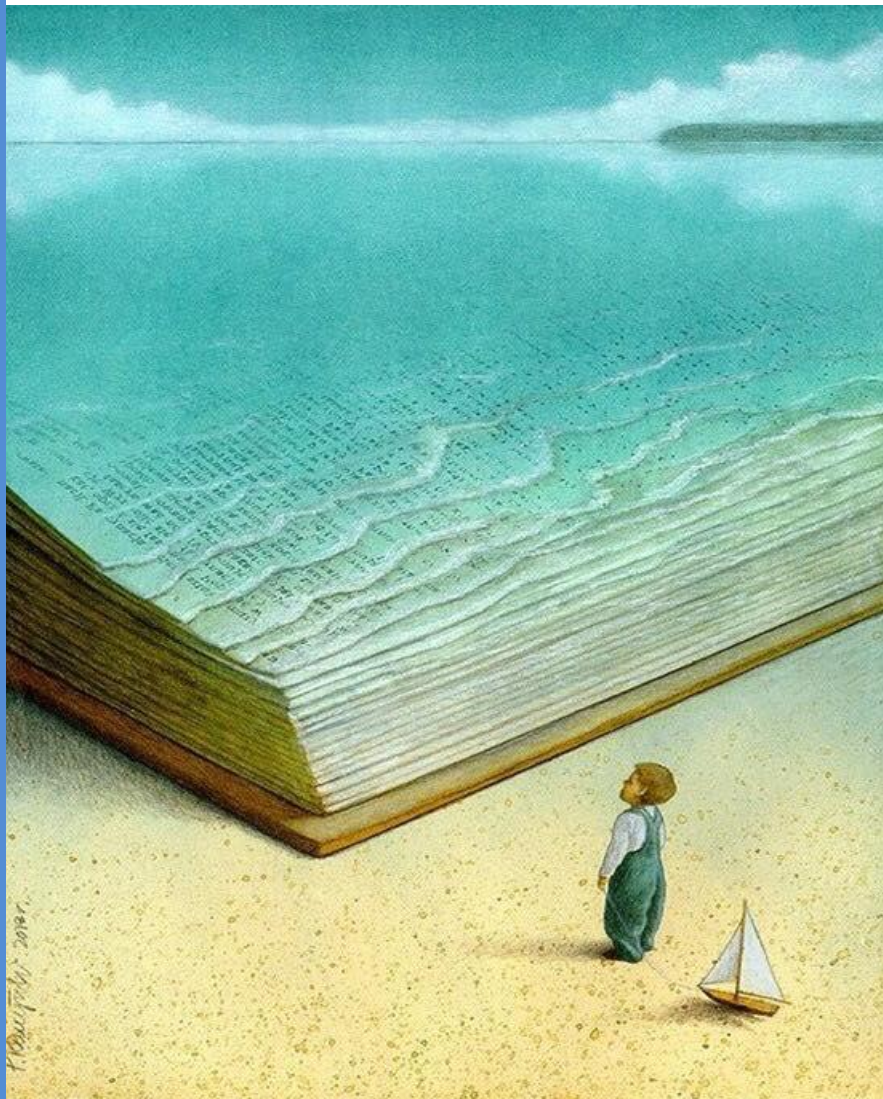


ΟΔΗΓΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ



Θεωρία με την μορφή
Ερωταπαντήσεων

Βασικά
Αντιπαραδείγματα

Τα Σωστά-Λάθος των
Πανελληνίων

143 Επαναληπτικές
Ασκήσεις ανά Ενότητα

86 Θέματα Επιπέδου Β

78 Θέματα Επιπέδου Γ

24 Θέματα Επιπέδου Δ

Επιμέλεια

Νίκος Κ. Ράπτης

Περιεχόμενα

Θεωρία με την μορφή ερωταπαντήσεων.....σελ.4	
Βασικά Αντιπαραδείγματα.....	σελ 14
Οι Ερωτήσεις Σωστό-Λάθος των Πανελληνίων.....	σελ.16
Επαναληπτικές Ασκήσεις ανά Ενότητα.....	σελ 24
Γενικά Θέματα επιπέδου Β Θέματος Πανελληνίων.....	σελ.44
Γενικά Θέματα επιπέδου Γ Θέματος Πανελληνίων.....	σελ.62
Γενικά Θέματα επιπέδου Δ Θέματος Πανελληνίων	σελ.79

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Τι λέμε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A (2018 E)

Έστω A υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A λέγεται μια διαδικασία f , με την οποία κάθε στοιχείο x του A αντιστοιχίζεται σε ένα και μοναδικό πραγματικό αριθμό y ενός συνόλου B που ονομάζεται σύνολο τιμών.

2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες (2007–2012 E–2016)

Δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες όταν :
έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$

3. Τι λέμε σύνθεση της συνάρτησης f με την συνάρτηση g

Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού τα A, B αντίστοιχα τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g και την συμβολίζουμε με $g \circ f$ την συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ και πεδίο ορισμού $A_{g \circ f} = \{x \in A / f(x) \in B\}$

4. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ

Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ,
όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει : $f(x_1) < f(x_2)$

5. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ

Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ,
όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει : $f(x_1) > f(x_2)$

6. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 ολικό μέγιστο (2010 E–2014)

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 ολικό μέγιστο το $f(x_0)$ όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

7. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο το $f(x_0)$ όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

8. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι είναι 1-1 (2005 E–2015 E)

Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1 όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή :
Αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

9. Πότε μια συνάρτηση f αντιστρέφεται και πως

Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται, αν και μόνο αν είναι 1-1. Η αντίστροφη συνάρτηση της f συμβολίζεται με f^{-1} και ορίζεται από την σχέση $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

10. Να διατυπώσετε το Κριτήριο Παρεμβολής (2016 E)

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ κοντά στο x_0 , και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$ τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

11. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 (2009 E–2015)

Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

12. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ (2004 E–2008–2012–2017)

Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$

13. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano (2014 E)

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και επιπλέον $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

Γεωμετρική Ερμηνεία : Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$

14. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και επιπλέον $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.

15. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μεγίστης και Ελαχίστης Τιμής

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m . Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει: $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [\alpha, \beta]$

16. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της (2004–2009)

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

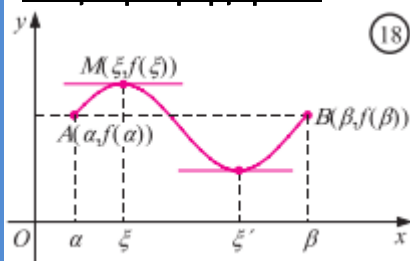
17. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ (2010 E–2013)

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$

18. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle (2012 E)

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρική Ερμηνεία:

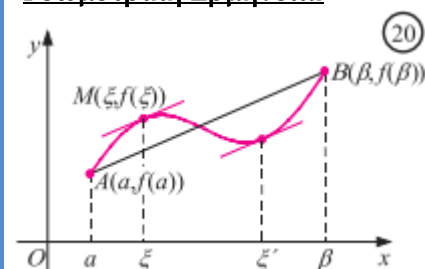


Υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ (2007 E)

19. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (2013–2016)

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) , τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Γεωμετρική Ερμηνεία:



Υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB όπου $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$. (2003–2008 E–2016 E)

20. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο (2012)

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f .

21. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο (2015)

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f .

22. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat (2013 E)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$

23. Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ (2013 E)

Κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ λέγονται τα εσωτερικά σημεία του Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος της είναι ίση με το μηδέν.

24. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή σε ένα διάστημα Δ (2006)

Η συνάρτηση f λέγεται κυρτή ή ότι στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σ' ένα διάστημα Δ όταν είναι συνεχής στο Δ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .

25. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κοίλη σε ένα διάστημα Δ (2010–2014)

Η συνάρτηση f λέγεται κοίλη ή ότι στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω σ' ένα διάστημα Δ όταν είναι συνεχής στο Δ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

26. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής μιας συνάρτησης f

Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής μιας συνάρτησης f όταν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως και η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$

27. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f (2010–2015 E)

Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$

28. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντ. στο $-\infty$)
(2007–2016 E)

Η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) όταν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ στο $-\infty$)

29. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντ. στο $-\infty$) **(2005–2011)**

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$ (αντιστοίχως αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$).

30. Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ **(2006 E–2011E–2014 E)**

Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f σε ένα διάστημα Δ , ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$

31. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού **(2018)**

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

1. Αν $P(x)$ πολυώνυμο, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \\ &= \alpha_n \lim_{x \rightarrow x_0} x^n + \alpha_{n-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \alpha_n x_0^n + \alpha_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + \alpha_0 = P(x_0) \end{aligned}$$

2. Απόδειξη Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών (2005–2015)

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα υπάρξει αριθμός η τέτοιος ώστε $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, με $x \in [\alpha, \beta]$. Παρατηρούμε ότι:

g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ αφού f είναι συνεχής

$$g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0 \text{ αφού } f(\alpha) < \eta$$

$$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0 \text{ αφού } f(\beta) > \eta$$

άρα $g(\alpha)g(\beta) < 0$.

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$

τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - \eta = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \eta$

3. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι και συνεχής στο σημείο αυτό (2003–2007 E – 2013 E – 2018)

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$.

Για $x \neq x_0$ έχουμε: $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$ οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0 \text{ αφού η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0. \end{aligned}$$

Άρα δείξαμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

4. Αν $f(x) = c$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = 0$

Για $x \neq x_0$ έχουμε: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$.

5. Αν $f(x) = x$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = 1$

Για $x \neq x_0$ έχουμε: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$

6. Αν $f(x) = x^v$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = vx^{v-1}$

Για $x \neq x_0$ έχουμε :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) = x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} = v x_0^{v-1}. \text{ Άρα } f'(x) = vx^{v-1}. \end{aligned}$$

7. Αν $f(x) = \sqrt{x}$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$ (2005 E–2009 E)

$$\begin{aligned} \text{Για } x \neq x_0 \text{ έχουμε : } f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}. \text{ Άρα } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

8. Αν $f(x) = x^{-v}$, $v \in \mathbb{N}^*$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = -vx^{-v-1}$

$$\text{Πράγματι : } f'(x) = (x^{-v})' = \left(\frac{1}{x^v}\right)' = \frac{(1)'x^v - 1(x^v)'}{(x^v)^2} = \frac{-vx^{v-1}}{x^{2v}} = -vx^{-v-1}$$

9. Αν $f(x) = \varepsilon\varphi x$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \end{aligned}$$

10. Αν $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $x > 0$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Πράγματι αν, $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε : $y = e^u$.

$$\text{Επομένως } y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

11. Αν $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$

Πράγματι αν, $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε : $y = e^u$.

$$\text{Επομένως } y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot (x \ln \alpha)' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha.$$

12. Αν $f(x) = \ln|x|$, $x \neq 0$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{x}$ (2008)

- Αν $x > 0$ τότε $f(x) = \ln|x| = \ln x$, άρα $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$
 - Αν $x < 0$ τότε $f(x) = \ln|x| = \ln(-x)$ οπότε θέτουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$ έχουμε $y = \ln u$.
 Επομένως: $y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.
 Άρα σε κάθε περίπτωση $f'(x) = \frac{1}{x}$

13. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν f συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ . (2004 E–2009–2014)

Για να είναι f σταθερή στο Δ , αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.
 - Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$
 - Αν $x_1 < x_2$ τότε αφού f συνεχής στο $[x_1, x_2]$, f παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , τότε η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
 Επειδή το ξ εσωτερικό σημείο του Δ τότε:
 $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1)$
 - Αν $x_1 > x_2$ τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$
 Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$, οπότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ .

14. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) = g(x) + c$.

- Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
 - Για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ ισχύει: $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$
 Άρα η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή, οπότε υπάρχει σταθερά c ώστε:
 $f(x) - g(x) = c \Leftrightarrow f(x) = g(x) + c$.

15. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν f συνεχής στο Δ και $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ . (2006–2012–2017)

Για να είναι f γνησίως αύξουσα στο Δ , αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$
 - Αφού f συνεχής στο $[x_1, x_2]$, f παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , τότε η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε
 $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi)$
 - Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$ θα είναι και $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
 Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

16. Απόδειξη Θεωρήματος Fermat**(2004 – 2011 – 2016 E – 2017E)**

– Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σε αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και $f(x) \leq f(x_0)$ (1) για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

– Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , άρα: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Επομένως:

– αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ τότε $x < x_0 \Leftrightarrow x - x_0 < 0$ και λόγω της (1) θα είναι $f(x) - f(x_0) \leq 0$

άρα $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ οπότε θα έχουμε $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ (2)

– αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ τότε $x > x_0 \Leftrightarrow x - x_0 > 0$ και λόγω της (1) θα είναι $f(x) - f(x_0) \leq 0$

άρα $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ οπότε θα έχουμε $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ (3)

Άρα από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

17. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

(2012 E – 2016)

– Αφού f συνεχής στο x_0 και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$ Έτσι έχουμε: $x \leq x_0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0)$ (1) για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$.

– Αφού f συνεχής στο x_0 και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$ Έτσι έχουμε: $x \geq x_0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0)$ (2) για κάθε $x \in [x_0, \beta)$.

– Άρα από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

18. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

(2014 E – 2018 E)

– Αφού η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, έστω ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 , θα είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως για $x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f .

– Θα δείξουμε τώρα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$ θα είναι $f(x_1) < f(x_2)$

Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$ θα είναι $f(x_1) < f(x_2)$

Αν $x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$

Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

19. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , να αποδείξετε ότι:

– Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ .

– Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει την μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ (2003E–2010–2015 E)

– Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ αφού :
 $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$

– Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν οι σχέσεις :
 $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε θα είναι και $F'(x) = G'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. Άρα από το πόρισμα της σταθερής συνάρτησης θα υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

20. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$. (2002–2008 E–2013)

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f , αφού

$$F'(x) = \left(\int_{\alpha}^x f(t)dt \right)' = f(x).$$

Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε : $G(x) = F(x) + c$. (1)

– Για $x = \alpha$ η (1) $\Rightarrow G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, άρα $c = G(\alpha)$, άρα $G(x) = F(x) + G(\alpha)$. (2)

– Για $x = \beta$ η (2) $\Rightarrow G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) \Leftrightarrow G(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha) \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ΒΑΣΙΚΑ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι και 1-1

Το αντίστροφο δεν ισχύει. **(2018)**

Δηλαδή, αν μια συνάρτηση είναι 1-1, αυτό δεν σημαίνει ότι υποχρεωτικά είναι και γνησίως μονότονη.

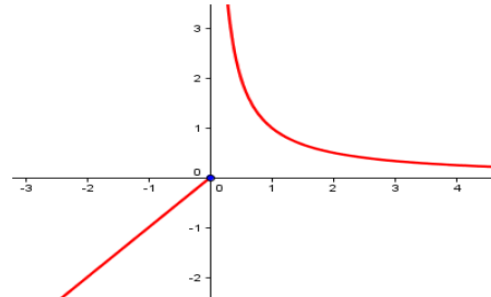
Πράγματι, η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

είναι συνάρτηση 1-1,

αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη,

αφού είναι γνησίως αύξουσα για $x \leq 0$,

ενώ γνησίως αύξουσα για $x > 0$



2) Αν ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = 0$ **(2018E)**

Η πρόταση αυτή είναι ψευδής.

Πράγματι, αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$

τότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} + 1\right) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ αλλά όμως γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

3) Αν για κάθε x κοντά στο x_0 είναι $f(x) > 0$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$

Η πρόταση αυτή είναι ψευδής.

Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = |x|$, $x \neq 0$ τότε $f(x) > 0 \forall x \neq 0$, αλλά $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

4) Αν η f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αυτό δεν σημαίνει ότι θα είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. **(2017)**

Πράγματι η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό

αφού: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x} = -1$ ενώ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1$

5) Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) = 0$, $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ τότε η f είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Η πρόταση αυτή είναι ψευδής. Πράγματι:

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ έχει $f'(x) = 0$, $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

6) Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ , παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε δεν ισχύει υποχρεωτικά $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Πράγματι η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αλλά δεν ισχύει $f'(x) > 0$ αφού $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ μιας και $f'(0) = 0$.

– Ομοίως για την γνησίως φθίνουσα με $f(x) = -x^3$

7) Το αντίστροφο του θεωρήματος Fermat δεν ισχύει.

Δηλαδή, αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και $f'(x_0) = 0$ τότε το x_0 δεν είναι πάντα θέση τοπικού ακροτάτου

Πράγματι η συνάρτηση $f(x) = x^3$ έχει $f'(0) = 0$, όμως το 0 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

8) Αν f συνεχής σε ένα διάστημα Δ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε f κυρτή στο Δ . Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Δηλαδή, αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και κυρτή στο Δ , τότε δεν ισχύει υποχρεωτικά $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Πράγματι, η συνάρτηση $f(x) = x^4$ έχει $f'(x) = 4x^3$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, αλλά δεν ισχύει $f''(x) > 0$ αφού $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ μιας και $f''(0) = 0$.

– Ομοίως για την κοίλη με $f(x) = -x^4$

9) Αν f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ και ισχύει $f''(x_0) = 0$, αυτό δεν σημαίνει ότι το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f (2017 E)

Πράγματι, η συνάρτηση $f(x) = x^4$, με $f''(x) = 12x^2$ έχει $f''(0) = 0$, αλλά το 0 δεν είναι θέση σημείου καμπής της f , γιατί η συνάρτηση είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και επομένως δεν έχει σημεία καμπής.

Οι Ερωτήσεις Σωστό-Λάθος των Πανελληνίων

2002

1. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και συνεχής στο (α, β) , τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha, \beta]$ μία μέγιστη τιμή.
2. Κάθε συνάρτηση που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.
3. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [xf(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} xf'(x)dx$
5. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

2003

6. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
7. Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx = [f(x)]_{\alpha}^{\beta}$
8. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται πάνω από την γραφική της παράσταση
9. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0
10. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
11. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιοδήποτε $x_1, x_2 \in A$ τότε ισχύει η συνεπαγωγή αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$
12. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g'(x)dx = [f(x) \cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \cdot g(x)dx$

2004

13. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$
14. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g'(x_0)$.
15. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .
16. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$
17. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.

18. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις fog, gof τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

19. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$

20. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$ εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0 ,

με $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$

2005

21. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.

22. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

23. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στην γραφική παράσταση της f^{-1} .

24. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

25. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α ένα σημείο του Δ , τότε $\left(\int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x) - f(\alpha)$

26. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε x που ανήκει στο Δ ή αρνητική για κάθε x που ανήκει στο Δ , δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .

27. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .

28. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης f

29. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις fog, gof τότε είναι υποχρεωτικά $\text{fog} \neq \text{gof}$

30. Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda \in \mathbb{R}^*$ τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$

2006

31. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

32. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσου μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

33. Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

34. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \cdot g(x) dx$$

35. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι

παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $\left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

36. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$

37. Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .

38. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\alpha) - G(\beta)$

2007

39. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$

40. Έστω η f είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

41. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0

42. Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$

43. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσου μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

44. Αν f, g, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g'(x)dx$$

45. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α ένα σημείο του Δ , τότε $\left(\int_{\alpha}^x f(t)dt\right)' = f(x)$

46. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το (A, B) όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$

47. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

2008

48. Αν μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$, $\forall x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$

49. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

50. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

51. Αν f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

52. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες

53. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από την γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

54. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$

55. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Ισχύει η ισοδυναμία: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$

2009

56. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο το $f(x_0)$ όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
57. Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$
58. Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
59. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) < 0$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$
60. Η συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
61. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
62. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon \phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
63. Για κάθε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx = [f(x)]_{\alpha}^{\beta}$

2010

64. Έστω η f είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ .
65. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το (A, B) όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$
66. Ισχύει $(\sin x)' = \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$
67. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0
68. Αν $f(x) = \alpha^x$ με $\alpha > 0$, τότε ισχύει $(\alpha^x)' = x \cdot \alpha^{x-1}$
69. Αν f, g ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g, g \circ f$ τότε υποχρεωτικά $f \circ g = g \circ f$.
70. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
71. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$.

2011

72. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1 όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$
73. Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$ ισχύει: $(\varepsilon \phi x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
74. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$
75. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$

76. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 ολικό μέγιστο το $f(x_0)$ όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
77. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.
78. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
79. Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

2012

80. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .
81. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0
82. $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$
83. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \cdot g(x) dx$
84. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f .
85. Αν είναι $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$
86. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0
87. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha)$

2013

88. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0
89. Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
90. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$
91. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
92. Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.
93. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$
94. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$
95. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ .

2014

96. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
97. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.
98. Αν f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$
99. Έστω η f είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ
100. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Ισχύει η ισοδυναμία : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$
101. Αν είναι $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$
102. Έστω η f είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο Δ , τότε υποχρεωτικά $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

2015

103. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$, $g \circ f$ τότε ισχύει πάντοτε $f \circ g = g \circ f$
104. Ισχύει ότι: $(\sin x)' = \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$
105. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ και η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται παντού στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$
106. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
107. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
108. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
109. Υπάρχει πολωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη
110. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\alpha) - G(\beta)$

2016

111. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\alpha) - G(\beta)$
112. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
113. Κάθε συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ είναι σταθερή στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$

114. Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .

115. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

116. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

117. Αν $f(x) = \ln|x|$ για κάθε $x \neq 0$, τότε $f'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \neq 0$

118. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

119. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

120. Για κάθε συνάρτηση f συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύει:

αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$ τότε $f(x) > 0$ στο $[\alpha, \beta]$.

2017

121. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$

122. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού τα A, B αντίστοιχα,

τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$

123. Για κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

124. Αν είναι $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$

125. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσου μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα

126. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = G(\alpha) - G(\beta)$

127. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ώστε: $f(x_1) < f(x_2)$

128. Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στην γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της αντίστροφης.

129. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

130. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = 0$ τότε $f(x) = 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$

2018

131. Η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μια μόνο θέση ολικού μεγίστου

132. Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$

133. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 0$

134. Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$

135. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f

136. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της .

137. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο .

138. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$, τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$

1. Σύνθεση-Μονοτονία-Αντίστροφες

1.1 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = \ln(x-1)$. Να βρεθούν οι $f \circ g$ και $g \circ f$ αν υπάρχουν

1.2 Να βρεθεί η συνάρτηση f αν ισχύουν $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x$, $g(x) = x + 4$

1.3 Να βρεθεί η συνάρτηση g αν ισχύουν $(f \circ g)(x) = x + 8$, $f(x) = e^{x+1}$.

1.4 Αν το πεδίο ορισμού της f είναι το $[0, 1]$ να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(\ln x)$.

1.5 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - \ln x$, $g(x) = \ln \frac{e}{x}$

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f , g είναι ίσες

β) Αν $h(x) = e^x - 2$ να βρείτε τη συνάρτηση $f \circ h$

γ) Αν για μια συνάρτηση $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\varphi(e^x) = e^x + x - 2$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την φ .

1.6 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x - 3$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x , η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα των x'

γ) Να λύσετε την ανίσωση $2^{3x-x^2} - 2^{6-2x} > x^2 - 5x + 6$

1.7 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$

α) Να ορίσετε την συνάρτηση $h = f \circ g$

β) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης h

1.8 Να βρείτε την αντίστροφη των συναρτήσεων

α) $f(x) = 2\sqrt{3-x} - 1$ β) $f(x) = 5 - \ln(x+2)$

γ) $f(x) = e^{x+2} - 3$

δ) $f(x) = x^2 + 4x + 1$, $x \geq -2$

1.9 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 10$

α) Να βρείτε την αντίστροφη της f

β) Να λύσετε την εξίσωση $(f \circ f)(x) = 3$

1.10 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{-2x} - 3x - 2e^2$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(x - 2e^2) - 1) = 3$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(x) - 1 - 2e^2) < 0$

1.11 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x + x - 1$, $g(x) = e^{-x}$

α) Να ορίσετε την $f \circ g$

β) Να αποδείξετε ότι η $f \circ g$ αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $(f \circ g)^{-1}$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{1-x^2} + 1 > e^{-2} + x^2$

1.12 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3^x + x - 9$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να βρείτε την τιμή $f^{-1}(-5)$

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f , f^{-1}

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(\ln x) - 3) > 0$

1.13 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + 3x - 5$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης

β) Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της γραφικής παράστασης της αντίστροφης στο σημείο της με τετμημένη 0.

1.14 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) + x$

α) Να δειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f , f^{-1}

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα x' και την ευθεία $x = e$

1.15 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $x \geq 1$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , $C_{f^{-1}}$

1.16 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης

β) Να υπολογίσετε τα όρια: $\beta 1) \lim_{x \rightarrow e} \frac{(f^{-1}(x))^2 - 1}{\ln x - 1}$ $\beta 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)}$

1.17 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - x^2 + 1$, $x > 0$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης

β) Να υπολογίσετε τα όρια: $\beta 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{f^{-1}(x) + x}$ $\beta 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{f^{-1}(x) + x}$

1.18 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε τα σημεία $A(1, 4)$, $B(2, 3)$ να ανήκουν στην γραφική παράσταση της f .

α) Να βρείτε την μονοτονία της f .

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(|x| + 1) - x) - f(3 - x) < 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(x^2 - 1) - 1) - 4 \geq 0$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(gog)(x) = g(x) + f(x^3 + 1) - 4$.

δ_1) Να δείξετε ότι η g είναι 1-1

δ_2) Να λύσετε την εξίσωση $g(e^x) - g(1 - x) = g(0)$.

1.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη

β) Να μελετήσετε τις f , f^{-1} ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι ο άξονας συμμετρίας των C_f , $C_{f^{-1}}$ είναι η κοινή τους εφαπτομένη στο $O(0, 0)$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq f^{-1}(x)$, $\forall x > -1$

δ) Αν G μια παράγουσα της συνάρτησης $g(x) = f(x) + f^{-1}(x)$, $\forall x > 0$, να δείξετε ότι για $0 < \alpha < \beta$ ισχύει $(\beta - \alpha) \cdot g(\alpha) < G(\beta) - G(\alpha) < (\beta - \alpha) \cdot g(\beta)$

1.20 Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln \frac{1-x}{x}$

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης
 β) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης
 γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της αντίστροφης και των ευθειών $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$

1.21 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 8$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1
 β) Θεωρούμε την συνάρτηση $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(g(x) - x) - f(\ln x + 1) = 0$, $x > 0$.
 β₁) Να βρείτε τον τύπο της g
 β₂) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1
 β₃) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της g
 β₄) Να λύσετε την εξίσωση $g^{-1}(3g(|x| + 1) - 4) = 1$
 β₅) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 4 < \ln \frac{x^2 + 7}{2x^2 + 3}$

2. Όρια – Συνέχεια – Ασύμπτωτες

2.1 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{x^3}$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 e^x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x - e^x)$ δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2)^{\frac{1}{x}}$

2.2 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln x}{e^x}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} \cdot \ln x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2)$ δ) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

2.3 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^3 - 7x^2 + 3x - 2}$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x|x^2 - x - 2|}{5x - |x - 1|}$ γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + x + 2} + 3x)$

2.4 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x}$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta \mu x}{1 + x^2}$

2.5 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{x+1} - 3 \cdot 5^x}{5 \cdot 3^x + 2 \cdot 5^{x-1}}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1} - 3 \cdot 5^x}{5 \cdot 3^x + 2 \cdot 5^{x-1}}$

2.6 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x + \ln x + 2}{2 \ln^2 x - 3 \ln x + 7}$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(2 + e^{x+3})]$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x + \eta \mu x) - 2 \ln x]$

2.7 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{5-x^3}{2+x^2}}$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{1-x} \eta \mu x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x}$

2.8 Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x f(x) - 2}{x^2 + f(x)} = -2$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

2.9 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^3}{x^2 - 1} = 2$

Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\begin{array}{lll} \alpha) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) & \beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 1}{x - 1} & \gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f^2(x) - 5f(x) + 2}{x - 1} \\ \delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f^2(x) - 3f(x)| - 2}{x^2 - 1} & \varepsilon) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f^2(x) + 3} - 2}{f(x) - 1}, f(x) \neq 1 & \end{array}$$

2.10 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2 - \sqrt{x+4}$, $g(x) = \sqrt{5-x}$

α) Να ορίσετε την αντίστροφη της f

β) Να ορίσετε την συνάρτηση $f^{-1} \circ g$

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{h(x) - x + 1}{\sqrt{x} - 2} = 12$

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(f^{-1} \circ g)(x) + h(x)}{x - 4}$

2.11 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3\alpha x + \beta + 4}{3x - 9} = 2$

2.12 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{x-1} + 2$.

Επιπλέον θεωρούμε την συνάρτηση $g: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(g \circ f)(x) = x - 1$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g

β) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης g

γ) Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\gamma 1) \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x^2 + x) - g(x^2)) \quad \gamma 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu g(x)}{g(x)} \quad \gamma 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x+1) - 3^{x+1}}{f(x+2) - 3^{x-1}}$$

2.13 Έστω συνάρτηση f συνεχής ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot \eta \mu x - x^2}{x} = 3$. Να βρείτε το $f(0)$.

2.14 Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\ln x}$

α) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > f^{-1}(x)$

$$\gamma) \text{ Να βρείτε τα όρια } \gamma 1) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f^{-1}(x) - 1}{\sqrt{\ln x}} \quad \gamma 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f^{-1}(x)}{\ln f(x)}$$

2.15 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $\alpha) f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 1}$ $\beta) f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

2.16 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{e^x}, & x \leq 0 \\ \frac{x^2-1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

2.17 Αν η ευθεία $\varepsilon: 2x - y + \beta = 0$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ με $f(x) = \frac{(\alpha+1)x^2 - 2\alpha x + 3}{3x - 2}$ να βρείτε τα α, β .

2.18 Αν η ευθεία $\varepsilon: y = 3x + 4$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, τότε να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ για τον οποίο ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu f(x) + 6x}{x f(x) - 3x^2 + 5x + 2} = 1$

2.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 5}{x + 1}$.

Αν η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, τότε :

α) Να βρείτε τα α, β .

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - x^2 \eta \mu \frac{1}{x^2} - x \right) = 0$

2.20 α) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση

της $f(x) = \frac{2x^3 - 9x^2 + 13x - 5}{x^2 - 3x + 2}$, της πλάγιας ασύμπτωτής της στο $+\infty$

και των ευθειών $x = 3$, $x = \lambda$ με $\lambda > 3$.

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

3. Bolzano - Σύνολο Τιμών - Θ.Ε.Τ.

3.1 Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha)g(\beta) > 0$.

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $(\xi - \alpha)g(\xi) = -(\xi - \beta)f(\xi)$.

3.2 Έστω f συνεχής στο $[0, 5]$. Να δείξετε ότι υπάρχει

ένα τουλάχιστον $\xi \in [0, 5]$ τέτοιο, ώστε $10f(\xi) = f(1) + 2f(2) + 3f(3) + 4f(4)$.

3.3 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [1, 2] \rightarrow [0, 1]$.

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [1, 2]$ τέτοιο, ώστε $f^2(x_0) - x_0 f(x_0) = 1 - x_0$.

3.4 Έστω η συνάρτηση $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0 \in (0, 1]$: $2x_0 \ln x_0 = 2 - 3x_0$

3.5 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - \ln(x-1), & x \geq 2 \\ e^{2-x} - x^3 + 11, & x < 2 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{2-f(\alpha)}{x-1} + \frac{3-f(\beta)}{x-3} = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1, 3)$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

3.6 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - 6f(x) + 5 = x^4 + 4x^2$.
Να βρείτε :

- α) την τιμή $f(1)$
β) τον τύπο της f
γ) το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$

3.7 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (1, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - 2f(x) = e^{2x} - 1$

- α) Να βρείτε τον τύπο της f
β) Να βρείτε την αντίστροφη της f

γ) Να υπολογίσετε τα όρια : $\gamma 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2^{x-3} + 3^x} \quad \gamma 2) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f^{-1}(x)}{x-1}$

3.8 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x - 1} = -2$

- α) Να βρείτε την τιμή $f(1)$
β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 4f(x) + 3}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$
γ) Έστω επίσης ότι $f(x) \neq 2x, \forall x \in \mathbb{R}$
γ₁) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

γ₂) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + 2e^{x-1} = \frac{x^2+3}{x^2+1}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα $x_0 < 1$.

3.9 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 2} = 4$

και $x + \eta\mu 3x \leq xf(x) \leq 4x, \forall x \geq 0$

- α) Να δείξετε ότι $f(2) = 2, f(0) = 4$
β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - 4}{x^2 - 2x}$
γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = 6x + 1$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο $M(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (0, 2)$
δ) Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο $[0, 2]$, να αποδείξετε ότι :
δ₁) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$
δ₂) υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (0, 2) : f(\xi) = \frac{f(\frac{1}{2}) + 2f(1) + 3f(\frac{3}{2})}{6}$

3.10 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{x - 1} = 5$ και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $M(0, 3)$.

- α) Να βρείτε την τιμή $f(1)$
β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x) = x^2 - 1$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη x_0 στο $(0, 1)$.
γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x^2 + x}{x^2 - 1}$.

3.11 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{-x} f(x) \geq 3x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1) : \int_0^\xi f(t)dt = e^\xi$.

3.12 Αν f συνεχής στο $[0, 1]$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1] : \int_0^1 f(x) \cdot (2x + 1)dx = 2f(\xi)$

3.13 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 1$, $e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} = 1$. Να βρείτε τον τύπο της f .

3.14 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 1$, $f^2(x) + 2f(x)\eta\mu x = x^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\beta 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2 + \sigma\upsilon\nu x}{x} \quad \beta 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \beta 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \quad \beta 4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(f(x))}{f(x)}$$

3.15 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, $f^2(x) + 2f(x)\sigma\upsilon\nu x = x^2 + x + \eta\mu^2 x$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\beta 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta\mu 2x}{x} \quad \beta 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

4. Παραγωγίσιμες Συναρτήσεις

4.1 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x < 1 \\ \frac{\ln^2 x}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

α) Να βρείτε τα α, β

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^e f(x)dx$

4.2 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha e^x + \beta, & x > 0 \\ 3, & x = 0 \\ \alpha x + \beta + 2, & x < 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε τα α, β

β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow \ln 4} \frac{\sqrt{f(x)} - 3}{x^2 - 4\ln^2 2}$

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

ε) Να ορίσετε την συνάρτηση f^{-1}

4.3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{2\ln(x-1)}{x} + x + 5, & x > 2 \\ e^{2-x} + 3x, & x \leq 2 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2

β) Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2016$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-\infty, 0)$

4.4 Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων των C_f στις παρακάτω περιπτώσεις :

α) $f(x) = e^{x^2-1} - x \ln x$ στο $M(1, f(1))$

β) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ αν η εφαπτόμενη διέρχεται από το $M(3, -1)$

γ) $f(x) = x + \ln x$ αν η εφαπτόμενη διέρχεται από την αρχή των αξόνων

δ) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ αν οι εφαπτόμενες σχηματίζουν γωνία $\frac{3\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$

ε) $f(x) = 2x + \frac{1 + \ln x}{x}$ αν η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta: 2x - y + 2018 = 0$

4.5 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και έστω M το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$. Να βρείτε :

α) τον αριθμό α

β) την εφαπτομένη της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta: 2x - 10y + 21 = 0$.

4.6 Δίνεται η συνεχής στο 4 συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - \sqrt{x+12}}{x-4} = \frac{3}{8}$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη 4.

5. Ρυθμός Μεταβολής

5.1 Ένα σώμα κινείται πάνω σε άξονα και η θέση του την χρονική στιγμή $t(\text{sec})$ δίνεται από τον τύπο $x(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 5$, $t \in [0, 6]$. Να βρείτε

α) την ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$

β) την επιτάχυνση του σώματος την χρονική στιγμή $t_2 = 4 \text{ s}$

γ) ποιες χρονικές στιγμές το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο

δ) ποια χρονικά διαστήματα το σώμα κινείται προς την θετική φορά και ποια προς την αρνητική

ε) το συνολικό διάστημα που διένυσε το σώμα.

