.	x.

ΤΑΞΗ Γ

Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών

Θ Ε Ω Ρ Ι Α

¨Όρια και συνέχεια συναρτήσεων¨

1.Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις

i. Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε “κοντά στο x_0”, δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta)$ ή (α, x_0) ή (x_0,β). ☐

ii. Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ή να μην ανήκει σ’ αυτό . ☐

iii. Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 ή διαφορετική από αυτό. ☐

2. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in IR$

Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$

Απάντηση:……………………………………………………………………………..…

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

3.Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ όπου P(x), Q(x) πολυώνυμα του x και $x_0\in IR$ με $Q(x_0)\neq 0$. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

Απάντηση:……………………………………………………………………………..…
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

4. Να διατυπώσετε το Κριτήριο Παρεμβολής

Απάντηση:……………………………………………………………………………..…
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

5.α. Πότε μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
β. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

6. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις

α. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$

β. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$ τότε f(x)>0 κοντά στο x_0

γ. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty$

δ. Αν α>1 τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = 0$

ε. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της

α.	**β.**	**γ.**	**δ.**	**ε.**

7. α. Πότε μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β);

β. Πότε μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

Απάντηση:……………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

8. Να διατυπωθεί το θεώρημα Bolzano και να δοθεί η γεωμετρική του ερμηνεία

Απάντηση:……………………………………………………………………………..……

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

9. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις

α. Ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-\ell)=0$

β. Ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

γ. Αν $g(x)\neq u_0$ κοντά στο x_0 ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$

δ. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα (α,β) τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το (B,A) όπου

$$A=\lim_{x\to\alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B=\lim_{x\to\beta^-} f(x)$$

α.	β.	γ.	δ.	ε.

10. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα [α,β]. Αν

- Η f είναι συνεχής στο [α,β]
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

να δείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=\eta$

Απάντηση:……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

11. Να διατυπωθεί το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Απάντηση:……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

12. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις

α. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 τότε η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0

β. Αν οι συναρτήσεις f ,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x)$$

γ. Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{συν}x-1}{x}=0$

δ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

α.	**β.**	**γ.**	**δ.**

13. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις

i. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$

ii. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$

iii. $|\text{ημ}x|\ge|x|$, για κάθε $x\in IR$ (η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=0$)

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{ημ}x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\text{ημ}x}{x}=0$

v. Για τη ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0}$, $\alpha_\nu\ne 0$

$\beta_\kappa\ne 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$$

vi. Όλες οι πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

vii. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε, παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

viii. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

i.	**ii.**	**iii.**	**iv.**	**v.**	**vi.**	**vii.**	**viii.**

14. Με τι ισούται το όριο ρητής συνάρτησης όταν $x \to \pm\infty$ όταν

i. ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με τον βαθμό του παρανομαστή;

ii. ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρανομαστή;

iii. ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρανομαστή;

Απάντηση:……………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

15. Που πρέπει να είναι ορισμένη μια συνάρτηση f για να αναζητήσουμε το όριο στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$);

Απάντηση:……………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

ΤΑΞΗ Γ

Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών

Θ Ε Ω Ρ Ι Α

¨Παράγωγοι¨

1. **α.** Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

β. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της Α ή, απλά, παραγωγίσιμη.

γ. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β);

δ. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

ε. Τι ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f;

Απάντηση:……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

2. Να αποδείξετε ότι : Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
Το αντίστροφο ισχύει; Αιτολογήστε την απάντηση.

Απάντηση:…………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

3. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c$, $c\in IR$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή $(c)'=0$

Απάντηση:…………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

4. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR και ισχύει $f'(x)=1$

Απάντηση:…………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

5. Έστω η συνάρτηση f(x)=x^{ν} $\nu \in N - \{0,1\}$ Να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει :

$$f'(x) = \nu x^{\nu-1}$$

Απάντηση:……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

6. Έστω η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{x}$. Να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) και ισχύει:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Απάντηση:……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

7. Εστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in IN^*$. Να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο IR^* και ισχύει:

$$(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$$

Απάντηση:……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

8. Αν οι συναρτήσεις f ,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει : $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Απάντηση:……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

9. Να δείξετε ότι: $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Απάντηση:……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

10. Να δείξετε ότι: η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$,α>0 είναι παραγωγίσιμη στο IR και ισχύει

$$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$$

Απάντηση:……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

11. Να δείξετε ότι: η συνάρτηση $f(x)=x^\alpha$, $\alpha \in IR - Z$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

Απάντηση:……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

12. Να δείξετε ότι $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, x \in IR^*$

Απάντηση:……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

13. Τι ονομάζεται ρυθμός μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 ;

Απάντηση:……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

14. Να διατυπωθεί το Θ.Rolle και να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία.

Απάντηση:…………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

15. Να διατυπωθεί το θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού και να δοθεί η γεωμετρική του ερμηνεία

Απάντηση:……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

16. Να διατυπωθεί το Θ.Fermat

Απάντηση:……………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….

17. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ. Αν

- Η f είναι συνεχής στο Δ
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

Απάντηση:…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

18. Έστω δυο συναρτήσεις f ,g ορισμένες στο Δ. Αν

- Οι f ,g είναι συνεχείς στο Δ
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

τότε υπάρχει σταθερά c ώστε για κάθε x $\in\Delta$ να ισχύει : f(x)=g(x)+c

Απάντηση:…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

19. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Απάντηση:……………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

20. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό τότε $f'(x_0) = 0$

Απάντηση:……………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

21. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής

i. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

ii. Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

iii. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Απάντηση:……………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

22. Πότε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο; και πότε τοπικό ελάχιστο;

Απάντηση:……………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………….

23. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις ακροτάτων μιας συνάρτησης f στο διάστημα Δ;

Απάντηση:………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

24. Πότε μια συνάρτηση f είναι κυρτή; Πότε είναι κοίλη; Τι ονομάζεται σημείο καμπής;

Απάντηση:……………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

25. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f στο διάστημα Δ;

Απάντηση:……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
....

26. Πότε η ευθεία y=λx+β λέγεται ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Απάντηση:……………………………………………………………………….…..
………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………...
……………………………..

27.Να δοθεί ο ορισμός της κατακόρυφης και της οριζόντιας ασύμπτωτης

Απάντηση:……………………………………………………………………………
....
....
....
....
....
....

28. Που αναζητούμε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f;

Απάντηση:……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………...
....
....
....
....

29. Να διατυπωθούν οι κανόνες του de L' Hospital

Απάντηση:……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

30. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις

α. Αν το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη τότε $f''(x_0)=0$

β. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f δεν τέμνει τις ασύμπτωτες

γ. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες

δ. Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο

ε. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε $f'(x)>0$

στ. Αν $f'(x_0)=0$ τότε η f έχει στο x_0 τοπικό ακρότατο

ζ. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη

θ. Η ευθεία x=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.	ζ.	θ.

31. Αν η ευθεία y=λx +β είναι ασύμπτωτη της C_f στο $\pm\infty$ τότε

λ=……………., β=…………………

32. το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$ ισούται με α). $\dfrac{1}{x^2}$ β). $\dfrac{-2}{x}$ γ). $-\dfrac{1}{x^2}$ δ).0 ☐

33. Αν $f(x)=5^{3x}$ τότε η $f'(x)$ ισούται με α). $3x5^{3x-1}$ β). $3\cdot 5^{2x}$ γ). $5^{3x}\ln 125$ δ). $\dfrac{5^{3x}}{3\ln 5}$ ☐

34. Αν $f(x)=(x^2-1)^3$ τότε η έβδομη παράγωγος αυτής στο 0 είναι :
α). 1 β). -1 γ). 0 δ). 27 ε). Δεν υπάρχει. ☐

35. Αν οι εφαπτόμενες των συναρτήσεων f(x)=lnx και $g(x)=2x^2$ στα σημεία με τετμημένη x_0 είναι παράλληλες τότε το x_0 είναι:

α). 0 β). 1 γ). 2 δ). $\dfrac{1}{2}$ ε). $\dfrac{1}{4}$ ☐

ΤΑΞΗ Γ
Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών
¨Ολοκληρώματα¨

1. Τι ονομάζεται αρχική ή παράγουσα της f στο Δ;

Απάντηση:……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ τότε

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in IR$ είναι επίσης παράγουσες της f στο Δ.
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$ $c\in IR$

Απάντηση:……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

3. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος

Απάντηση:……………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

4. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α ,β] τότε : $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(B) - G(\alpha)$

Απάντηση:……………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

5. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις

α. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$

β. Αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$

γ. Αν f συνεχής στο Δ και α, β, $\gamma \in \Delta$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

δ. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

α.	**β.**	**γ.**	**δ.**

6. Έστω δυο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα [α, β] με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f ,g και τις ευθείες x=α και x=β. Να αποδείξετε ότι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$

Απάντηση:………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

7. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$ τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και τις ευθείες x=α και x =β δίνεται από τον τύπο $E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

Απάντηση:………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

8. Έστω δυο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f ,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Να αποδείξετε ότι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$

Απάντηση:……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

9. Όταν η διαφορά f(x)-g(x) δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f ,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|$

Απάντηση:……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

10. Να αποδείξετε ότι $\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Απάντηση:……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

11. Το ολοκλήρωμα I= $\int_{-1}^{1} |x^2 - 1|\, dx$ είναι ίσο με

α. $\frac{4}{3}$ **β.** 0 **γ.** $\frac{-4}{3}$ **δ.** $\frac{2}{3}$ **ε.** $\frac{5}{3}$ ☐

12. Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in [-1,1]$ και f(0)=g(0)+2 τότε για κάθε $x \in [-1,1]$ ισχύει;

α. f(x)=g(x)-2 **β.** $\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))dx = 4$ **γ.** $f(x) \le g(x), x \in [-1,1]$ ☐

13. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις

α. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [α ,β]. Αν $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$

β. Αν F παράγουσα της f στο Δ τότε ισχύει $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

γ. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta}$

δ. ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = c(\beta - \alpha)$

α.	β.	γ.	δ.

14. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις

i. Ο τύπος ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$,
όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

ii. Το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

iii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g είναι:

$$E = \int_{\rho_1}^{\rho_2} |f(x) - g(x)|\, dx$$

Όπου ρ_1 η μικρότερη και ρ_2 η μεγαλύτερη ρίζα της f(x)=g(x)

iv. Ισχύει

$$\left(\int_{\alpha}^{x} f(x)g(t)dt\right)' = f'(x)\int_{\alpha}^{x} g(t)dt + f(x)g(x)$$

i.	ii.	iii.	iv.