

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μαθη(μα)τική Βιωματική Ημερίδα

Χαλκίδα, 26/4/2023

“Με γνώση και στρατηγική για την επιτυχία!”

Επιμέλεια Ηλεκτρονικού Αρχείου:

Μπάμπης Στεργίου

* * * * *

Καλή Επιτυχία !!!

*** Ευχαριστώ τον Πρόεδρο και τα μέλη του Παραρτήματος της Ε.Μ.Ε. Εύβοιας για την τιμή που μου έκαναν να παρουσιάσω το βιωματικό σκέλος της εκδήλωσης!

**Αφιερώνεται στους συναδέλφους
μαθηματικούς και στους
υποψήφιους μαθητές που
χαράζουν με όραμα και πείσμα
την πορεία τους στο μέλλον !**

Αγαπητοί φίλοι, συνάδελφοι και μαθητές !

Οι σημειώσεις αυτές αποτελούν μια διαρκώς ανανεώσιμη δεξαμενή ασκήσεων, θεμάτων, παρατηρήσεων και μεθοδεύσεων, από την οποία αντλώ συνήθως υλικό για την οργάνωση των ομιλιών ή βιωματικών σεμιναρίων για υποψήφιους στις πανελλαδικές εξετάσεις των Γενικών Λυκείων.

Αυτό το αρχείο είναι αρκετά μεγάλο, για να το μελετήσει ένας μαθητής μόνος του. Για τον λόγο αυτό προτείνω, σε συνεργασία με τον μαθηματικό του , να γίνει μια επιλογή σε όσα στοιχεία ταιριάζουν με τις απαιτήσεις του συγκεκριμένου μαθητή και να συζητηθούν στην περίοδο των επαναληπτικών μαθημάτων. Είμαι σίγουρος ότι ο ενδιαφερόμενος θα αποκομίσει πολλά οφέλη από αυτές τις γραμμές, μια και αποτελούν κατά κάποιο τρόπο το απόσταγμα μιας μακρόχρονης πορείας στο μαγευτικό κόσμο των μαθηματικών και της διδασκαλίας τους σε ανήσυχους νέους και νέες της πατρίδας μας.

Θα χαρώ, αν για οποιοδήποτε λόγο επικοινωνήσετε μαζί μου, ώστε αυτό το αρχείο να εμπλουτιστεί αλλά και για να πάρει σιγά σιγά μια πιο δομημένη μορφή ενός οδηγού μελέτης στην τελευταία φάση της προετοιμασίας των μαθητών για τις εξετάσεις του.

Εύχομαι στους συναδέλφους να στεφθεί το έργο τους με επιτυχία, στους δε υποψήφιους να είναι αυτές οι εξετάσεις η αφορμή αλλά και η ευκαιρία για να χαράξουν έναν ένα νέο δρόμο στην νεανική τους ζωή, γεμάτο γνώση και καταξίωση !

Καλή Επιτυχία !!!

Μπάμπης Στεργίου, Απρίλιος 2023

Η Δομή των Θεμάτων

Κοιτάζοντας τα θέματα των πανελλαδικών των τελευταίων ετών, όλοι έχετε μια καλή ιδέα για τη δομή, το πνεύμα και το επίπεδο των εξετάσεων.

Ας δούμε λοιπόν εν συντομία τι μπορεί να συναντήσουμε και να προετοιμαστούμε κατάλληλα.

1° ΤΟ ΘΕΜΑ Α

Μέρος Α - Ορισμοί

1. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Απάντηση :

.....

.....

.....

.....

.....

2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση :

.....

.....

.....

.....

.....

3. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο;

Απάντηση :

.....

.....

.....

.....

.....

4. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται 1-1;

Απάντηση :

.....

.....

.....

.....

.....

*** Στον ορισμό του 1-1 δίνουμε ως απάντηση την εξής :

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1-1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2).$$

και όχι την παρακάτω, αν και είναι η ίδια απάντηση:

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **συνάρτηση 1-1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } f(x_1) = f(x_2), \text{ τότε } x_1 = x_2.$$

5. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

Απάντηση :

.....

.....

.....

6. α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$;

Απάντηση :

.....

.....

.....

.....

.....

β) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$;

Απάντηση :

.....

.....

.....

.....

.....

7. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Απάντηση :

.....

.....

.....

.....

.....

8. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση :

.....

.....

.....