5.2 Το μήκος x και το πλάτος y ενός ορθογωνίου μεταβάλλονται. Το μήκος x αυξάνεται με ρυθμό 3 cm/s και το πλάτος y ελαττώνεται με ρυθμό 2 cm/s .

α) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου

β) Κάποια χρονική στιγμή το μήκος του ορθογωνίου είναι 20 cm και το πλάτος του 10 cm .

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου αυτή την χρονική στιγμή.

5.3 Το μήκος x και το πλάτος y ενός ορθογωνίου μεταβάλλονται.

Το μήκος x μειώνεται με ρυθμό 1 cm/s και το πλάτος y αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s . Κάποια χρονική στιγμή t_0 το μήκος του ορθογωνίου είναι 8 cm και το πλάτος του 6 cm . Τη χρονική στιγμή t_0 να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου, του εμβαδού και της διαγωνίου του ορθογωνίου.

5.4 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

γ) Η τετμημένη ενός σημείου $M(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha > 0$ αυξάνεται με ρυθμό 2 μον/s και τη χρονική στιγμή t s το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα σημεία $O(0, 0)$, $A(\alpha, 0)$ και $B(0, f(\alpha))$ είναι $E(t)$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ τη χρονική στιγμή που η τετμημένη του M είναι 4.

5.5 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 5$, $xf'(x) = 2(1 - f(x))$, $x > 0$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$, $x > 0$

β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda$ με $0 < \lambda \neq 1$

γ) Αν $\lambda > 1$ και το λ αυξάνεται με ρυθμό 3 μον/s, τότε να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(\lambda)$ τη στιγμή που είναι $\lambda = 2$

5.6 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 1}{x^2}$, $x > 0$

α) Να βρείτε την ασύμπτωτη (ε) της C_f στο $+\infty$

β) Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την (ε) και τις ευθείες $x = 1$, $x = \alpha > 1$

γ) Αν το α αυξάνεται με ρυθμό 4 μονάδες/s, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του E ως προς τον χρόνο τη στιγμή που είναι $\alpha = 2$.

5.7 Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

α) Έστω $E(\alpha)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x = \alpha$ με $\alpha > 0$. Αν το α μεταβάλλεται με ρυθμό 10 cm/s, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του $E(\alpha)$, τη στιγμή κατά την οποία είναι $\alpha = 3$ cm.

β) Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση g με $|g(x) + x - 2| \leq |f(x)|$, $x \in \mathbb{R}$

β_1) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = -x + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

β_2) Αν E το εμβαδόν που περικλείεται από την C_g , την πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$, να δείξετε ότι $E \leq \ln 5$.

6. Rolle - Θ.Μ.Τ. – Σταθερές

6.1 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 1$, $f(1) = 2$.

Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$: $2f'(\xi)(f(\xi) - 1) = 3\xi^2$.

6.2 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = -1$, $f(1) = e - 2$.

Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$: $f'(\xi) = 3\xi^2(f(\xi) + 2)$.

6.3 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f(1) = f(2) = f(3)$.
Να δείξετε ότι :

- α) η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο $(1, 3)$.
β) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 3) : f''(\xi) = f'(\xi)$.

6.4 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)f(x) + \eta\mu(x-1)}{\sqrt{x+3}-2} = 12$

α) Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1) : f(\xi) = \frac{1}{\frac{\xi f'(\xi)}{e^{f(\xi)}}}$

6.5 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + \eta\mu^2(x-2) + 5}{\sqrt{x-1}-1} = -2$

α) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2) : \frac{1}{x_0-1} + \frac{1}{x_0-2} = \frac{2026}{f(x_0)}$

β) Αν ισχύει ότι $f^2(x) + f(x^2) = 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ τότε :

β1) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$

β2) να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2) : (\xi-3) \cdot f'(\xi) + f(\xi) = 1$

6.6 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(7)=13, f'(7)=2$.
Η εφαπτομένη της C_f στο $M(7, f(7))$ τέμνει την C_f στα σημεία της με τετμημένες 1 και 5 .

α) Να βρείτε τις τιμές $f(1), f(5)$

β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 5) : f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 4$

6.7 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, 2\alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\alpha > 0$ για την οποία ισχύει

$f(\alpha) = \alpha, f(2\alpha) = 2\alpha$. Να δείξετε ότι :

α) υπάρχει $x_0 \in (\alpha, 2\alpha) : f(x_0) = 3\alpha - x_0$

β) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, 2\alpha) : f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$

6.8 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = f(1) = 2$ και $f(2) = 4$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)f'(x) = 3f'(x) + 4x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

γ) Αν η f' είναι γνησίως μονότονη, να αποδείξετε ότι

γ₁) υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 2) : f'(x_0) = 2$.

γ₂) η f' είναι γνησίως αύξουσα

γ₃) $f(4) > 8$

6.9 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5x}{\sqrt{x}-1} = -24$

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$

β) Αν επιπλέον ισχύει $xf'(x) = \alpha x - 2f(x), x > 0$

β₁) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$

β₂) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2f(x) - x^3$ είναι σταθερή.

β₃) Να βρείτε τον τύπο της f

β₄) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

6.10 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = -\frac{3f(x)}{x}$, $x > 0$, $f(1) = 2$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^3 f(x)$ είναι σταθερή

β) Να βρείτε τον τύπο της f

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$

6.11 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f''(x) = -\frac{2}{x^3}$, $x > 0$.

Να βρείτε τον τύπο της f , αν η ευθεία $x - y - 1 = 0$ είναι ασύμπτωτη της C_f

6.12 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$, $x > 0$

Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$ έχει εξίσωση $-2x + y - 1 = 0$, να βρείτε :

α) τις τιμές $f'(1)$, $f(1)$

β) τον τύπο της συνάρτησης f

γ) το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

6.13 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = e^{\ln x + x^2} - f(x)$, $f(0) = 0$. Να βρείτε την f

6.14 Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $\ln f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \ln 2$, $f'(x) \sin x + f(x) \eta \mu x = f(x) \sin x$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x} = 2 \eta \mu x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

6.15 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) - f(x) = \frac{e^{2x} + 2xe^x}{e^x + x^2}$

Επίσης η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ διέρχεται από το σημείο $B(2, 2)$. Να βρείτε :

α) την εξίσωση της εφαπτομένης (ε)

β) τον τύπο της f

6.16 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ ώστε να ισχύουν

$f'(1) = 2e^2$ και $f'(x) - 2xf(x) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$

β) Να βρείτε τον τύπο της f

6.17 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = -1$, $f'(x)(f(x) - x) = f(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^2(x) - 2xf(x) = 5$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

6.18 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 f(x) + 2}{x + 1} = 5$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$, $f'(-1)$

β) Έστω επιπλέον ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x)f(x) = 6x^2 - (f'(x))^2$.

Να βρείτε :

β₁) Τον τύπο της f

β₂) Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + x}$

6.19 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $e^x(f(x) + f'(x)) + \eta\mu x = -f'(x)$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$ είναι κάθετη στην ευθεία $\eta: 8x - 2y + 2016 = 0$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη ε

β) Να βρείτε τον τύπο της f

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : f(\xi) = \eta\mu\xi$

6.20 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=0$, $f'(0)=4$, $f'(x) > f(x)$ και $f''(x) - 4f'(x) + 3f(x) = 0$.

Να βρείτε :

α) τον τύπο της f

β) τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

γ) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = \ln \frac{1}{2}$.

6.21 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [1, 4] \rightarrow [-2, 3]$ με $f(1) = 2$, $f(4) = 1$

Να αποδείξετε ότι :

α) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 4)$

β) η C_f έχει τουλάχιστον δύο οριζόντιες εφαπτόμενες ευθείες και έχει ένα τουλάχιστον πιθανό σημείο καμπής

γ) η ευθεία $\varepsilon: y = -x + 2$ τέμνει τη C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο

δ) υπάρχει μια τουλάχιστον εφαπτόμενη ευθεία της C_f η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$

ε) $\exists \xi_1, \xi_2 \in (1, 4)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$: $\frac{1}{f'(\xi_1)} - \frac{1}{2f'(\xi_2)} = -\frac{3}{2}$

6.22 Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$ και $1 + x^2 f''(x) = 0$, $x > 0$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να βρείτε σημείο M της C_f το οποίο απέχει από το $A(0, 1)$ την ελάχιστη απόσταση.

6.23 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[2, 5]$, παραγωγίσιμη στο $(2, 5)$ με $f'(x) \neq 0, \forall x \in (2, 5)$

α) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2, 5) : f(x_0) = \frac{f(2) + 3f(5)}{4}$

β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi \in (2, 5)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$: $\frac{3}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{4}{f'(\xi)}$

Δίνεται επιπλέον $f(2) = 3$ και $f(5) = 1$

β1) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(f(x) + 2) = 2$

β2) Να δείξετε ότι η εξίσωση $3f'(x) = 6x - 23$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(2, 5)$

7. Μονοτονία – Ακρότατα Σύνολο Τιμών

7.1 Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και ακρότατα $f(x) = \frac{x^2 - 3}{e^x}$

7.2 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (2x + 1)e^{-x^2}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

7.3 Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(e) = -e^2$, $xf'(x) - f(x) = 2ex - x^2$, $x > 0$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

7.4 Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = \ln 2$, $(x^2 + x)f'(x) + (x + 1)f(x) = 1$, $x > 0$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

7.5 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να λύσετε τις ανισώσεις: $\beta_1) e^{x^2+x-2} + x^2 + x < 3$

$$\beta_2) e^{|x|+3} - e^{2|x|+1} \geq |x| - 2$$

7.6 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) = e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(2^x + x) - f(4 - x^3) < f\left(\ln \frac{1}{2}\right) - 1$

7.7 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 6$, $f'(x) - f(x) = e^x(2x - 4)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Αν $\alpha > 0$ να αποδείξετε ότι $2f(x) < f(x + \alpha) + f(x - \alpha)$

7.8 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$, $x^2 f'(x) + xf(x) = 1$, $x > 0$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

γ) Να αποδείξετε ότι $e^\pi > \pi^e$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $(|x| + 5)^{2|x|+3} < (2|x| + 3)^{|x|+5}$

7.9 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + e^{f(x)} = 1 - x - x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2e^x + x) - f(2 + \eta \mu x \cdot \sigma \upsilon \nu x) = 0$

γ) Να βρείτε την τιμή $f(0)$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x + \frac{2 \ln x}{x} - 1\right) > 0$

7.10 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

δ) Αν $0 < \alpha < \beta < 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha e^\beta < \beta e^\alpha$

ε) Να λύσετε την εξίσωση $\ln \frac{x^2 + e^x + 1}{x^2 + 2} = e^x - 1$

7.11 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = \ln 2$, $xf'(x) = \frac{1}{x+1} - f(x)$, $x > 0$

- α) Να βρείτε τον τύπο της f
- β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και το σύνολο τιμών της.
- γ) Να αποδείξετε ότι $(x^2 + 2)^{x^2+2} > (x^2 + 3)^{x^2+1}$.
- δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, 2) : f(\xi) = 2 - \xi$.

7.12 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(0) = 1$, $g'(x) + x = g(x) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε τον τύπο της g
- β) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1 και να βρείτε το πεδίο ορισμού της g^{-1}
- γ) Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x$, $x > 0$.
- γ₁) Να βρείτε τον τύπο της f
- γ₂) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) f\left(\frac{x}{e}\right) = -2016$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο $(0, +\infty)$.

7.13 Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 2x \cdot \ln x$

7.14 Να αποδείξετε ότι $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$, $x > 0$.

7.15 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\alpha^{x-1}$, $\alpha > 0$ ώστε να ισχύει $\alpha^{x-1} \geq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε τον αριθμό α .
- β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
- γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi > 0$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 2016$

7.16 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x \ln x + \alpha x + 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) \geq \alpha + 1$, τότε :

- α) να βρείτε τον αριθμό α .
- β) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$
- γ) να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- δ) να αποδείξετε ότι $x^x \geq e^{x-1}$, $\forall x > 0$

7.17 Δίνεται συνεχής, γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ και F μια παράγουσά της στο $[0, +\infty)$ με $F(0) = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι $F(x) > x$, $\forall x > 0$
- β) Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_F , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$, να δείξετε ότι : $2E > 1$.

7.18 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, $\sqrt{x^2 + 1} \cdot f'(x) + \frac{xf(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε τον τύπο της f
- β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
- γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x^4 + 1) = f(3x^3 + 2x^2 + 3x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$ και μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 4)$
- δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 = 4x + 3$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 4)$

7.19 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\frac{f'(x) - f(x)}{3x^2 + 1} = e^x$ με $f(0) = 0$ και η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$

α) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f

β) Να λυθεί η ανίσωση $g(e^x) - g(1-x) \leq 0$

γ) Αν για την συνεχή συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\varphi^3(x) + \varphi(x) \geq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

να αποδείξετε ότι $\int_0^{10} \varphi(x) dx \geq 14$.

8. Κυρτότητα- Σημεία Καμψής

8.1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και τις οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 1$

8.2 Να κάνετε την μελέτη και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$

8.3 Δίνεται συνάρτηση $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{-x}(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής

δ) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f

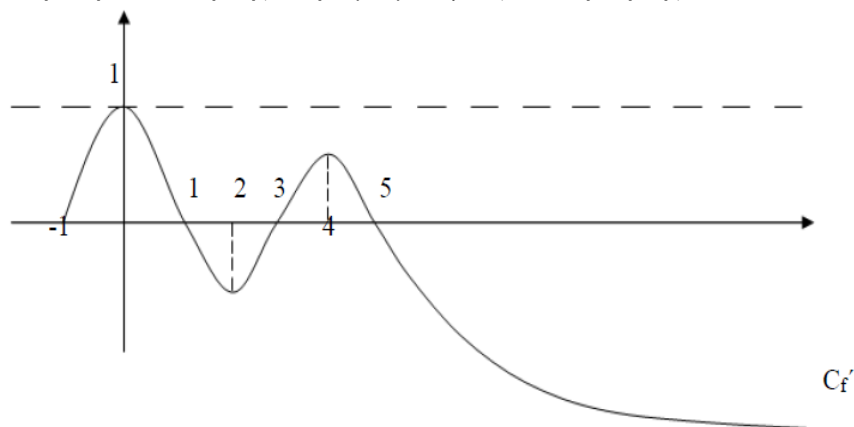
8.4 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, +\infty)$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής

γ) Αν $f(0) = 0$, να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 1) \cdot f\left(\frac{\eta\mu x}{x + 1}\right) - (x - 1) \cdot \eta\mu x}{(x - 1) \cdot \eta\mu x}$$



8.5 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(1) = 2$, $x \cdot f'(x) - f(x) - x^2 = 1 - \ln x$, $x > 0$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$, $x = \frac{1}{2}$, $x = e$

8.6 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $e^{f(x)} + f(x) = x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$
- β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$
- γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα
- δ) Να αποδείξετε ότι $xf'(x) \leq f(x) \leq \frac{x}{2}$
- ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$: $2f(\xi) = (\xi - 1)\sqrt{e^\xi}$

8.7 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, κοίλη και τέτοια, ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3e^{x-2}}{x-2} = 1$

- α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$
- β) Να αποδείξετε ότι $4x - 5 - f(x) \geq 0$, $\forall x \in [1, 3]$. Πότε ισχύει η ισότητα;
- γ) Να αποδείξετε ότι: $\int_1^3 f(x)dx < 6$

8.8 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 2)e^x - 2$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα
- β) Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(ex)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $M(0, f(0))$
- δ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{f(x) - 2x}$
- ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την εφαπτομένη και την ευθεία $x = 2$

8.9 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(1) = -6$, $x \cdot f'(x) = f(x) + x^2 + 8\ln \frac{e}{x}$, $x > 0$

- α) Να βρείτε τον τύπο της f
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

8.10 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ ώστε η f να είναι η αρχική της $g(x) = \frac{2x}{e^{f(x)}}$

- α) Να βρείτε την τύπο της f .
- β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$.
- δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx > \frac{4\ln 2 - 1}{8}$
- ε) Αν F είναι αρχική της f με $F(1) = 0$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_F , την ευθεία $x = 1$ και τους άξονες $x'x$, $y'y$.

8.11 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2}{e^x}$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- β) Να λύσετε την ανίσωση $f'(x) + \frac{2}{e^2} > 0$
- γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $M(0, f(0))$
- δ) Να δείξετε ότι $x^2 + 2xe^x \geq 2e^x - 2$
- ε) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{e^{-x}}{2} = \frac{1-x}{x^2+2}$
- στ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha) + 2\alpha - 2}{x-1} + \frac{e^x}{x} = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, 1)$

8.12 Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(1) = 0$, $x^2 \cdot f'(x) + x \cdot f(x) = 1$, $x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο $M(0, -1)$

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{\ln^2 x - x^2 + 2x - 1}$

8.13 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και ικανοποιεί την σχέση

$$x^2(f'(x) - 2xe^{-f(x)}) = 2xe^{-f(x)} - f'(x)$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 = e^{2018} - 1$

ε) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

8.14 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - e^{1-x}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την εφαπτομένη και την ευθεία $x = 2$.

δ) Αν $E(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = \lambda$ με $0 < \lambda < 1$, να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$

8.15 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$ και F μια παράγουσα της f στο διάστημα $(0, +\infty)$, $F(1) = 0$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και να λυθεί η $F(x^2 + 1) > 0$

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση F ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της.

γ) Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_F , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 2$, να δείξετε ότι: $2E > e$.

8.16 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $e^{f(x)}(f^2(x) - 2f(x) + 3) = x$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη

β) Να μελετήσετε την f^{-1} ως προς την κυρτότητα. Στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = 1$

γ) Θεωρούμε τα σημεία $A(x, f^{-1}(x))$, $B(f^{-1}(x), x)$ των $C_{f^{-1}}$, C_f αντίστοιχα.

γ1) Να αποδείξετε ότι $\forall x \in \mathbb{R}$, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτόμενων των $C_{f^{-1}}$, C_f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

γ2) Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A , B γίνεται ελάχιστη και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους

8.17 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+1)^4 + 4e^{-x}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $M(-1, f(-1))$

δ) Να δείξετε ότι $e^x(x+1)^4 + 4e^{x+1} \cdot x \geq -4$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x + 2) = -4e^{x+1} - 8e$

στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την εφαπτομένη στο M και τις ευθείες $x=0$ και $x=-1$

9. Ολοκληρώματα

9.1 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_1^e \frac{(\ln x + 1)^2}{x} dx$

β) $\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+3x-2} dx$

γ) $\int_0^1 (2x+1) \cdot \ln(x+1) dx$

9.2 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2\alpha x + 1, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases}$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β αν ισχύει $\int_{-2}^2 f(x) dx = 6$.