.....

.....

9. Αν τα μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όπου f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 , τι λέμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0 ;

Απάντηση :

.....

.....

.....

.....

10. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση :

.....

.....

.....

.....

.....

11. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση :

.....

.....

.....

.....

.....

12. α) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο;

Απάντηση :

.....

.....

.....

.....

.....

β) Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση :

.....

 γ) Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση :

.....

13. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή και πότε κοίλη σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση :

.....

14. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f ;

Απάντηση :

.....

15. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = \ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);

Απάντηση :

.....

16. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$;

Απάντηση :

Σχόλιο -Απάντηση στην ερώτηση 16.**ΟΡΙΣΜΟΣ**

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0.$$

Να μην δοθεί ως απάντηση η παρακάτω, αφού βαθμολογικά μηδενίζεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R},$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}.$$

17. Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση :

.....

.....

.....

.....

18. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού για μια συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[a, \beta]$.

Απάντηση :

.....

.....

.....

Μέρος Β - Απόδειξη θεωρημάτων (Επιλογές)

1. Να αποδείξετε ότι $(a^x)' = a^x \ln a$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $a > 0$.

Απόδειξη

2. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ με $f'(x) = 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ .

Απόδειξη

3. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ , παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Απόδειξη

4. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Απόδειξη

.....

.....

Μέρος Γ - Ερωτήσεις Σ - Α

Προτείνουμε να μην απαντάτε πάνω στις ερωτήσεις αλλά μόνο στον πίνακα απαντήσεων που βρίσκεται στο τέλος των ερωτήσεων αυτών, ώστε να μπορείτε να μελετήσετε τις ερωτήσεις και δεύτερη φορά. Είναι όλες ερωτήσεις εξετάσεων προηγούμενων ετών.

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές ή με Λ αν είναι λανθασμένες και να συμπληρώσετε τον πίνακα απαντήσεων στο τέλος της παραγράφου Β.

1. Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$, και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$.

2. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

3. Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε υπάρχουν σημεία της με την ίδια τεταγμένη.

4. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και λ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \lambda) = 0.$$

5. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$.

6. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

7. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

8. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

9. Αν $a > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

10. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$, τότε $f(\alpha) = f(\beta)$.

11. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

12. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

13. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και συνεχής στο (α, β) , τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha, \beta]$ μία μέγιστη τιμή.

14. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σ' ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και

$$B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$

- 15.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο Δ .
- 16.** Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
- 17.** Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.
- 18.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- 19.** Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ με $f(a) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (a, b)$, ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(b) > 0$.
- 20.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 , και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .
- 21.** Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- 22.** Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .
- 23.** Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σ' ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
- 24.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[a, b]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
- 25.** Έστω μια συνάρτηση συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .
- 26.** Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.
- 27.** Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$ και σημείο $x_0 \in [a, b]$, στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$.
- 28.** Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .
- 29.** Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "πάνω" από τη γραφική της παράσταση.
- 30.** Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα Δ και $a, b, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_a^{\beta} f(x)dx = \int_a^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

31. Αν f, g, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε:

$$\int_a^{\beta} f(x)g'(x)dx = \int_a^{\beta} f(x)dx \cdot \int_a^{\beta} g'(x)dx$$

32. Το ολοκλήρωμα $\int_a^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

33. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει $f(x) < 0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega) = \int_a^{\beta} f(x)dx$.

34. Αν $\int_a^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

35. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$\int_a^{\beta} (f(x) \cdot g'(x))dx = [f(x)g(x)]_a^{\beta} - \int_a^{\beta} (f'(x) \cdot g(x))dx$$

36. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$, τότε:

$$\int_a^{\beta} f(x)dx = [xf(x)]_a^{\beta} - \int_a^{\beta} xf'(x)dx$$

37. Η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

38. Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει
 $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

39. Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων
 f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

40. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Πίνακας Απαντήσεων

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Μέρος Δ - Ερωτήσεις Σ – Α με αιτιολόγηση

Ερώτηση 1^η

Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση με Σ–Α και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = 0$.

Απάντηση

Ερώτηση 2^η

Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση με Σ–Α και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Απάντηση

Ερώτηση 3^η

Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση με Σ–Α και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο A που είναι ένωση διαστημάτων και $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο $x \in A$, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο A .