9.3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 2)e^x$ και F μια παράγουσα της f με $F(1) = 0$

α) Να μελετήσετε την F ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $F(F'(x) - 2018) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα

γ) Να αποδείξετε ότι $2F(x) < F(x+1) + F(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

9.4 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\int_0^1 e^{1-x} f(x) dx = f(x) + e^x$. Να βρείτε τον τύπο της f .

9.5 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$ έχει εξίσωση $y = 2x - 3$

και ισχύει $\int_1^3 \int_0^2 x f(t) dt dx = 12$. Να βρείτε :

α) τις τιμές $f(2)$, $f'(2)$.

β) το $\int_0^2 f(x) dx$ και το $\int_0^2 x^2 f''(x) dx$.

9.6 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο με $f'(x) \neq 0$, η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(2, 5)$ και $\int_0^2 x f''(x) dx = 0$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της B .

β) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 2)$: $f''(\xi) = 0$.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^5 \left(\frac{1}{3} f\left(\frac{x+1}{3}\right) + f^{-1}(x) \right) dx$

9.7 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1)=0$, $f'(x) = \frac{1-2xf(x)}{x^2+3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{\alpha^2}^{\alpha^2+\alpha} f(x) dx$

9.8 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, $f(x) + f'(x) = 2xe^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τον τύπο της f
- β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- δ) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = \alpha$ με $\alpha > 0$.
- ε) Να βρείτε το $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$

9.9 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \frac{4}{x}$, $x > 0$.

- α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \lambda$ και $x = \lambda + 1$, όπου $\lambda > 0$ είναι $E(\lambda) = 2\lambda + 1 + 4\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$.
- β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το εμβαδόν $E(\lambda)$ γίνεται ελάχιστο.

9.10 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1 - \ln x$, $x > 0$.

- α) Να δείξετε ότι $f(x) \geq 0$, $x > 0$.
- β) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda + 1$.
- γ) Να βρείτε τα όρια $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.
- δ) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το εμβαδόν $E(\lambda)$ γίνεται ελάχιστο.

9.11 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$, $f(x) \cdot g(x) = e^{2x}$ και G η αρχική της g για την οποία ισχύει $f(x) - G(x) = 1$

- α) Να βρείτε την συνάρτηση f αν αυτή διέρχεται από το σημείο $A(1, e)$ και να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.
- β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$
- γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\ln 2} (f(x^2) + f(x)) \cdot x \, dx$
- δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $1 + x < f(x) < 1 + x \cdot f(x)$

9.12 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

- α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- δ) Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες.
- ε) Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο καμπής της.
- ζ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων την C_f και την ε .
- η) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την ε και τον άξονα $x'x$.

9.13 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα .
- β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής .
- γ) Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες .
- δ) Να σχεδιάσετε την C_f .
- ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την ασύμπτωτη στο $+\infty$, τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$

9.14 Δίνεται συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(0, 2)$ και $B(2, 2e^2)$ και ισχύει $\int_0^2 (f'(x))^2 dx + \int_0^2 (f(x))^2 dx = 4e^4 - 4$.

- α) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(x)f'(x)dx$.
- β) Να βρείτε τον τύπο της f .
- γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 x^3 f(x^2) dx$.
- δ) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x^2)$.
- δ₁) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g .
- δ₂) Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα .
- δ₃) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1, g(1))$.
- δ₄) Να δείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)dx > \frac{e}{2}$

9.15 Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\int_0^2 \left(\int_0^1 f(x)y dy \right) dz = \int_0^1 (3t^2x^3 + 6tx - 1)dt$

- α) Να βρείτε τον τύπο της f .
- β) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 .
- γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-5}^{13} f^{-1}(x)dx$.
- δ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \int_{-1}^3 (f^{-1}(x))^{10} dx + 10 \int_0^1 x^9 f(x) dx$.

10. ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΠΕΔΟΥ Β

10.1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(3e^x + 1) - 2$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι αντιστρέφεται
- β) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2$

10.2 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ ώστε: $e^{f(x)} + f(x) = x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
- β) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης
- γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της αντίστροφης
- δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^e f(x) dx$

10.3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 3$

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.
- β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$
- γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 2$

10.4 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x - 1}{x + 1}$, $x \neq -1$, όπου α ένας πραγματικός αριθμός.

- α) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $K(3, 2)$ να δείξετε ότι $\alpha = 3$.
 - β) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
 - γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η $f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{3 - x}$, $x \neq 3$
 - δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f και f^{-1}
- (2^ο ΘΕΜΑ ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2016)

10.5 Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{x-1} - x$ και $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = 1 + \ln x$.

- α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- β) Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να προσδιορίσετε την αντίστροφη.
- γ) Να ορίσετε την σύνθεση της g με την f και να δείξετε ότι $(fog)(x) \geq 0$, $\forall x > 0$
- δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της fog , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = g^{-1}(2)$

10.6 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

- α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία
- β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.
- γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(f(x) - 2017) = 0$ έχει μοναδική λύση.
- δ) Να λυθεί η ανίσωση $f(2e^{x-1} - x^2 - 1) > 0$.

10.7 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

- α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της
- β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x) - 2016) = 1$ έχει μοναδική λύση.
- γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f , f^{-1}

10.8 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1-x}{x}$ και $g(x) = \ln x$

- α) Να αποδείξετε ότι $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\ln x} - 1$, $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$
 β) Να μελετήσετε την $f \circ g$ ως προς την μονοτονία
 γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f \circ g$
 δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $(f \circ g)(x) - \lambda = 0$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$
 ε) Να αποδείξετε ότι η $f \circ g$ είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$
 ζ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $f \circ g$ στο σημείο της με τετμημένη e
 η) Να αποδείξετε ότι $(f \circ g)(x) + \frac{x}{e} \geq 1$, $\forall x > 1$

10.9 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ ώστε: $f^3(x) + f(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και $f^{-1}(x) = \frac{x^3 + x}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
 β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = x$
 γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και την ευθεία $y = x$
 δ) Να δείξετε ότι $\int_0^1 \frac{2}{1 + 3f^2(t)} dt = 1$ (ΑΡΣΑΚΕΙΟ ΠΑΤΡΑΣ 2016)

10.10 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^3 + 3x}{x^2 + 1}$

- α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
 γ) Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$
 δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt \right)$

10.11 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 1}$

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 β) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης
 γ) Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1^+} f^{-1}(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f^{-1}(x)$
 δ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g = f \circ f^{-1}$ και f^{-1} τέμνονται σε μοναδικό σημείο $x_0 \in (1, 2)$

10.12 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(0) = 1$ και $f(x) \cdot f'(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

- α) Να βρεθεί ο τύπος της f
 β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 γ) Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f
 δ) Να δείξετε ότι για $x > 0$ η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}

10.13 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x-5}{x+5}$

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι 1-1
 β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη
 γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x)$
 δ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x-3} + \ln(e^{x-5} + 10) = x - 5 + \ln(e^{\sqrt{x-3}} + 10)$

10.14 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 2f(x) = x + 2$

- α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη
- β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f , f^{-1}
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x - 1) = f(2 - x)$

10.15 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f(x) = x^2 - x + \ln x$

- α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1
- β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f , f^{-1} έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα $(1, e)$
- γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{e^2 - e + 1} f^{-1}(x) dx$

10.16 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$

- α) Να βρείτε τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f
 - β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, e)$
 - γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = e$, $x = 2e$.
- (ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ 2015)**

10.17 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

- α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
 - β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $ef(x) \leq 1$, $x > 0$.
 - γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1/e$.
- (ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ 2014)**

10.18 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν $f'(x) = 2xe^{-x} - f(x)$, $f(1) = e^{-1}$.

- α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$
 - β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, +\infty)$
 - γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = 2e^{x-2}$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες
 - δ) Δεδομένου ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, 0]$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(-1, f(-1))$ και να αποδείξετε ότι $f(x) + 2e + 3ex \geq 0$, $\forall x \leq 0$
- (ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ 2015)**

10.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x + 1)\ln x$.

- α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{x+1} = e^{2017}$, $x > 0$ έχει μοναδική λύση.
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο καμπής της.
- δ) Να δείξετε ότι $\frac{x+1}{x-1} > \frac{2}{\ln x}$, $\forall x > 1$

10.20 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - 2x$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
 - β) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.
 - γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα, το 0.
 - δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y = 1$ και $x = 1$
- (ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ 2012)**

10.21 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = 2$, $f(0) = 2$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2) = f'(2) = 2$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq f(\xi)$

(ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ 2012)

10.22 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 10$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 2$

β) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα σημεία καμπής.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $x > \frac{10}{x^2 + 1}$

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 3$

10.23 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 + 1) < f(x^4 + 1)$.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 3$

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \ln x)$

10.24 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = 3$

10.25 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 1)e^x$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο x_0 να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

10.26 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e}{x} + \ln x + 1$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

γ) Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (1, 4) : f(\xi) = 3^{\xi-1}$

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = e^2$

10.27 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x > -1$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.
- β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.
- γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(-1, 0)$
- δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.

10.28 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν :

$$f(x) + g(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \neq e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + 1}{x + 1} = 0.$$

- α) η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
- β) $f(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- γ) $g(x) > e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{g(x)} = 0$
- ε) η εξίσωση $(2x - 3)f(x) = x^2 - 3x + 2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$

10.29 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1)=1$ και $xf(x) = 1 - x^2 f'(x)$, $x > 0$

- α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$, $x > 0$
- β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.
- γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και το σύνολο της f .
- δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$

10.30 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{9}{x}$, $x > 0$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
- β) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή
- γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f
- δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , την πλάγια ασύμπτωτη της C_f και τις ευθείες $x = 3$ και $x = 4$

10.31 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x \ln x$, $g(x) = \ln x + \frac{1}{x}$

- α) Να δείξετε ότι $g(x) > 0$, $\forall x > 0$
- β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
- γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2017$ έχει ακριβώς μια λύση
- δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f'(x)$ έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο στο διάστημα $(0, 1)$

10.32 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$$f^2(x) + 2f(x) \cdot \eta \mu x = x^2 + \sigma \upsilon \nu^2 x, \quad f(0) = 1$$

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + \eta \mu x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \eta \mu x$
- γ) Να βρείτε τα όρια :

$$\gamma 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2 + \sigma \upsilon \nu x}{x}$$

$$\gamma 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

10.33 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
- β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
- γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f
- ε) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x - 2 = x$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες

10.34 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
- β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
- γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$

10.36 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{2x}{x^2 + 1}$

- α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- γ) Να δείξετε ότι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων f , f^{-1}
- δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}$

10.37 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + 1}{x^2 + \alpha}$, $\alpha > 0$ για την οποία ισχύει $f(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$
- β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
- γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f
- δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- ε) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$

10.38 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2}{x-3}, & x < 2 \\ -\frac{\beta}{x}, & x \geq 2 \end{cases}$

- α) Αν f συνεχής και η C_f έχει ασύμπτωτη την $y = x + 3$ στο $-\infty$, να δείξετε ότι $\alpha = 1$, $\beta = 8$
- β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
- γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$

10.39 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(e^x + 1) = x + e^x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

- α) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(x-1) + x$, $x > 1$
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη 2
- γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2, e+2)$: $\frac{\xi}{\xi-1} = \frac{\ln(e+1)+e}{e}$
- δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f
- ε) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x-1 \leq e^{x-2}$, $\forall x > 1$

10.40 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η C_f

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f

β) Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια :

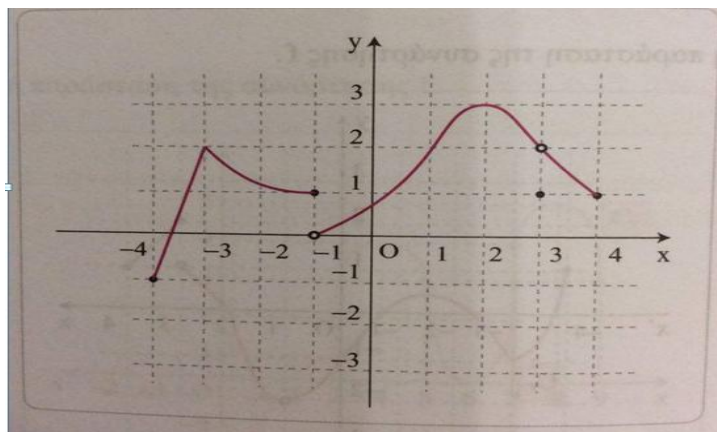
$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x), \lim_{x \rightarrow 3} f(x), \lim_{x \rightarrow 4} f(f(x))$$

γ) Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0) = 0$

δ) Να αιτιολογήσετε τον λόγο που υπάρχει

$$x_0 \in (-3, -1) : f'(x_0) = -\frac{1}{2}$$

ε) Να βρείτε τα διαστήματα που είναι $f'(x) = 0$



10.41 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f'

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα που η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα

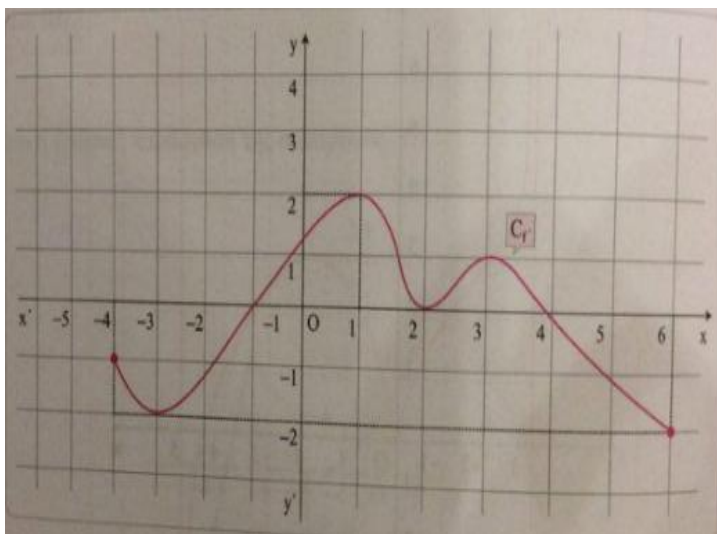
γ) Να εξετάσετε αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 2 και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f

δ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, κοίλη, καθώς και τις θέσεις των σημείων καμπής.

ε) Να βρείτε ποιου χωρίου το εμβαδόν εκφράζει η παράσταση $f(4) - f(2)$

ζ) Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{\ln x}$$



10.42 Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \ln x$, $h(x) = \frac{1-x}{1+x}$

α) Να ορίσετε την συνάρτηση $f(x) = (g \circ h)(x)$

β) Να εξετάσετε αν η f είναι ίση με την συνάρτηση $t(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

δ) Να δείξετε ότι $h(x) - h(-x) = \frac{4x}{x^2 - 1}$

ε) Να βρείτε τον πραγματικό k ώστε να ισχύει : $\int_2^k \frac{x^3 - 5x}{x^2 - 1} dx - \int_k^2 [h(x) - h(-x)] dx = 6$

10.43 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x \ln x$, $x > 0$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της .

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία , τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2 \ln x = x - \frac{\lambda}{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

10.44 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + (x-1)^5$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της .
 β) Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο
 γ) Αν η g είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $g^3(x) + 2g(x) = 5f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι :
 γ1) η g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f
 γ2) η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ στο ίδιο σημείο με την C_f
 δ) να λυθεί η ανίσωση $g(f(x)) > g(e^2)$

10.45 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 4\lambda x$

- α) Αν ισχύει $f(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\lambda = \frac{1}{4}$
 β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(e^x - x - 2) = 1$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες
 γ) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$
 δ) Αν $\alpha, \beta > 0$ να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta) - 1}{x - 3} + \frac{f(\alpha) - 1}{x - 1} = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1, 3)$

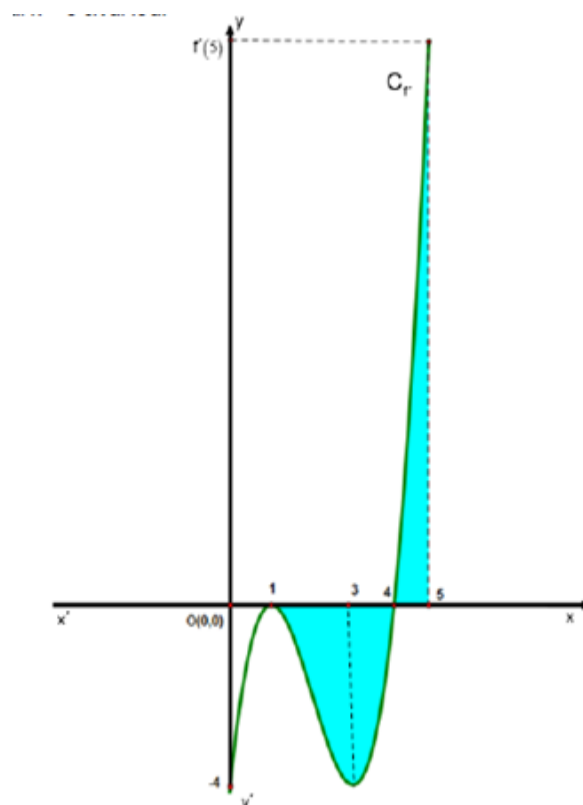
10.46 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A_f = [0, 5]$, $f(4) = -8$, $f(0) = 0$

και $f(1) = -\frac{5}{4}$. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η

γραφική παράσταση της παραγώγου της f όπου τα εμβαδά E_1 του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f'}$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 4$,

E_2 του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f'}$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 4$ και $x = 5$, είναι ίσα

- α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f και τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων
 β) Να βρείτε τα διαστήματα που η f είναι κυρτή ή κοίλη και τις θέσεις των σημείων καμπής
 γ) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της C_f στα σημεία με τετμημένες 0 και 1
 δ) Να δείξετε ότι $f(5) = -\frac{5}{4}$
 ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f



10.47 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + (\alpha+1)x + \beta - 2}{x - 2}$ με $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = -4$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1) : (f(\xi) - \xi) \cdot (f(\xi) + \xi) = \xi^4 + 12$

γ) Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, $x < 2$

γ1) Αν η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $A(x_0, g(x_0))$ διέρχεται από το σημείο $(0, 1)$, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του A

γ2) Να αποδείξετε ότι $g(x) \leq e^2$ για κάθε $x < 2$

10.48 Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(e^x) = e^x + x - 1$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x + x - 1$, $x \in (0, +\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

δ) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f και να βρείτε το πεδίο ορισμού της

ε) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f και στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της αντίστροφης

10.49 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x + 1)e^{1-x} + x$

α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x$

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

ε) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f^{-1}

ζ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1} , και τις ευθείες $y = x$ και $x = e$ (ΑΡΣΑΚΕΙΟ ΕΚΑΛΗΣ Β - 2017)

10.50 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) - 1 & , x \geq 0 \\ 2x - \eta\mu x - \frac{x^2}{2} - 1 & , x < 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την $f'(x)$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο της με τετμημένη 0

δ) Δίνεται ότι η f είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της.

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , και τις ευθείες $y = x - 1$ και $x = 2$

10.51 Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$

α) Να μελετήσετε την συνάρτηση h ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της h

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της h

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^x h(x) dx$ (ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2017)

10.52 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x-2}{x+2}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή και 1-1

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(3) = 0$

γ) Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση της f

δ) Αν f γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$, να δείξετε ότι, για οποιοδήποτε $\alpha \in \mathbb{R}$, υπάρχει $\xi > 2$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = -\alpha^2 - 1$ (ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ- 2018)

10.53 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\sqrt{3}) = 2$, $\frac{2xf(x)}{x^2+3} = -f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

10.54 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 1$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 = 1 - 2x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, 1)$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και $x = 1$, $x = 2$

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x \cdot f(e^x - 1) dx$

δ) Να βρείτε τα σημεία της C_f που έχουν κλίση 5

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x) > f(1 - \ln(x + 1))$

10.55 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να αποδείξετε ότι $e \cdot x \cdot \ln x + 1 \geq 0$

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{2018}{x}}$

ε) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

στ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(e, f(e))$

ζ) Να αποδείξετε ότι $\ln x^x + e \geq 2x$

η) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και $x = e^{-1}$, $x = e$

10.56 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 2$, $f'(x) + f(x) = 1$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 1 + e^{1-x}$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(1 + e^{1-x}) = f(2x)$

ε) Να δείξετε ότι $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ ισχύει $(\alpha - \beta)e^{1-\alpha} < e^{1-\beta} - e^{1-\alpha} < (\alpha - \beta)e^{1-\beta}$

10.57 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

γ) Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f και να σχεδιάσετε την C_f

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$

10.58 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = \frac{1}{2}$, $2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x)$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3 - 2018 = 2018x^2$

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(\frac{\ln x}{x} - 2(x-1)\right) > 0$

στ) Σημείο M κινείται κατά μήκος της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με σταθερό ρυθμό. Να βρείτε τη θέση του σημείου M στην οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

ζ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και $x = 1, x = 2$

10.59 Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης f στο $[-1, 5]$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

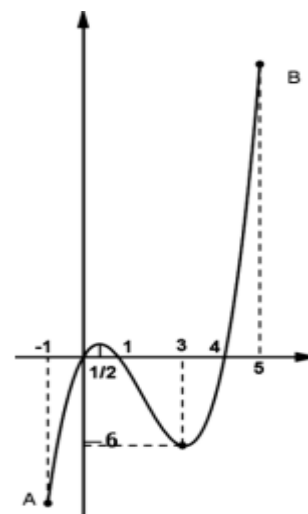
β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής

γ) Έστω ότι η f είναι πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού.

γ1) Να βρείτε την παράγωγο f' και να σχεδιάσετε την υπόλοιπη γραφική παράσταση

γ2) Να βρείτε την f αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $f(0) = 1$

γ3) Να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f



10.60 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-1, f(-1))$ διαπερνά τη C_f

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x < 0$: $f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $\frac{1}{f}$, τους άξονες $x'x, y'y$ και την ευθεία $x = 1$

ε) Να αποδείξετε ότι $\beta - \alpha < \int_{\alpha}^{\beta} ef(x)dx < e(\beta - \alpha)$, $\alpha < \beta$

στ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της.

10.61 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $(x^2 + 9)f'(x) + 2xf(x) = 1, x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x^2 + 9}$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

ε) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής

στ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x \cdot f(x)]$

ζ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$

10.62 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + 3x^2 + x + 1$, $\alpha \neq 0$. Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xg'(x) - g(x) = x^2 f'(x)$, $\forall x \neq 0$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1, -1)$, $B(1, 1)$

α) Να βρείτε την μικρότερη τιμή του α για την οποία η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Να βρείτε την συνάρτηση g

γ) Αν για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) = 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 6x$, να βρείτε τα $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x)}{f(x)} - \beta x - \gamma \right) = 0$ (Β ΑΡΣΑΚΕΙΟ ΨΥΧΙΚΟΥ -2018)

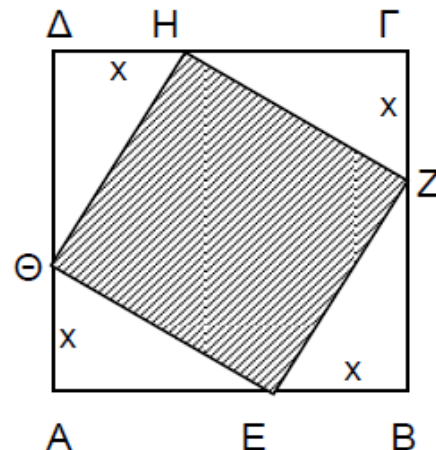
10.63 Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2 cm. Αν το τετράγωνο $EZH\Theta$ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του $AB\Gamma\Delta$:

α) Να εκφράσετε την πλευρά EZ συναρτήσει του x

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τετραγώνου $EZH\Theta$ δίνεται από την συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$, $0 \leq x \leq 2$

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδό του τετραγώνου $EZH\Theta$ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου $EZH\Theta$ ισούται με $4e^{x_0} + 1 \text{ cm}^2$ (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2017)



10.64 Έστω συνάρτηση $f: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο, της οποίας η γραφική παράσταση της παραγώγου της, φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν ισχύουν:

– $f(-2) = -2$, $f(-1) = 0$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}$

– $E_1 = 6$, $E_2 = 1$, $E_3 = 2$

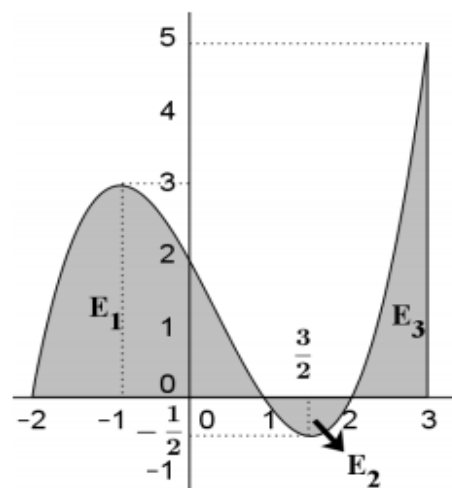
α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

γ) Να κάνετε την γραφική παράσταση της f

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \alpha$



10.65 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{1 + e^x}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να δείξετε ότι το μοναδικό σημείο καμπής της f είναι το $O(0, 0)$

γ) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ και να δείξετε ότι η $y = x - 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

δ) Να σχεδιάσετε την C_f

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$ (ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ 2018)

10.66 Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο $(0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις :

$$f(e) = 1 = -g(e), \quad f'(x) = e^{g(x)}, \quad g'(x) = -e^{-f(x)}, \quad \forall x > 0.$$

Να αποδείξετε ότι :

α) Οι συναρτήσεις f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$

β) $f(x) = -g(x), \quad \forall x > 0$

γ) $f(x) = \ln x$

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, C_g και την ευθεία $y = \ln 2$

10.67 Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ με ύψος x cm είναι εγγεγραμμένο

σε τρίγωνο ΑΒΓ βάσης $B\Gamma = 10$ cm και ύψους $AD = 5$ cm

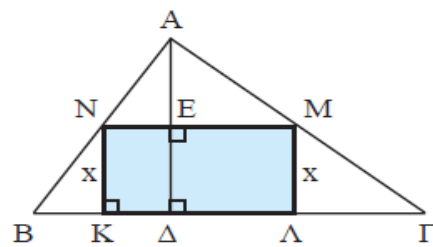
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E και η περίμετρος P του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x δίνονται από τους τύπους

$$E(x) = 10x - x^2, \quad P(x) = 20 - 2x, \quad 0 < x < 5$$

β) Έστω ότι το ύψος x του ορθογωνίου αυξάνεται με σταθερό ρυθμό. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου για τις οποίες τα μέτρα του ρυθμού μεταβολής του εμβαδού και της περιμέτρου είναι ίσα.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + P(x) = E(x) + 11$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 3) : E'(\xi) \cdot (2E(\xi) - 5) = 2\xi - 5$



10.68 Στο διπλανό σχήμα το ΕΒΓΔ είναι τετράγωνο

πλευράς 2 και $AB = 1$

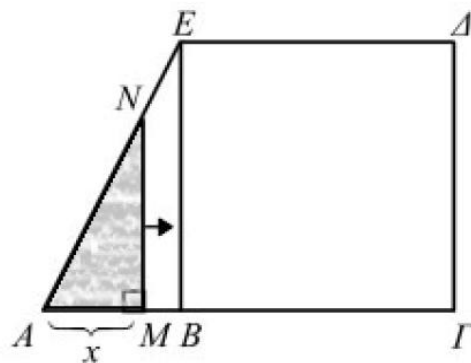
α) Να εκφράσετε το ευθύγραμμο τμήμα MN συναρτήσει του x και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου συναρτήσει του x , όταν το σημείο M διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ, δίνεται από

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 2x - 1, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \eta \mu \frac{1}{x} + \sigma \nu x - 1 + x}{f(x) + \eta \mu x}$

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων. (ΚΑΖΟΥΛΛΕΙΟ ΡΟΔΟΣ 2018)



10.69 Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f . Δίνεται ότι :

$$f(-2) = -1, f(-1) = -2, f(1) = -3, f(2) = \frac{1}{2}, f(3) = 1$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

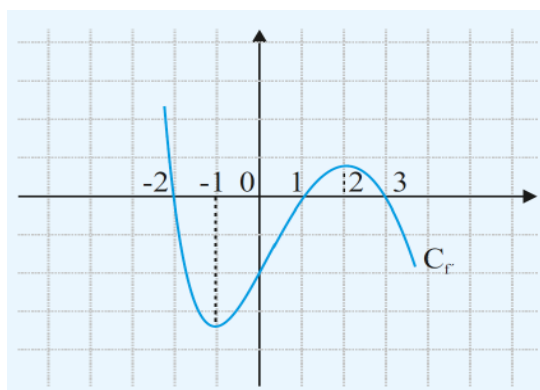
α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{4}$

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 3$ (ΚΑΛΑΜΑΡΙ 2018)



10.70 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\beta - 1)x^3 + \alpha x^2 + \beta$. Αν

– Η γραφική παράσταση της παραγώγου της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο 0 και στο 2

– το εμβαδόν E του γραμμοσκιασμένου χωρίου που φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι 4 τ.μ.

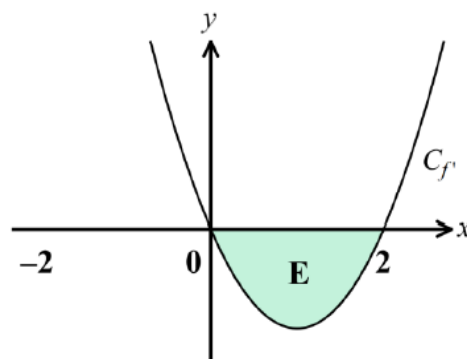
α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = 2$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \sqrt{x}$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0, 1)$

δ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = -3x + 3$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f

ε) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{f(x)} - 2x)$



10.71 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x < \pi \\ \alpha x + \pi, & x \geq \pi \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα στο $[0, 2\pi]$

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2\pi$

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής για την συνάρτηση f στο $[0, 2\pi]$ και στη συνέχεια να βρείτε τα $\xi \in (0, 2\pi)$ για τα οποία ισχύει το παραπάνω θεώρημα.

10.72 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β) Έχει η εξίσωση $f(x) = -2e^{-\frac{1}{2}}$ λύση στο $(0, +\infty)$;

γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f δέχεται κατακόρυφες ασύμπτωτες

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x} \cdot f(x)$, $x > 0$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{2}$ και $x = 1$

(ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2018)

10.73 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x+1}$ με $x \geq 0$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται, να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης και τον τύπο της.

β) Να βρεθεί η μονοτονία και οι ασύμπτωτες των f, f^{-1}

γ) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} έχουν κοινή εφαπτόμενη στο κοινό τους σημείο και στη συνέχεια ότι $f(x) \leq f^{-1}(x)$, $\forall x \in [0, 1)$

δ) Να δείξετε ότι το χωρίο που περικλείεται μεταξύ της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$, είναι ισοεμβαδικό με το χωρίο που περικλείεται από την f^{-1} , τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $y = 1$

10.74 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ g)(x) = -x^2 + 6x - 3$, $g(x) = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε και τη συνάρτηση $h(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 2}{x}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x > 0$ της οποίας η γραφική της

παράσταση έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $\varepsilon: y = 4x - 1$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = -x^2 + 4x + 2$

β) Να δείξετε ότι $\alpha = 4$, $\beta = -1$

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f , h έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτόμενη, την οποία και να βρείτε.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x) + \frac{f^2(x)}{g(x)} = 2018$ έχει μια τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$

10.75 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - x^2, & x \leq 1 \\ x \ln(\beta x), & x > 1 \end{cases}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

γ) Θεωρούμε σημείο $A(x(t), y(t))$, $t > 0$, το οποίο κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f με $x(t) > 1$, $x'(t) = 4$ μον/sec. Αν M είναι το σημείο τομής της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της f στο A με τον άξονα $x'x$, να βρείτε την ταχύτητα του M τη χρονική στιγμή κατά την οποία το A διέρχεται από το σημείο (e, e) .

10.76 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \frac{2x}{x^2 + 1}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$ της γραφικής παράστασης της αντίστροφης.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}$

10.77 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (1 + x) \cdot e^{-x}$, $x \geq 0$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β) Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και να σχεδιάσετε την C_f

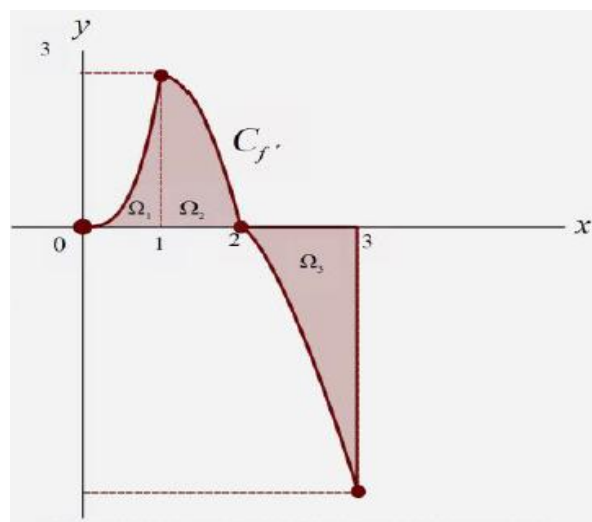
γ) Αν $g(x) = \ln x$, να ορίσετε την $f \circ g$

δ) Έστω η συνάρτηση $h(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$, $x \geq 1$ και E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_h , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = \lambda$ όπου $\lambda > 1$.

Να βρείτε την τιμή του λ ώστε $E = \frac{3}{2}$ τ.μ.

10.78 Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο ισχύει $f(0) = 0$ και η γραφική παράσταση της παραγώγου της φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν τα εμβαδά των χωρίων $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ είναι $E(\Omega_1) = 1, E(\Omega_2) = 2, E(\Omega_3) = 4$, τότε :

- α) Να βρεθούν οι τιμές $f(1), f(2), f(3)$
- β) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
- γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- δ) Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
- ε) Να παρασταθεί γραφικά η f



10.79 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$

- α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
- β) Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
- γ) Να δείξετε ότι $x \leq e^{x^2-x}, x > 0$
- δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2011$ έχει δύο λύσεις στο $(0, +\infty)$

10.80 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \leq 1 \end{cases}$

- α) Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής
- β) Να εξετάσετε αν η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$
- γ) Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων στα σημεία αυτά.
- δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση
(ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2018)

10.81 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$

- α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
- β) Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
- γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f
- δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

10.82 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + 1)$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της

β) Αν $g(x) = f^{-1}(x) = \ln(e^x - 1)$, να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα και σημεία καμπής.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο τομής της με τον άξονα $x'x$ και να αποδείξετε ότι $\ln(e^x - 1) + \ln 4 \leq 2x, \forall x > 0$

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_g και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

10.83 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = \frac{e}{2}$, $xf'(x) = 1 - f(x) + \ln x, x > 0$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x + \frac{e}{2x}$

β) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

γ) Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

ε) Αν η εξίσωση $x + 2 - \ln 2 = f(\rho)$ είναι αδύνατη στο $(0, +\infty)$, να βρείτε το ρ .