Απάντηση

Ερώτηση 4^η

Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση με Σ – Α και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Αν η f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ , τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Απάντηση

Ερώτηση 5^η

Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση με $\Sigma - \Lambda$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Αν η f είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ , τότε $f''(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Απάντηση

Ερώτηση 6^η

Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση με $\Sigma - \Lambda$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Κάθε συνάρτηση που είναι "1-1" σε ένα διάστημα Δ , είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

Απάντηση

Μέρος Ε - Ερωτήσεις οργάνωσης λογικής δομής

Ε.1 Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) . Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λανθασμένη;

α) Υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

β) Υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

γ) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ και $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

δ) Η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

ε) Αν ακόμα $f(a) = f(b)$, τότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

Ε.2 Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες σε σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, b)$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

α) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

β) Αν $f(x) < g(x)$ και οι f, g έχουν (πεπερασμένο) όριο στο x_0 , τότε:

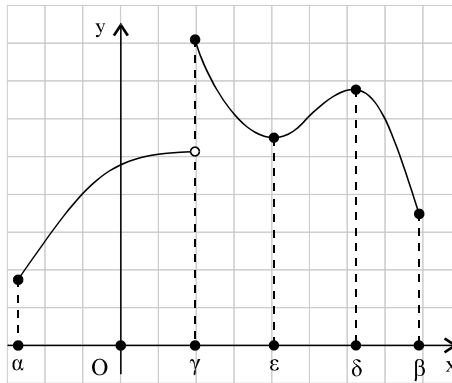
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

γ) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$ και είναι ίσο με $\ell > 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\ell$.

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

Μέρος ΣΤ - Ερωτήσεις σε διαγράμματα

Ε.3 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[a, \beta]$.



A. Να συμπληρώσετε τις προτάσεις:

- α) Το $f(\delta)$ είναι τοπικό ακρότατο και συγκεκριμένα τοπικό ———— .
 β) Η f δεν είναι συνεχής, μόνο στο σημείο ———— .

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές ή με Λ, αν είναι λανθασμένες.

- α) Το $f(\gamma)$ είναι ολικό μέγιστο της f .
 β) Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, μόνο στις θέσεις $x = \gamma$, $x = \epsilon$, $x = \delta$.
 γ) Το διάστημα $[a, \gamma]$ η f είναι κυρτή.
 δ) Στο διάστημα $[\gamma, \beta]$ ισχύουν για την f οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.
 ε) Η f έχει ελάχιστο στο $[a, \beta]$.
 στ) Στο διάστημα $[a, \beta]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών.
 ζ) Στο $[a, \beta]$ ισχύει το συμπέρασμα του Θ.Ε.Τ.
 η) Το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[f(a), f(\gamma)]$.

2° ΤΟ ΘΕΜΑ Β

Δίνουμε για λύση και σχολιασμό το παρακάτω πολύ βασικό θέμα και προτείνουμε να λυθεί από όλους τους υποψήφιους.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

B3. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

B5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζουν η C_f , ο άξονας x και η ευθεία $x = 1$.

3° ΤΟ ΘΕΜΑ Γ

Προτείνουμε για λύση και σχολιασμό το παρακάτω ενδεικτικό θέμα. Στη θέση του μπορεί να είναι πρόβλημα, άσκηση με διαγράμματα ή θεωρητικό θέμα..

Θέμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

(β) Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα. Έχει η f ολικά ακρότατα ;

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = 0$.

(δ) Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

(ε) Αν $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \alpha x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{6}$.

(στ) Να αποδείξετε ότι η τιμή του ολοκληρώματος $I = \int_1^2 \frac{x^3}{6f(x)} dx$ είναι $I = \ln \frac{f(2)}{f(1)} - 1$.

4° ΤΟ ΘΕΜΑ Δ

Το ΘΕΜΑ Δ μπορεί γενική άσκηση, πρόβλημα ή υπολογιστική άσκηση που περιέχει ερώτημα στο ρυθμό μεταβολής ή ακόμα υπολογιστική άσκηση που το τελευταίο υποερώτημα έχει τη μορφή προβλήματος ακροτάτων.

1° ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + x + \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(-x)} = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{1 + \eta \mu^2 x} - \eta \mu x = x + \sqrt{1 + x^2}$.

(δ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα , να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

(ε) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{f(\eta \mu x)} dx$.

(στ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^x f(x) dx > 2e - 1$

Διαγωνίσματα – Αυτενέργεια - Εξάσκηση

"Ξέρεις πιο πολλά μαθηματικά, από όσα νομίζεις".

Ένα διαγώνισμα θέλει αυτοσυγκέντρωση, καλή διαχείριση του χρόνου και έλεγχο των πράξεων σε κάθε βήμα. Ο βασικός σου στόχος είναι να γράψεις σωστά αυτά που ξέρεις και να συγκεντρώσεις μονάδες ακόμα και από ερωτήματα που δεν θα λύσεις ολοκληρωμένα. Γράψε πρώτα τα ερωτήματα που ξέρεις καλά. Δεν είναι απαραίτητο να τα γράψεις με τη σειρά που δίνονται στη φωτοτυπία. Γράψε κατευθείαν στο καθαρό, μη χάνεις χρόνο να μεταφέρεις τις λύσεις από το πρόχειρο. Βεβαιώσου ότι δεν παρέλειψες να επεξεργαστείς, και κυρίως να γράψεις στο καθαρό, όλα τα ερωτήματα. Συνήθως, με σταθερό ρυθμό, στη μία ώρα έχεις εξασφαλίσει το 10 από τα δύο πρώτα θέματα και έχεις άλλες δύο ώρες για τις υπόλοιπες 10 μονάδες. Μπορείς τελικά να πετύχεις πιο εύκολα από όσο νομίζεις !

Προσομοίωση - 1^η

ΘΕΜΑ Α

A1. α) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο;

β) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο;

γ) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται 1-1;

Μονάδες 6

A2. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**. Να αποδείξετε ότι :

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

ii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Μονάδες 10

A3. Να χαρακτηρίσετε με Σ ή Λ τις παρακάτω προτάσεις.

α) Ισχύει $|\eta \mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$.

γ) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = 1$.

δ) Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και λ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \lambda) = 0$.

ε) Αν $\alpha > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$.

Μονάδες 5

A4. Δίνεται ο ισχυρισμός: Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

α) Να χαρακτηρίσετε με (Σ) ή (Λ) τον παραπάνω ισχυρισμό.

β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & x < 0 \\ x^2 + \alpha x, & x \geq 0 \end{cases}$. Η f παρουσιάζει στο $x = 1$ τοπικό ακρότατο.

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$.

Μονάδες 5

B2. Να βρείτε τις $f'(x)$, $f''(x)$ και να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$. Έχει η f σημεία καμπής;

Μονάδες 5

B3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

Μονάδες 5

B4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζει η C_f με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

B5. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(2, 3)$ η εξίσωση $f(x) = e^{-x}$ έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x \ln x + x^2 - 4x + 3$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\ln x \geq 2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2x}$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $A(2, f(2))$ και να αποδείξετε ότι:

$$2x \ln x + x^2 - 4x + 8 \geq 2(\ln(2e)) \cdot x, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Μονάδες 5

Γ5. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 (2 \ln(x^2 + 1) + \frac{3}{x^2 + 1}) dx > \frac{8}{3}$.

Μονάδες 5**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ και έστω F μια αρχική της f με την ιδιότητα:

$$f(x)F(2-x) = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = F(x)F(2-x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x-1}$.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στην (ε), στην C_f και τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 5

Δ4. Το σημείο $M(x, f(x))$, με $x > 0$, απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με ρυθμό $2 \text{ cm} / \text{min}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας φ που σχηματίζει με τον $x'x$ η εφαπτομένη (η) της C_f στο M , τη χρονική στιγμή που το M απέχει από το $A(2, 0)$ την ελάχιστη απόσταση.

Μονάδες 5

Δ5. Αν $h(x) = f(x^2)$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 h(x)dx > \frac{1}{3}$.

Μονάδες 5**Καλή Επιτυχία !!!**

Προσομοίωση - 2^η

*** Τα θέματα Β, Γ, Δ είναι από εξετάσεις παλαιότερων ετών, έχουν γίνει όμως προσθήκες ή αλλαγές, ώστε να ταιριάζουν στην τρέχουσα εξεταστέα ύλη. Προτείνουμε να λυθούν με τη δέουσα επιμέλεια.

ΘΕΜΑ Α

A1. α) Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

β) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ ;

A2. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ με $f'(x) = 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ .

Μονάδες 6

A3. Να χαρακτηρίσετε με Σ ή Λ τις παρακάτω προτάσεις.