10.84 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 3}$

α) Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της f

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $0 < f(x) < 2$

γ) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\ln 3, 1)$ διαπερνά την C_f

δ) Να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τους άξονες $x'x, y'y$ και την ευθεία $x = \ln 3$

10.85 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x - \alpha, & x < 1 \\ \sqrt{x} + 3\beta - 4, & x \geq 1 \end{cases}$

α) Αν f παραγωγίσιμη στο 1, να δείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$ και $\beta = 1$

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων

δ) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1, x = 4$ είναι ίδιο με το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $y'y$ και τις ευθείες $y = 1, y = 4$

10.86 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες της f

β) Να βρεθεί η αντίστροφη της f και να δείξετε ότι $f(f(x)) = x$

γ) Να κάνετε την γραφική παράσταση της f . Υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία της f που να διέρχεται από την αρχή των αξόνων ;

δ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου E μεταξύ της C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 3$, $x = \lambda > 3$. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του E τη χρονική στιγμή t_0 που ισχύει $\lambda(t_0) = \lambda'(t_0) = 3$

11. ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΠΕΔΟΥ Γ

11.1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 2$

- α) Να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και ότι η f είναι κυρτή.
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια, να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο ρίζες ετερόσημες
- γ) Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$
- δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \eta\mu x = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, \frac{\pi}{2})$

11.2 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x - \frac{x^2}{2} + \alpha x$ και $f(x) \leq f(1)$, για κάθε $x > 0$.

- α) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$.
- β. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{x+2}{4} - \frac{3}{2x}}$
- δ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- ε) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 2$
- ζ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , την προηγούμενη εφαπτομένη και την ευθεία $x = 1$.

11.3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 - \ln(x+1)$

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.
- β) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
- δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.

11.4 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x e^{\frac{\alpha}{x}}$, $x > 0$ για την οποία ισχύει $f(x) \geq e^\alpha$, $\forall x > 0$.

- α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$.
- β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της
- γ) Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$
- δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$, $x > 0$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$.

ε) Να δείξετε ότι $\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx > e \cdot \ln 2$

11.5 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης.
- γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f^{-1}(x)$
- δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1/e$ και $x = 1$. (ΑΡΣΑΚΕΙΟ ΕΚΑΛΗΣ Α 2016)

11.6 Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f , ορισμένη στο A με σύνολο τιμών $f(A) = [0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)} + f(x) = x$, $\forall x \in A$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση.

β) Να δείξετε ότι $A = [1, +\infty)$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $f \circ f$ και έπειτα να δείξετε ότι η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^{e+1} e^{f(x)} \cdot f(x) dx$

δ) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 1$: $(x^2 + 1)f(x^2) > x^2 f(1) + f(x^4)$ (ΑΡΣΑΚΕΙΟ ΕΚΑΛΗΣ Α 2016)

11.7 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $xf(x) + 3\eta\mu x = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x - \frac{3\eta\mu x}{x} & , x \neq 0 \\ -3 & , x = 0 \end{cases}$

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^{-x}$ έχει τουλάχιστον μια θετική ρίζα. (ΑΡΣΑΚΕΙΟ ΠΑΤΡΑΣ 2016)

11.8 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f: [-1, 2]$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, $g(x) = f(x) - xe^{-x}$

α) Αν $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [-1, 2]$ να δείξετε ότι $f'(0) = 1$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [-1, 2]$ τέτοιο ώστε $5f(x_0) = 2f(1) + 3f(2)$

γ) Αν ισχύει ότι $f(-1) = f(2)$, να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (-1, 2)$: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 0$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και την ευθεία $x = 1$

11.9 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν:

$f(x) \cdot (f(x) - 2x) = \ln^2 x - x^2$, $x > 1$ και $f(e) > e$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x + x$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της f και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = x$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $e^{x^2} - x^2 = \ln \frac{x^2 + 2}{e^{x^2} + 1} + 1$

11.10 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει:

$f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f(3) = 2 + f(1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 3)$: $3f(x_0) = 2f(1) + f(3)$

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$ με $\xi_1 < \xi_2$ ώστε: $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} = 3$.

δ) Να υπολογίσετε το $A = \int_1^3 f'(x) \sin(\pi x) dx - \int_\pi^{3\pi} f\left(\frac{x}{\pi}\right) \eta\mu x dx$

11.11 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε: $(e^x + 2)f'(x) = e^x(1 - f(x))$, $f(0) = -\frac{1}{3}$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

γ) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = 2$, $x = 3$.

ε) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^x$

11.12 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν:

$$f^2(x) - 2xf(x) = [\ln(e^x + 1) + x] \cdot [\ln(e^x + 1) - x], \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f\left(\ln \frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{3}. \quad \text{Να βρείτε:}$$

- τον τύπο της f
- το σύνολο τιμών της f
- τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

11.13 Στο διπλανό σχήμα έχουμε την γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[0, 3]$.

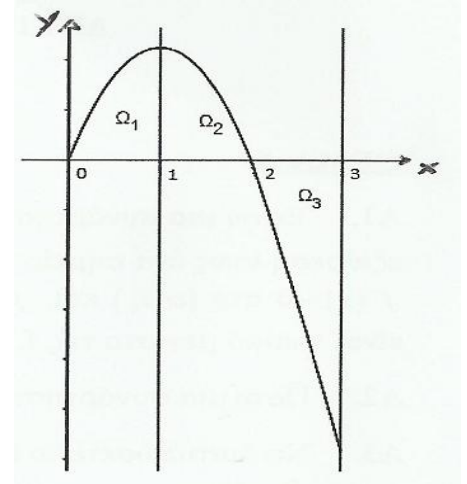
$$\text{Ισχύουν ακόμα: } f(0)=0, \quad E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = \frac{E(\Omega_3)}{2} = 3.$$

- Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f και τα ακρότατα.
- Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

$$\gamma) \text{ Να υπολογίσετε το όριο } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x}$$

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f με $\xi \in (1, 2)$ στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(ΑΡΣΑΚΕΙΟ Α ΨΥΧΙΚΟΥ 2016)



11.14 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

- Να εξετάσετε αν η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(1, \frac{5}{4}\right) : f(\xi) = 2^5 - 4\xi$
- Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = e$

11.15 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(3, 3)$

- Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x + y + 1 = 0$
- Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3) : 2f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 3$.

$$\gamma) \text{ Να δείξετε ότι υπάρχει } x_0 \in (1, 3) : f(x_0) = \frac{5}{3}$$

δ) Αν, επιπλέον, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (1, 3)$,

$$\text{να δείξετε ότι υπάρχουν } x_1, x_2 \in (1, 3) : \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{2}{f'(x_2)} = 3$$

11.16 Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το $[1, 3]$.

Να αποδείξετε ότι:

- υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \mathbb{R}$, ώστε $f''(\xi) = 0$
- η εξίσωση $f(x) + 2016f'(x) = 2e^{f'(x)}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$
- η εξίσωση $f''(x) + (f''(x))^2 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$

11.17 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν :

$$f(1) = \lim_{y \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln y} - \frac{y+1}{2(y-1)} \right) \text{ και } e^{f(0)x} + e^{f(2)x} \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε την τιμή $f(1)$

β) Να δείξετε ότι $f(0) + f(2) = 0$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2) : f''(\xi) = 0$

11.18 Δίνεται συνάρτηση $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν :

$$f(0)=0, 1 - f'(x) = e^{f(x)-x}, \forall x \in (-1, +\infty)$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

δ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f

ζ) Να δείξετε ότι: $\ln \frac{2017}{2016} \leq \frac{1}{2016}$

11.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 1}{x - 2}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = x + 2$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1, x = 1$

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(3, f(3))$

δ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

ε) Έστω η συνάρτηση $g(x) = 14 - 4e^{x-3}$

ε_1) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $N(3, g(3))$

ε_2) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα

ε_3) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq g(x), \forall x > 2$.

11.20 Έστω συνεχής συνάρτηση f και F αρχική της f με $F(0)=0, f(x) = 3 + 2F(x), x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\Phi(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$ είναι σταθερή.

β) Να δείξετε ότι $f(x) = 3e^{2x}$.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου $E(\lambda)$ που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0, x = \lambda$ με $\lambda > 0$.

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{E(\lambda)}{\lambda}$

ε) Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο τομής με τον άξονα $y'y$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την (ε) , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = -1$.

11.21 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ώστε να ισχύουν :

$$f(0)=0 \text{ και } \int_0^1 \left(f(x) \left(\int_0^1 f(t) dt \right) + f^2(1) \right) dx = 2 \int_0^1 f(x)f(1) dx. \text{ Να αποδείξετε ότι :}$$

α) $\int_0^1 f(x) dx = f(1)$

β) ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1) : f'(\xi) = f(\xi)$.

11.22 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = f(1)$.

Να αποδείξετε ότι :

α) η f' είναι αντιστρέψιμη

β) η γραφική παράσταση της f δέχεται ακριβώς μια οριζόντια εφαπτομένη

γ) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες. $\frac{1}{3}$

δ) υπάρχει $\xi \in (0, 1) : f'(\xi) + (2\xi - 1)f(\xi) = 0$

ε) υπάρχει $x_0 \in [0, 1] : 3f(x_0) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{1}{e}\right)$

11.23 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$

β) Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση g για την οποία ισχύει $|g(x) + 3x - 2| \leq |f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}$

β_1) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon : y = -3x + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

β_2) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{g(x)} + 5^{g(x)}}{4^{g(x)} - 3^{g(x)} + 1}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2g(x) - x}{xg(x) + x^2\left(3 + \eta\mu\frac{1}{x}\right)}$

(ΑΡΣΑΚΕΙΟ ΕΚΑΛΗΣ Β-2016)

11.24 Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ώστε να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) - \eta\mu x}{e^{x^2} - 1} = 1$

Θεωρούμε επίσης την συνάρτηση $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 + x - 2 - f(2)\ln x$ και $g(x) \geq 0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(2) = 3$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$.

γ) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - 2x = (1 - x)f'(x)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0, 2)$.

11.25 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\alpha x}, \alpha \neq 0$ για την οποία ισχύει $f(x) \leq x - 1, \forall x > 0$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$

β) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να δείξετε ότι $f(x) \leq \frac{1}{e}, \forall x > 0$.

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln^2 x + 2\lambda x = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0, +\infty), \forall \lambda < -\frac{1}{e}$

ε) Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (1, e) : 1 - \ln \xi = \frac{\xi^2}{e^2 - e}$

ζ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τους άξονες x', y'

και την ευθεία $x = \frac{1}{e}$

11.26 Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Θεωρούμε επίσης συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x f'(x) = 1$, $x > 0$ και $f(e) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x$

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) + f'(x))$

γ) Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία.

δ) Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $(e^{2x} e^{\sin x} - 1)(e + 1) = (e^{2x} e^{\sin x} + 1)(e - 1)$

ζ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h = (f \circ g)^{-1}$.

ζ₁) Να ορίσετε την συνάρτηση h

ζ₂) Να βρείτε το σύνολο τιμών της h .

11.27 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f^2(x) = 1 - 2xf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) + x - 1) \eta \mu \frac{1}{x}]$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $x + y - 2 = 0$

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 1) : f'(\xi) + 2\xi f(\xi) = \xi^2 f'(\xi)$

11.28 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 2)\ln x + x$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{2x-3} x^{2x-4} = 1$, $x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

γ) Αν $x_1 < x_2$ οι ρίζες της προηγούμενης εξίσωσης, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_1, 1)$

τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $A(0, \frac{3}{2})$

11.29 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 - \frac{e^x}{1 + e^x}$

α) Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

β) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , την (ε) , τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = \alpha$, $\alpha < 0$.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} E(\alpha)$

δ) Αν το α ελαττώνεται με ρυθμό 2 μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(\alpha)$ τη χρονική στιγμή που είναι $\alpha = -\ln 2$

11.30 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ και $\frac{f'(x)}{x+1} = e^x - f(x)$, $\forall x > 0$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x + x$, $x > 0$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την εφαπτομένη της στο $(1, f(1))$ και την ευθεία $x = e$.

11.31 Δίνεται η δύο παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(x) = [f'(x)]^2$, $\forall x > -1$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = -\ln(1 - x)$

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

γ) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα

δ) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της f

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 1 - e$.

11.32 Δίνεται f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ώστε $\ln[f(x)] + f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $f'(x) = \frac{f(x)}{1+f(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

β) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$

δ) Να δείξετε ότι: $\int_2^6 \left(\int_1^2 f(x) dx \right) dt \geq 5$

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (2, 4)$: $\int_2^4 \frac{[f(x)]^2}{1+f(x)} dx = 2f(\xi)f'(\xi)$

11.33 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x - 1$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = e$ και $x = \lambda > 0$.

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(e^2, f(e^2))$

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την C_f και τον άξονα $x'x$.

11.34 Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x-1}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, f(1) = e, f(-1) = -\frac{1}{e}$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$

β) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

ε) Να προσδιορίσετε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2016$

ζ) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \frac{1}{e}$

11.35 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f''(2) = \frac{7}{4} \text{ και } x^2 f'(x) - 2xf(x) = 3, \forall x > 0. \text{ Να βρείτε:}$$

α) την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(2, f(2))$

β) τον τύπο της f

γ) το σύνολο τιμών της f

δ) το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{f(x)}$

ε) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

11.36 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 \cdot \ln x$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα $[e, +\infty)$

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x^2+1) \cdot (x^2 - 5x + 6)}{\ln(x^2 + 1)}$, $x \neq 0$. Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β

με $0 < \alpha < 1$ και $\beta > 1$ ώστε να ισχύουν: $x^2 - 5x + 6 \geq e^{\alpha^2 - x^2} \cdot (\alpha^2 - 5\alpha + 6)$, για κάθε $0 < x < 1$

και $e^{x^2 - \beta^2} \cdot (x^2 - 5x + 6) + 5\beta - 6 \leq \beta^2$ για κάθε $x > 1$,

τότε να δείξετε ότι $\exists \xi \in (\alpha, \beta) : g''(\xi) = 0$.

δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της

$g(x) = \frac{f(x) \cdot (x^2 - 1)}{\ln x}$ με $x > 0, x \neq 1$, την ευθεία $y = 7ex - 11e$ και τις ευθείες $x = 3, x = 4$

(ΑΡΣΑΚΕΙΟ ΕΚΑΛΗΣ 2014)

11.37 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f'(x) > (2 - x)f''(x)$, $\forall x \in (0, +\infty)$ και $f((0, +\infty)) = \mathbb{R}$.

Αν η ευθεία $y = -3x + 7$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και τέμνει την C_f στα σημεία με τετμημένες $x = 2$ και $x = 3$, τότε:

α) Να βρείτε την μονοτονία της f και να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(3 + f(x^2 - 1)) < 2$

γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f(x) + \eta \mu(e^x + x) + 2019 x^2}{x^2 f(x) + 3x^3 - 6x^2}$

δ) Αν $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$ να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, +\infty)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$

τέτοια ώστε να ισχύει $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} = -1$

11.38 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x) = (e^x - 1)\ln x$, $\forall x > 0$.

α) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 .

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$

δ) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $\frac{e^x - 1}{e - 1} > \frac{x - 1}{\ln x}$

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1): e^{x_0} \cdot \ln(e \cdot x_0^{x_0}) = 1$

11.39 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{f(x)}{x} + 1$ και $f(1) = 0$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot \ln x$ και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι $\ln \pi > \frac{e}{\pi}$

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $\alpha > 1$.

δ) Αν $\varepsilon: y = (\ln \alpha + 1)x - \alpha$ η παραπάνω εφαπτομένη, να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες $x = 1, x = \alpha$ είναι $E(\alpha) = \frac{1}{4} (2\ln \alpha + \alpha^2 - 4\alpha + 3)$

ε) Να βρείτε τα όρια $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{E(\alpha)}{\alpha^2}$, $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{E(\alpha)}{e^{1-\alpha}}$

11.40 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = e$, $x \cdot f'(x) = f(x) - e^{\frac{2}{x}}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x \cdot e^{\frac{2}{x}}}{2}$, $x > 0$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{\frac{2}{x}} = 2\lambda \cdot x^{-1}$ για τις διάφορες τιμές του λ .

δ) Να δείξετε ότι $f(1821) + f(1823) > 2f(1822)$

11.41 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x > 0$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Αν η F είναι αρχική της f , να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x+1) - F(x)) = 0$

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

ε) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = x$

11.42 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν ότι :

$$x f''(x) + 2f'(x) + \frac{1}{x^2} = 0, \quad \forall x > 0, \quad f(1) = 0, \quad f'(1) = 1.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

β) Έστω η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x^2 f(x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

β₁) Να δείξετε ότι η g είναι συνεχής.

β₂) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

γ) Να αποδείξετε ότι $x^e \leq e^x$, $\forall x > 0$

δ) Αν υπάρχει $\alpha > 0$ για τον οποίον ισχύει $x^e \leq \alpha^x$, να αποδείξετε ότι $\alpha \geq e$

ε) Αν $\lambda f(x) \geq e^x - \frac{e}{x}$, $\forall x > 0$, να αποδείξετε ότι $\lambda = 2e$.

11.43 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x-2}$, $x > 2$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι είναι κοίλη.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y = \lambda + 1$, $x = \lambda$ και $x = \lambda + 1$, με $\lambda > 2$

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda > 2$ ισχύει $E(\lambda) > \ln 2$ (**3ο ΘΕΜΑ ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2016**)

11.44 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x \cdot \ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x$

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x)}{e^{f(x)}}$ (**4ο ΘΕΜΑ ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2016**)

11.45 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 17$, $g(x) = x^3$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς τρία σημεία της C_g στα οποία οι εφαπτόμενες ευθείες της διέρχονται από το σημείο $K(3, 17)$

δ) Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στην καμπύλη $y = g(x)$, $x > 0$. Κάποια χρονική στιγμή t_0 ο ρυθμός αύξησης της τεταγμένης του σημείου M γίνεται τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του. Να βρείτε με ποιο σημείο της C_g συμπίπτει το σημείο M , τη χρονική στιγμή t_0 .

11.46 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε :

$$f(e) = 1 \text{ και } x^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} + 4 \frac{\sqrt{f(x)}}{f'(x)} = 4x, \quad x > 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln^2 x$, $x > 1$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την εφαπτόμενη (ε) και τις ευθείες $x = e$, $x = e^2$

11.47 Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = f(1)$

Να αποδείξετε ότι :

α) η f' αντιστρέφεται

β) η γραφική παράσταση της f δέχεται ακριβώς μια οριζόντια εφαπτομένη

γ) υπάρχει $\xi \in (0, 1) : f'(\xi) + (2\xi - 1)f(\xi) = 0$

δ) υπάρχει $x_0 \in [0, 1] : f(x_0) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) + f(0,2) + f\left(\frac{1}{e}\right)}{3}$

11.48 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x$, $x > 0$.