α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

γ) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

δ) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

ε) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

στ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

ζ) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και συνεχής στο $(\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha, \beta]$ μία μέγιστη τιμή.

η) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σ' ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.

θ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο Δ .

ι) Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σ' ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 10

A4. Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση με $\Sigma - \Lambda$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

"Αν η f είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ , τότε $f''(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ".

Μονάδες 3

A5. Δίνονται οι προτάσεις:

- A. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.
- B. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.
- Γ. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) .
- Δ. $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.
- Ε. $f(\alpha) = f(\beta)$.

Να επιλέξετε το ελάχιστο πλήθος από τις παραπάνω προτάσεις και να τις διατάξετε με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε οι τρεις από αυτές να αποτελούν τις προϋποθέσεις και η τελευταία να είναι το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο διπλανό σχήμα:
- $f(0) = 2$, $f(1) = 0$.
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x = 0$ και $x = 3$ ισούται με 8 τ.μ.
- Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 3]$.

B1. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2$, $f(2) = -2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν,

$$\text{τα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) - 2}, \text{ δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.}$$

Μονάδες 6

B2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα, στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f .

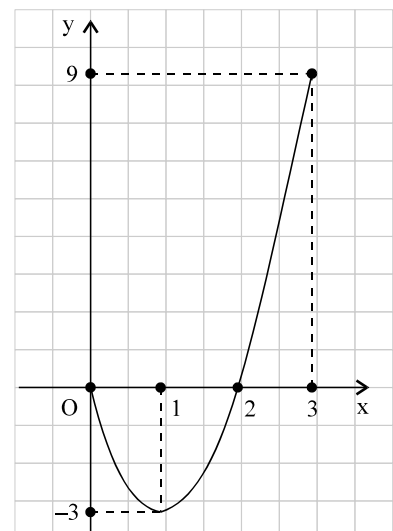
Μονάδες 7

B3. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 6

B4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2, 3)$, για το οποίο δεν υπάρχει το $A = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$.

Μονάδες 6



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x - 1, x > 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 6

- β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2024}, x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

- γ) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 2023$.

Μονάδες 7

- δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$ με $x > 0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} G(x),$$

όπου G είναι αρχική της συνάρτησης $g(x) = xf(x)$, με $G(1) = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 4

- β) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}, x > 0$.

Μονάδες 5

- γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να την μελετήσετε ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμψής.

Μονάδες 4

- δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f , να χαράξετε τη γραφική της παράσταση και να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x = e^{\lambda x - 1}$.

Μονάδες 7

- ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1, x = e$.

Μονάδες 5

Καλή Επιτυχία !!!

" Τίποτα δεν έχουμε πετύχει , αν μένει να κάνουμε ακόμα και το ελάχιστο ! "

Carl Friedrich Gauß, 1777 – 1855

Υποδείξεις

Για τυχόν παροράματα παρακαλώ να με ενημερώσετε στο stergiu@otenet.gr

Θα το εκτιμήσω πολύ !

Προσομοίωση 1^η

ΘΕΜΑ Α

Είναι θεωρία .

A3. α)Σ, β)Λ, γ)Λ, δ)Σ, ε)Σ

A4. α)Λ, β) . Με τον ορισμό αποδεικνύουμε ότι δεν υπάρχει το $f'(0)$.

ΘΕΜΑ Β

B1) Από Fermat πρέπει $f'(1) = 0$. Αλλά στο $(0, +\infty)$

είναι $f'(x) = 2x + \alpha$. Άρα

$$2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2 .$$

B2), B3) Είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x < 0 \\ -2, & x = 0 \\ 2x - 2, & x > 0 \end{cases}$$

και:

$$f''(x) = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$$

Για να είναι η f περιττή, αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(-x) = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις $x < 0$, $x > 0$, $x = 0$ κλπ.

Η γραφική παράσταση έχει τη μορφή του σχήματος.

B4) Είναι $E = \int_{-2}^0 (-x^2 - 2x)dx - \int_0^2 (x^2 - 2x)dx = \frac{8}{3}$.

B5) Στο $[2, 3]$ εφαρμόζουμε Bolzano για τη συνάρτηση:

$$h(x) = x^2 - 2x - e^{-x} .$$

Αλλά: $h'(x) = (2x - 2) + e^{-x} > 0$ στο $[2, +\infty)$, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

Σχόλιο :

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση αυτή έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

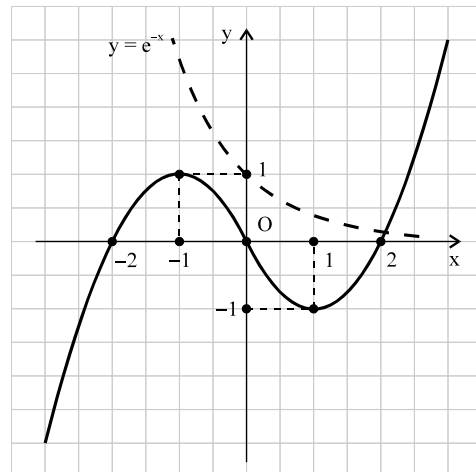
Πράγματι, σχεδιάζουμε την $y = e^{-x}$. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι $e^{-x} > f(x)$ στο $(-\infty, 2]$.

ΘΕΜΑ Γ

Είναι $f(x) = 2x \ln x + x^2 - 4x + 3$, $x > 0$.

Γ1. • Είναι $D_f = (0, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+
f''(x)	-	-	+	+		
f(x)						
	T.M.		Σ.K.		T.E.	



- Η f είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $f'(x) = 2 \ln x + 2x \frac{1}{x} + 2x - 4 = 2 \ln x + 2x - 2$, $f'(1) = 0$.

- $f''(x) = \frac{2}{x} + 2 > 0$, για κάθε $x > 0$.

- Για $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) = 0$.

- Για $x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) = 0$.

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$		+	+
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		0	+

ο.ε.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, οπότε στο $x = 1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1) = 0$.

- Για $0 < x < 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 0$
- Για $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 0$.

Γ2. Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x \ln x + x^2 - 4x + 3) = 3$, διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

Έστω $\Delta_1 = (0, 1]$, $f(\Delta_1) = f((0, 1]) \stackrel{\text{συνεχής}}{=} [f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] = [0, 3)$.

$$\Delta_2 = [1, +\infty), f(\Delta_2) = f([1, +\infty)) \stackrel{\text{συνεχής}}{=} [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, +\infty).$$

Άρα $f((0, +\infty)) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [0, +\infty)$.

Γ3. Είναι:

$$\begin{aligned} f(x) \geq f(1) &\Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x \ln x + x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2x \ln x \geq 4x - x^2 - 3 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \ln x \geq 2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2x}, \end{aligned}$$

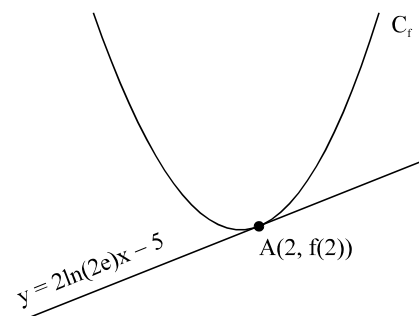
για κάθε $x > 0$.

Γ4. Είναι:

$$\begin{aligned} (\text{εφ}): y - f(2) &= f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - (4 \ln 2 - 1) = (2 \ln 2 + 2)(x - 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = (2 \ln 2 + 2)x - 4 \ln 2 - 4 + 4 \ln 2 - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = 2(\ln 2 + \ln e)x - 5 \Leftrightarrow y = 2(\ln(2e))x - 5. \end{aligned}$$

Η f είναι κυρτή διότι $f''(x) > 0$, $x > 0$ οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη σε κάθε σημείο της εκτός από το σημείο επαφής. Άρα:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 2(\ln(2e))x - 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x \ln x + x^2 - 4x + 3 \geq 2(\ln(2e))x - 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x \ln x + x^2 - 4x + 8 \geq 2(\ln(2e))x, \quad x > 0. \end{aligned}$$



Γ5. Από το ερώτημα Γ3 έχουμε ότι : $\ln x \geq 2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2x} \Leftrightarrow 2 \ln x \geq 4 - x - \frac{3}{x}$. Αυτή, θέτοντας στη θέση του x το $x^2 + 1$ δίνει :

$$2 \ln(x^2 + 1) \geq 4 - (x^2 + 1) - \frac{3}{x^2 + 1} \Leftrightarrow 2 \ln(x^2 + 1) + \frac{3}{x^2 + 1} \geq 3 - x^2$$

Ολοκληρώνουμε και παίρνουμε τη ζητούμενη, αφού το ίσον δεν ισχύει παντού :

$$\int_0^1 (2 \ln(x^2 + 1) + \frac{3}{x^2 + 1}) dx > \int_0^1 (3 - x^2) dx = \frac{8}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $g'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = f(x)F(2-x) - F(x)f(2-x) = 1 - 1 = 0$, διότι για x το $2-x$ η δοσμένη σχέση δίνει ότι $f(2-x)F(x) = 1$.