α) Να μελετηθεί και να γίνει η γραφική της παράσταση.

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $e^{\frac{x^2-1}{2}} \geq x$, $\forall x > 0$

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{x^2-k} = x^2$ για τις διάφορες τιμές του $k > 0$

δ) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{2\ln x}{f(x)} & , x > 0 \\ \alpha & , x = 0 \end{cases}$ να είναι συνεχής.

ε) Για $\alpha = -1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση g έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, e)$

11.49 Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x(x-2)\ln x - x^2 + 4x$, $x > 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\alpha > 0$

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τεταγμένη 2

ε) Να αποδείξετε ότι $2x(x-2)\ln x > x^2 - 4(1-\ln 2)x - 8\ln 2 + 4$ για $x > 1$

11.50 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύουν :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + f'(x) + e^{-x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq \frac{1}{e} = f(1)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f''(x) + f'(x) + e^{-x} = 0$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{e^x}$

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^2 f(\alpha + 1) \geq -1 + e^2 f(\alpha)$

ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $g(x) = xf(x)$

11.51 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 3, f'(0) = 3, f(x) - 3 \leq \int_3^4 xf(t)dt$

α) Να δείξετε ότι $\int_3^4 f(x)dx = 3$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in (3, 4) : f(\alpha) = 3$

γ) Έστω ότι $f(1) > 3, 0 < f(2) < 3$. Να δείξετε ότι :

γ1) υπάρχουν $\beta, \gamma \in (0, \alpha) : f'(\beta) = f'(\gamma) = 0$

γ2) η εξίσωση $\frac{f(x) + 3x - 6}{x - 1} + \frac{f(x)}{x - 2} = 0$

11.52 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x - \alpha}$ όπου α, β ακέραιοι αριθμοί.

α) Αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = -1$ στο $+\infty$ και εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano για την συνάρτηση $g(x) = f(x) + x^2 - 4x + 3$ στο $[-1, 3]$, να δείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 2$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

γ) Υλικό σημείο $M(x, y), x > -1$ κινείται επί της C_f . Αν η τετμημένη του M μεταβάλλεται με ρυθμό 3 cm/sec , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, τη χρονική στιγμή που διέρχεται από τον άξονα x'

11.53 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f .

Αν $f(-3) = -2, f(1) = 3, f(2) = -1$

και $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$:

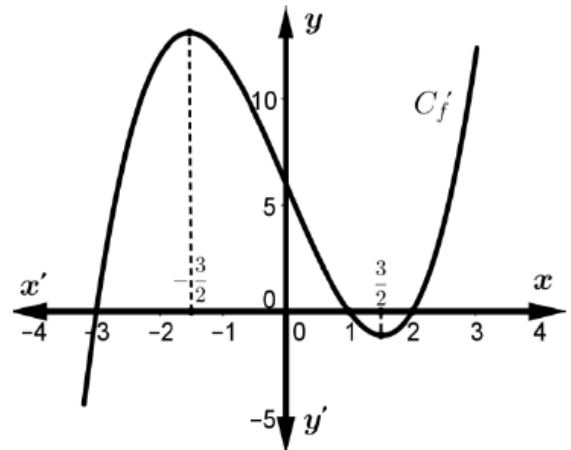
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$

δ) Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την κυρτότητα

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την από την C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες

$x = 1, x = 2$



11.54 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \lambda x$, $\lambda > 0$

- α) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης
- β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f γίνεται μέγιστη
- γ) Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του λ για την οποία ισχύει $e^x \geq \lambda x$
- δ) Για $\lambda = 1$:
 δ1) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων
 δ2) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την προηγούμενη εφαπτομένη και την ευθεία $x = -1$

11.55 Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, $f'(x) = \frac{1}{e^x} - f(x)$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{e^x}$
- β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
- γ) Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$, $x = 3$ να δείξετε ότι : $\frac{3}{e^3} < E < \frac{2}{e^2}$

11.56 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x) = \ln x - 1 + \int_1^e f(x) dx, \quad x > 0.$$

- α) Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \ln x$, $x > 0$.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη e .
- γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την προηγούμενη εφαπτομένη και τον άξονα $x'x$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e \frac{f^2(x)}{x} dx$

11.57 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x}{e^x}$ και $g(x) = e^x - \frac{x^3}{3} - x - 1$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να αποδείξετε ότι : $e^x > 2x$
- γ) Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
- δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g
- ε) Να λύσετε την ανίσωση $g(e^{2x}) < g(4x^2 + 1)$

11.58 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(1) = -1, \quad f'(x) \cdot e^{x+f(x)} = 2x - x^2, \quad x > 0$$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\ln x - x$
- β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία τα ακρότατα και την κυρτότητα
- γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

δ) Να λυθεί η εξίσωση $2\ln\left(\frac{x^2+2}{x^2-2x+3}\right) = 2x - 1$

ε) Να βρεθεί σημείο της C_f που απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία $y = x$

ζ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών $y = \frac{1}{2}xf(x)$ και $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$ και την ευθεία $x = 2$

11.59 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x - \int_0^1 e^{1-x} f(x) dx, \forall x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^x - 1$

β) Να δείξετε ότι η $g(x) = f(x) + x$ αντιστρέφεται και να βρείτε το πρόσημο της g^{-1}

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την από την γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης g^{-1} , του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0, x = e$

δ) Αν για μια συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $\int_{h(1)}^{h(2)} f(x) dx = 0$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2): h'(\xi) = 0$

11.60 Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x^x + \alpha x - \alpha$ με $f(x) \geq 0, \forall x > 0$

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$

β) Να δείξετε ότι $\ln x < f(x+1) - f(x) < \ln(x+1), x > 0$

γ) Αν σημείο M κινείται στην γραφική παράσταση της παραγώγου της f με την τετμημένη της προβολής M' του M στον άξονα $x'x$ να αυξάνεται με ρυθμό $2 \mu/s$ τη στιγμή που το M διέρχεται από το σημείο $A(e, 1)$ να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OMM'

δ) Αν ακόμα $g(x) = e^x + \frac{f(x)-1}{x}, x > 0:$

δ1) Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης

δ2) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(g(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{g(x)} + \frac{\eta\mu g(x)}{g(x)} \right)$

δ3) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{e^{-1}}^e g^{-1}(x) dx$

11.61 Θεωρούμε συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο και:

$f(1) = 2, f'(1) = 0, x \cdot f(x) \geq \eta\mu x \forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $f''(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$

β) υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ με $f'(\xi) = 1$ και στη συνέχεια ότι $f''(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f'(f(x) - 1) \leq 0$

ε) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $g(x) = 2^x$, έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία, τα $A(0, 1)$ και $B(1, 2)$

ζ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $G(x) = (f(x) + f'(x)) \cdot e^x$ και τους άξονες $x'x, y'x$ και την ευθεία $x = 1$

11.62 Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x + \sqrt{4x^2 + 1}$. Θεωρούμε επίσης παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η ευθεία $(\varepsilon): y = f(1)x + f(0) - 3$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της g στο $x_0 = 0$ και $\int_0^1 f(x) dx = \alpha - e$ όπου α είναι θετικός πραγματικός αριθμός τέτοιος, ώστε να ισχύει $x^\alpha \leq \alpha^x \forall x > 0$

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(0), f(1)$

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = e$

γ) Να αποδείξετε ότι:

γ1) υπάρχει $x_0 \in (0, 1): f(x_0) < 0$

γ2) υπάρχει $\xi \in (0, 1): 2\xi f(\xi) + f'(\xi) = 0$

δ) Ένα σημείο $A(k, g(k))$ κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της g με τέτοιο τρόπο ώστε η τετμημένη του να μεταβάλλεται με ρυθμό $k'(t) = k(t)$ μον/sec όπου t χρόνος. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο A τη χρονική στιγμή που $k = \sqrt{2}$ (ΑΡΣΑΚΕΙΟ ΕΚΑΛΗΣ Β - 2017)

11.63 Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$

και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 2$, $f(-1) = -2$, $f'(x) \neq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(0) = 1$ και $f'(0) = 2$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μοναδική ρίζα

γ) Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

γ1) Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

γ2) Να λύσετε την ανίσωση $g(f(x) + 2) > 1$

γ3) Ένα σημείο $A(x, y)$ κινείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης της g . Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της g , ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του σημείου A ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης x , αν υποθεθεί ότι $x'(t) \neq 0$ $\forall t \geq 0$;

11.64 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $2xf(x) = (x^2 + 1)(f(x) - f'(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(e^{1-x}(x^2 + 1)) = \frac{e^3}{10}$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\ln x) = \frac{x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}}{x^2 + 1}$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1, e)$

ε) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$, να δείξετε ότι $f(x^2) - 1 > x(f(x) - 1)$, $\forall x \in (0, 1)$ **(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΓΕΙΤΟΝΑ 2018)**

11.65 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει : $(f')^2(x) - e^{2x^2} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(0) = 1 = f(1)$, $f(0) = 0$

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = e^{x^2}$

β) Να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x)dx < \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f(x)dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την από την C_f , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 1$

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2018$ έχει ακριβώς μια ρίζα

στ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$: $\sin(\xi - 1) \cdot f(\xi) + \eta \mu(\xi - 1) \cdot f'(\xi) = 1 - 2\xi$

11.66 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν ότι :

$f'(x) = \frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} - f(x)$, $\forall x \neq -1$, $f(-2) - f(0) = 5 - e^2$

και $\int_1^3 \ln(xt) dt \geq f(0) \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + 3\ln 3 - 2$, $\forall x > 0$

α) Να δείξετε ότι $f(0) = -2$, $f(-2) = 3 - e^2$

β) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x}$, $x \neq -1$ και στην συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = e^x \left(1 - \frac{2}{x+1} \right)$, $x \neq -1$, $h(x) = \alpha \cdot e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε το πλήθος των σημείων τομής των C_g , C_h για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ τέτοιο ώστε :

$\sin \xi \cdot \int_0^{2018} f(2018 - t)dt = 2018 \eta \mu \xi \int_0^1 f(2018t)dt$

11.67 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = k - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$, $k \in \mathbb{R}$, $\forall x > 0$

η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο 2 με τιμή $1 - \ln 2$

α) Να βρείτε το k και τον τύπο της f

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 + 2 = x(\alpha + \ln x + 2)$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(1, f(1))$

ε) Να λύσετε την ανίσωση $e^{3x^2-5x+2} > x^x$, $x > 0$

στ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + \ln x + 2$, την πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = e$

(ΟΕΦΕ 2017)

11.68 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο και $2f^2(1) + f^2(3) \leq 2f(1)f(3)$, $f'(1) = 2$, $f''(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1-1

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα ακριβώς κρίσιμο σημείο

γ) Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x) - 2x + 2}$

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^4 f(x)dx < \int_1^3 f(x)dx$

11.69 Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0, 3]$ της οποίας η γραφική παράσταση της παραγώγου της, φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Αν γνωρίζετε ότι:

– $f(0) = 2$, $f(1) = 0$

– το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x = 0$, $x = 3$

– η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στο διάστημα $[0, 3]$

α) Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2$, $f(2) = -2$ και να βρείτε αν υπάρχουν

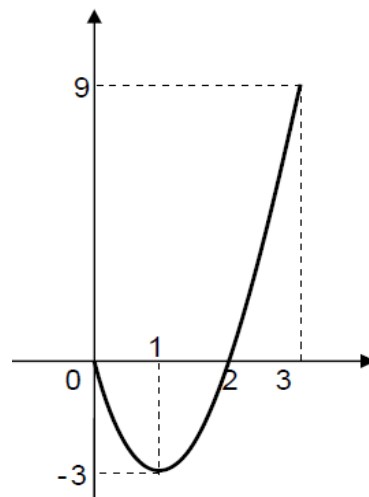
τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) - 2}$

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2, 3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$

δ) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f

(ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2017)



11.70 Θεωρούμε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $(0, +\infty)$ και $f(1) = e$.

Αν ισχύει για κάθε $x > 0$ ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{x_0} - \frac{f(x_0)}{x}}{x - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{x}$

β) Να βρεθεί η μονοτονία, τα κοίλα της συνάρτησης f και να χαράξετε την γραφική της παράσταση

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x - \ln x = \ln \alpha$, $\alpha > 0$

δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ και $\alpha > 2$ ισχύει :

$$(\alpha - 2) \frac{e^2}{4} < \int_2^\alpha \frac{e^x (x-1)}{x^2} dx < \frac{e^\alpha (\alpha^2 - 3\alpha + 2)}{\alpha^2}$$

11.71 Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x)(1-x) = x \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x-1}, & x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \\ -1, & x = 1 \end{cases}$ και ότι $f(x) < 0, \forall x > 0$

β) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει κρίσιμα σημεία

γ) Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 3$

Να αποδείξετε ότι $\ln 4 < E(\Omega) < \ln 3\sqrt{3}$

δ) Να λυθεί στο $(0, +\infty)$ η εξίσωση $2f(x^2) = f(x^3) + f(x^4)$

(ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2018)

11.72 α) Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή

β) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το $(-\infty, -1]$ για την οποία

ισχύει $f'(x) + e^x = \frac{1}{x+1}$, $\forall x > -1$

β1) Να δείξετε ότι $f(0) = -1$

β2) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(x+1) - e^x$, $x > -1$ και να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, ακρότατα και την κυρτότητα.

γ) Αν $g(0) = -2$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = g(x)$

δ) Έστω F μια αρχική της f στο $(-1, +\infty)$.

Να λύσετε την ανίσωση $F(e^{x-1}) - F\left(\frac{1}{x}\right) > \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - \eta\mu(e^{x-1})$, στο $(0, +\infty)$

11.73 α) Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή

β) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το $(-\infty, -1]$ για την οποία

ισχύει $f'(x) + e^x = \frac{1}{x+1}$, $\forall x > -1$

β1) Να δείξετε ότι $f(0) = -1$

β2) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(x+1) - e^x$, $x > -1$ και να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, ακρότατα και την κυρτότητα.

γ) Αν $g(0) = -2$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = g(x)$

δ) Έστω F μια αρχική της f στο $(-1, +\infty)$.

Να λύσετε την ανίσωση $F(e^{x-1}) - F\left(\frac{1}{x}\right) > \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - \eta\mu(e^{x-1})$, στο $(0, +\infty)$

(ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΕΜΕ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ 2018)

11.74 Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \int_1^e f(x) dx - \frac{1}{2}$, $x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 = 2^x$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

δ) Δίνεται συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 1, για την οποία ισχύει :

$$[e - g(1)]^x \geq x + 1 \quad \text{και} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1-2017h)}{h} = 2018$$

Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x = 1$ και ότι έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

11.75 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $x[f'(x) - 1] = f(x)$, $x > 0$

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x + 1 - x}{1 - x}, & 0 < x < 1 \\ f(x), & x \geq 1 \end{cases}$ η οποία είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x + 1 - x}{1 - x}, & 0 < x < 1 \\ x \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$

β) Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

γ) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $g\left(\frac{2g^2(x) - 5g(x) + 5}{3}\right) = 0$ έχει 3 ακριβώς ρίζες.

δ) Αν ρ η λύση της εξίσωσης του ερωτήματος γ) με $0 < \rho < 1$, να δειχθεί ότι ισχύει :

$$\int_{\rho}^1 g(x) dx + 2 \int_1^{\rho} g^2(x) dx \geq 0 \quad (\text{Β ΑΡΣΑΚΕΙΟ ΨΥΧΙΚΟΥ})$$

11.76 Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2\eta\mu x - x$

α) Να βρείτε τα ακρότατα της f (ολικά και τοπικά)

β) Να αποδείξετε ότι $\forall x_0 \in [0, \pi]$ η C_f και η εφαπτόμενη στο $A(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin x dx$

δ) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

ε) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - f(2x) \cdot \ln x)]$ (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2018)

11.77 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$ με $F(1) = 0$.

Δίνεται επιπλέον $\int_0^1 (x-1) \cdot f'(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = 0$ και $e^x \cdot F(x) \geq e^x - e^{2x-1}$

α) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$, $f(1) = -1$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1) : f(x_0) + F(x_0) = 0$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x\left(f(x) + \frac{f(x)}{x}\right) + x \cdot f'(x) = -F(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$

δ) Να δείξετε ότι $e \cdot \int_0^1 x \cdot f(x) dx \geq 1$

11.78 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f'(x) - 1 = 2x \cdot e^{f(x)-x-1}$, $f(0) = -1$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)-x+1} - x^2 - 1$ είναι σταθερή και στη συνέχεια

να δείξετε ότι $f(x) = x + \ln(x^2 + 1) - 1$

β) Βρείτε τη μονοτονία, τα σημεία καμπής της f και να δείξετε ότι $f(A) = \mathbb{R}$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $\ln\left(\frac{f^2(x) + 4f(x) + 5}{(2x + \ln 2)^2 + 1}\right) = 2x + \ln 2 - f(x) - 2$, $x \geq 1$

δ) Έστω F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$

δ1) Να δείξετε ότι η F έχει κρίσιμο σημείο $x_0 \in (0, 1)$

δ2) Να δείξετε ότι $\int_1^2 f(x) dx < \int_2^3 f(x) dx$

12. ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΠΕΔΟΥ Δ

12.1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και στη συνέχεια να λύσετε στο διάστημα $(0, 1]$ την εξίσωση $\int_1^x f(t)dt = x - 1$ **(ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ 2014)**

12.2 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν:

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{1}{x} - f'(x), \quad x > 0 \quad \text{με} \quad f(1) = \frac{e+1}{e} \quad \text{και} \quad e(1 - f(x)) \leq x - 2, \quad x > 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(1) = -\frac{1}{e}$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -\ln x + x + e^{-x}$, $x > 0$

γ) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $x_0 \in (0, 2)$ για το οποίο ισχύει $f(x_0) > 1$

δ) Να αποδείξετε ότι :

δ_1) Υπάρχει μοναδικό $x_1 < x_0$ τέτοιο ώστε $f(x_1) < f(2)$

δ_2) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, 2)$: $f(\xi) - f(2) = f'(\xi)$ **(ΑΡΣΑΚΕΙΟ ΕΚΑΛΗΣ Α 2016)**

12.3 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $[1, 4]$.

Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $[-2, 3]$ και $f(1) = 2$, $f(4) = 1$, τότε :

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 4)$: $f(x_0) = 0$

β) Να αποδείξετε ότι η C_f δέχεται δύο τουλάχιστον οριζόντιες εφαπτόμενες και έχει ένα τουλάχιστον πιθανό σημείο καμψής

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon : y = -x + 2$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο $(1, 4)$

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 4)$, έτσι ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $P(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο $\xi_1, \xi_2 \in (1, 4)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$: $\frac{1}{f'(\xi_1)} - \frac{1}{2f'(\xi_2)} = -\frac{3}{2}$

ζ) Ένα σημείο K κινείται στην ευθεία (ε) η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο M και Λ η προβολή του K στον άξονα $x'x$. Το σημείο Λ απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ρυθμό 1 m/sec . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $K\Lambda M$ τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του K είναι ίση με την τεταγμένη του.

12.4 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε: $f^3(x) + f(x) = 2x$

α) Να βρείτε το πρόσημο της f

β) Να βρείτε τις ρίζες και την μονοτονία της f

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και εξετάστε την ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

δ) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$: $xf'(x) < f(x) < 2x$

ε) Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να βρείτε την αντίστροφη της f

ζ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 5$

12.5 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής και γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2}{x-1} = -3 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x}{x-2} = -4.$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και να βρείτε την εφαπτομένη της στο σημείο $A(1, f(1))$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 2)$: $5f(x_0) - 2f\left(\frac{3}{2}\right) = 3f\left(\frac{4}{3}\right)$

δ. Να βρείτε τα όρια:

$$\delta_1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h^2) + f(1+2h^2) - 2f(1)}{h^2} \quad \delta_2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{f(x)} - 1 - \sin(f(x) - 1)}{x-1}$$

12.6 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\blacksquare (x-1)f'(x) + f(x) = 1 + \ln x, \quad \forall x \in (0, 1)$$

$$\blacksquare \left(1 - \frac{1}{x}\right)f'(x) + \frac{1}{x^2}f(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (1, +\infty)$$

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι: $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x-1} & , 0 < x \neq 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$

β) Να δείξετε ότι η αντίστροφη της συνάρτησης f υπάρχει και είναι ορισμένη στο $(0, +\infty)$. Στη συνέχεια, να βρείτε το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων f και f^{-1} .

γ) Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη και στη συνέχεια να δείξετε ότι: $2 \ln x < x - \frac{1}{x}$, $x > 1$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x+1) \leq -x+1$.

12.7 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(1) = 1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{f(x)}{x}$, $\forall x > 0$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$, $x > 0$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα και σημεία καμπής.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) > \frac{f(x-1) + f(x+1)}{2}$ για κάθε $x > \sqrt{e} + 1$

δ) Αν G μια παράγουσα της g στο $(0, +\infty)$, όπου $g(x) = \frac{x f(x) + x - 1}{x^2 + 1}$, $x > 0$ τότε:

δ1) Να αποδείξετε ότι: $G(x) - G\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x$, $x > 0$

δ2) Να αποδείξετε ότι: $\int_1^e G(x) dx > \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{G(x)}{x^2} dx$

δ3) Να αποδείξετε ότι η $G'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ και να βρείτε την μονοτονία της G'

12.8 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$. Οι συναρτήσεις F, G είναι οι παράγουσες των f, g αντίστοιχα με $F(1) = G(1)$. Αν ισχύουν τα εξής:

$$\int_1^e [(x-1)\ln x (2f(x) - (x-1)\ln x)] dx = \int_1^e f^2(x) dx \quad \text{και}$$

$$(x-1)g'(x) - g(x) = (x-1)^2 e^{-\frac{g(x)}{x-1}} \quad \text{για κάθε } x \in (1, e], \quad g(2) = \ln 2$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = g(x) = (x-1)\ln x$, $x \in [1, e]$

β1) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $[1, e]$ και ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$

β2) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2017 \frac{\eta\mu(x-1)}{(x-1)^2} (G(x) - G(1))$

γ) Έστω $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in [1, e]$, ένα τυχαίο σημείο της C_f . Φέρνουμε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο M . Να βρείτε για ποια τιμή ξ_0 του ξ , το εμβαδόν $E(\xi)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f την εφαπτομένη (ε) και τις ευθείες $x = 1$, $x = e$ γίνεται ελάχιστο.

δ1) Να μελετηθεί η μονοτονία της f και της F στο διάστημα $[1, e]$

δ2) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{G(2x) - F(2x-1)}{G(x+1) - F(x)} \leq \frac{e^x}{e^{2x-1}}$ στο διάστημα $[1, e]$

12.9 Θεωρούμε συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με δεύτερη παράγωγο γνησίως αύξουσα, για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) + x^2 + 4x + 5}{x + 2} = 2 \quad \text{και} \quad f'(x) > 2, \quad \forall x \neq -2$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(-2) = -1$, $f'(-2) = 2$, $f''(-2) = 0$

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει καμπή στο -2 και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(-2, f(-2))$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-2, -1)$: $f(x_0) = 0$

δ) Για το σημείο x_0 του γ) ερωτήματος:

δ1) να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f^2(x) \cdot \ln(f(x)) + 1}{f(x)}$

δ2) να αποδείξετε ότι: $2 < \int_{-2}^{x_0} f(f(x)) \cdot f'(x) dx < f(0)$

12.10 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$$f(1) = -1, \quad f'(x) + f(x) + 4e^{x-1} = \ln x + x + 1 + \frac{1}{x} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x + x - 2e^{x-1}$, $x > 0$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, ακρότατα

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = \int_e^{e^2} \frac{f'(\ln t)}{t} dt$ έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$h(x) = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{με } x > 0, \quad \text{τον άξονα } x'x \text{ και τις ευθείες } x = \frac{1}{e}, \quad x = 1$$

ε) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = -f(x)$, $x > 0$. Αν η ευθεία $x = \lambda$, $\lambda > 0$ τέμνει τις γραφικές παραστάσεις των f, g στα σημεία A_λ, B_λ αντίστοιχα, να βρείτε :

ε1) την ελάχιστη τιμή των αποστάσεων $(A_\lambda B_\lambda)$

ε2) τα όρια $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{E(\lambda)}{\lambda^2 + 1}$ και $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{E(\lambda)}{\lambda^2 + 1}$ όπου $E(\lambda)$ το εμβαδόν του τριγώνου $OA_\lambda B_\lambda$

12.11 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με σύνολο τιμών $[1, 4]$ και $f(\alpha) = 2$, $f(\beta) = 3$. Να αποδείξετε ότι :

α) υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta) : f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

β) η εξίσωση $2xf'(x) = -(x^2 + 1) \cdot f''(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β)

γ) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta) : |f'(\xi)| > \frac{3}{\beta - \alpha}$

δ) αν F μια αρχική της f στο $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύει $f(x) \cdot F(\alpha + \beta - x) = 1$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε η συνάρτηση $g(x) = F(x) \cdot F(\alpha + \beta - x)$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της.

(ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΚΑΛΑΜΑΡΙ - ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ 2017)

12.12 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε :

■ η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και $f'(x) \leq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

■ $f(-2) = -4$, $f(2) = 4$

■ η g είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$

■ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) \cdot g(x) - x^2}{x - 2} = f'(2) + 4$

Να αποδείξετε ότι :

α) $g(2) = 1$ και $g'(2) = 2$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

γ) η συνάρτηση $G(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - 1}{x - 2}, & x > 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{g(x)+1} + 3^{g(x)}}{2^{g(x)} - e^{g(x)}}, & x = 2 \end{cases}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$

δ) $f(0) = 0$

ε) η εξίσωση $(5x - 13)g(x) + f(-2x + 6) = (x - 2)g(4) + 1 + (x - 3) \left(\int_2^4 \frac{G(x)}{x} dx - \ln 4 \right)$

έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(2, 3)$. (ΑΡΣΑΚΕΙΟ ΕΚΑΛΗΣ Β - 2017)

12.13 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}} \quad \forall x > 0$, $f(0) = 0$.

Η f έχει σύνολο τιμών το $[-2, +\infty)$

α) Να δείξετε ότι $f(1) = -2$, $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της

γ) Να δείξετε ότι $f(4+\alpha) + f(4-\alpha) > 4$, $\forall \alpha \in (0, 4)$

δ) Θεωρούμε συνάρτηση $g: [4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f\left(4 + \frac{1}{x}\right) + f\left(4 - \frac{1}{x}\right) - 4x$

και G μια παράγουσα της g . Η G είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση

δ1) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της g

δ2) Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της g και τις ευθείες $y = -4x + 4$, $x = 4$, $x = 5$. Αν $E < 1$ να βρείτε το είδος της μονοτονίας της G .

12.14 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ ώστε $f'(x) + \frac{2x}{x^2+1}f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$.

Έστω F αρχική της f με $F(1) = 0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της F , τους άξονες x' , y' και την ευθεία $x = 1$

γ) Να δείξετε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\epsilon\phi x) \eta\mu x dx = \frac{1}{3}$

δ) Να δείξετε ότι $F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $x > 0$

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2F(x) - x + 1}$

12.15 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\frac{\eta\mu x}{x} + \alpha, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα $[0, 2]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής. Αν f συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

β) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α

γ) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f

δ) Να αποδείξετε ότι $\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^2 f(x) dx < \frac{3\pi}{2} - 1$

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(-\frac{\pi}{2}x\right) = f\left(-\frac{\pi}{2} \cdot e^{-x}\right)$ έχει μοναδική λύση στο $(0, 1)$

(ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2017)

12.16 Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0, 3]$ της οποίας η γραφική παράσταση της παραγώγου της, φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Αν γνωρίζετε ότι:

– Η ευθεία $\varepsilon: 3y - 3x + 2 = 0$ εφάπτεται στην C_f

και η f έχει μέγιστη τιμή το 0

– Η f πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος

Rolle στο $[0, 2]$ και $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x)}{f'(5-x)} = -\frac{16}{9}$

α) Να δείξετε ότι $f(3) = -\frac{4}{3}$, $f(2) = -\frac{2}{3}$

β) Να μελετήσετε την f και να χαράξετε την γραφική της παράσταση

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 3]$

ισχύει $3f(x) < 4x + \eta\mu x - 2$

δ) Έστω συνάρτηση h κοίλη στο $[0, 3]$

και $g(x) = \frac{1}{f(x)} + h(x)$

δ1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g και να την μελετήσετε ως προς τις κατακόρυφες ασύμπτωτες

δ2) Να δείξετε ότι $\forall x \in [2, 3], \alpha \in [2, 3]$ ισχύει $g(x) \leq g'(\alpha)(x - \alpha) + g(\alpha)$

ε) Να λύσετε την εξίσωση $e^x f(x) = x^2 - 2x + 1 - 2f(x)$, $x \in [2, 3]$

(Β ΑΡΣΑΚΕΙΟ ΨΥΧΙΚΟΥ 2018)

12.17 Η συνάρτηση $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(e-2) = e$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x > -2$

ισχύει $f'(x)(x+2) - f(x) = e^{\frac{f(x)}{x+2}}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x+2)\ln(x+2)$, $x > -2$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(e-2, e)$

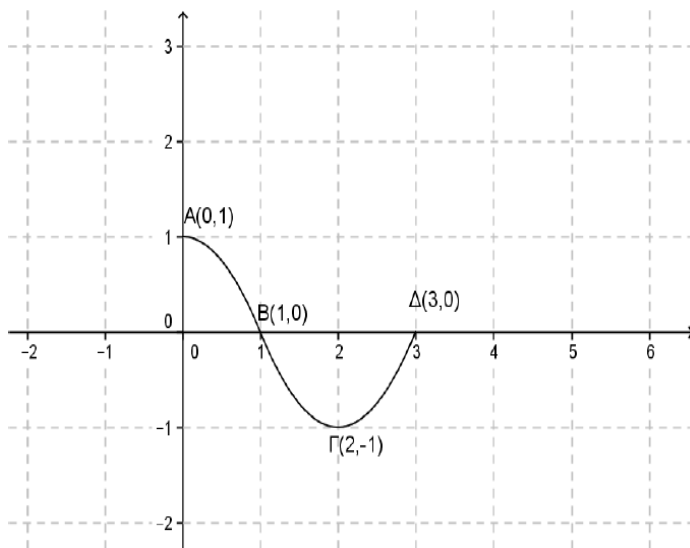
γ) Αν $-2 < \alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι:

γ1) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > (\beta - \alpha)(\beta + \alpha + 4 - e)$

γ2) $\ln(\alpha + 2) < \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot \ln \frac{(\beta + 2)^{\beta + 2}}{(\alpha + 2)^{\alpha + 2}} - 1 < \ln(\beta + 2)$ $\frac{3}{8}$

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 > -2$: $f(x_0) + (x_0 + 2)^2 = 0$

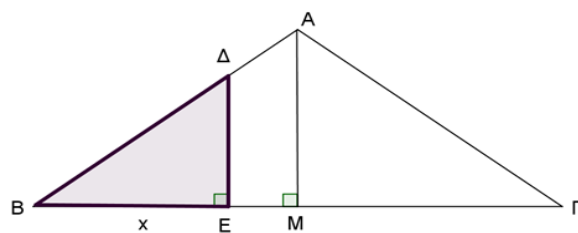
ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα $y'y$, την ευθεία $x = 2$ και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g με $g(x) = -(x+2)^2$



12.18 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = 5$ και $B\Gamma = 8$. Το σημείο E διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ με $DE \perp B\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου που δημιουργείται από το ευθύγραμμο τμήμα DE και τις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση του $x = BE$ είναι:

$$E(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 < x \leq 4 \\ 12 - \frac{3}{8}(8-x)^2, & 4 < x \leq 8 \end{cases}$$



β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $E(x)$ έχει κρίσιμα σημεία

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{E(x) \cdot \eta\mu x}{\eta\mu x}$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της E , την εφαπτομένη στο σημείο $M(4, 6)$ και τις ευθείες $x = 4$, $x = 6$

(ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΚΑΛΑΜΑΡΙ 2018)

12.19 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - 1}{x} = 1$.

Αν F αρχική της f στο $\mathbb{R}$ με $4[f(x) - F(x)] = e^{2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

και για την συνάρτηση g ισχύει $e^x(g(x) + e^x) = 4F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή και ότι $f(x) = \frac{e^{2x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

β1) Να δείξετε ότι είναι $f^{-1}(x) = \frac{\ln 2x}{2}$, $x > 0$

β2) Να προσδιορίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2[f(x) + f^{-1}(x)]}{\eta\mu 2x + 2x}$

γ1) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$

γ2) Να λύσετε την εξίσωση $2f(e^x - x) + e^2 = 2e^{x+2} - 2xe^2$

δ) Αν επιπλέον $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^*$ συνεχής για την οποία ισχύει $f(h(2)) > \frac{e^2}{4}$ και H η αρχική της h για $x > 0$ με $H(1) = 0$

δ1) Να λύσετε την ανίσωση $f(H(x)) > \frac{1}{2}$

δ2) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(h(x))}{x-2} + \frac{H(-\sin x) + 1}{x-\pi} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2, \pi)$

(ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ 2018)

12.20 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(1) = 1$. Η σύνθεση της g με την f είναι συνάρτηση 1-1, με $g(0) = 0$, $g(x) \cdot x \cdot f'(x) - g(x) \cdot (f(x) - x^2) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι:

α1) η συνάρτηση g είναι 1-1

α2) $x \cdot f'(x) - f(x) = -x^2$, $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x - x^2$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$ σε δύο ισοεμβαδικά χωρία

δ) Θεωρούμε το σημείο $A(\kappa, 0)$ με $0 < \kappa < 1$, και το σημείο B του άξονα $x'x$, ώστε το ευθύγραμμο τμήμα AB να έχει μέσο το $E(1, 0)$. Αν τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην γραφική παράσταση της f ώστε το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ να είναι εγγεγραμμένο μεταξύ της γραφικής παράστασης της f

και του άξονα $x'x$, να βρείτε για ποια τιμή του κ με $0 < \kappa < 1$ το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ γίνεται μέγιστο. (ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2018)

12.21 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \ln x}{x - 1} = 1$

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι $y = 2x - 2$

Έστω ότι η f έχει συνεχή πρώτη παράγωγο με $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-2}^{-1} f(x) dx < \int_0^1 f(x) dx$

Έστω ότι η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx < -1$ (ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΛΑΜΑΡΙ 2018)

12.22 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(-1, +\infty)$ για την οποία ισχύουν :

■ $(x+1)f''(x) = e^x \cdot (x+2) - f'(x), x > -1$

■ $f(0) = 1$

■ $e^x - f(x) \leq x, x > -1$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - \ln(x+1), x > -1$

γ1) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει ακριβώς δύο ρίζες

$\xi_1 \in (-1, 0)$ και $\xi_2 \in (0, +\infty)$

γ2) Να δείξετε ότι αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = 2$, τότε $E < \xi_2 - \xi_1$

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\eta \mu \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \cdot \ln f(x) \right)$

12.23 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν :

■ $f(x) \neq 0, \forall x > 0$

■ $f(1) = 1$

■ $f'(x) = \left(2x + \frac{1}{x}\right) f(x), \forall x > 0$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^{x^2-1}$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f , τον άξονα x' και την ευθεία $x = 1$

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln x}$

ε) Να δείξετε ότι $\int_0^{2017} f(x) dx < f(1) + f(2) + \dots + f(2017)$

στ) Αν F μια παράγουσα της f στο $[0, +\infty)$ να δείξετε ότι $2F(x+1) < F(x+2) + F(x)$

12.24 Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$

α) Να δείξετε ότι $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$, $x > 0$

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης

γ) Να δείξετε ότι $f(x) > 2^{f(x)} - 1$, $x > 0$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x} = 0$ όπου $0 < \alpha < 1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x , μια στο $(0, 1)$ και μια στο $(1, 2)$

ε) Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $(0, +\infty)$ με $F(e) = e \cdot \ln 2$,

να αποδείξετε ότι $\ln 2 < F(1) < \ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right)$ (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2018)