Δ2. Έχουμε ότι $g(x) = c \Leftrightarrow F(x)F(2-x) = c$. Αυτή για $x = 1$ δίνει $F^2(1) = c \Leftrightarrow c = 1$, αφού η δοσμένη για $x = 1$ δίνει $F(1) = 1$. Είναι επομένως $F(x)F(2-x) = 1 = f(x)F(2-x)$. Η σχέση αυτή δίνει ότι $F(2-x) \neq 0$ για κάθε x και απλοποιώντας παίρνουμε $F(x) = f(x)$. Παραγωγίζουμε και παίρνουμε:

$$F'(x) = f'(x) \Leftrightarrow f(x) = f'(x) \Leftrightarrow f(x) = c_1 e^x.$$

Αλλά για $x = 1$ από αυτήν παίρνουμε $f(1) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{e}$. Επομένως $f(x) = e^{x-1}$.

Δ3. Έστω $N(\alpha, f(\alpha))$ το σημείο επαφής. Είναι:

$$(\varepsilon): y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

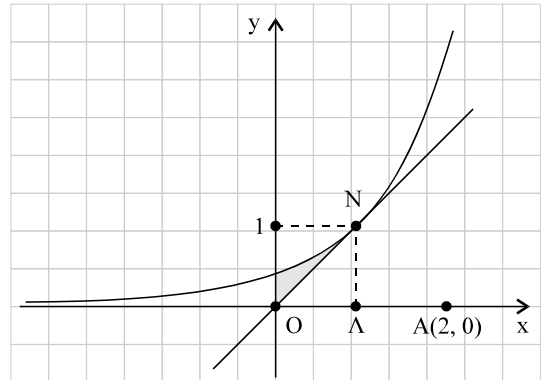
και επειδή αυτή διέρχεται από το $O(0, 0)$ παίρνουμε:

$$f(\alpha) = \alpha f'(\alpha) \Leftrightarrow e^{\alpha-1} = \alpha e^{\alpha-1} \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

$$\text{Άρα } (\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = x.$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^1 (f(x) - x) dx = \left[e^{x-1} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{e} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}.$$



Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η f είναι κυρτή οπότε $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή να χαράξουμε το σχήμα, αφού πρόκειται για απλή περίπτωση.

Δ4. Έστω $M(x(t), f(x(t)))$ και $\varphi(t)$ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη (η) της C_f στο M με τον $x'x$. Είναι τότε:

$$f'(x(t)) = \varepsilon \varphi(t) \quad (1).$$

Ζητάμε τον ρυθμό $\varphi'(t_0)$ τη στιγμή t_0 που η απόσταση AM είναι ελάχιστη. Είναι όμως:

- $AM = \sqrt{(x-2)^2 + f^2(x)} = d(x)$, με $x > 0$.
- $d'(x) = \frac{2(x-2) + 2f(x)f'(x)}{2d(x)} = \frac{x-2 + e^{2x-2}}{d(x)}$. Επειδή $d'(1) = 0$ και η $\varphi(x) = x - 2 + e^{2x-2}$ είναι γνησίως αύξουσα, η συνάρτηση d έχει ολικό ελάχιστο για $x = 1$.

Παραγωγίζουμε τη σχέση (1) και παίρνουμε:

$$f''(x(t)) \cdot x'(t) = \frac{1}{\sin^2 \varphi(t)} \varphi'(t) \Leftrightarrow 2f''(x(t)) = (1 + \varepsilon \varphi^2(t)) \varphi'(t),$$

αφού $\frac{1}{\sin^2 \varphi(t)} = 1 + \varepsilon \varphi^2(t)$. Τη στιγμή t_0 είναι $x(t_0) = 1$, $\varepsilon \varphi(t_0) = f'(x(t_0)) = f'(1) = 1$ και $f''(x(t_0)) = f''(1) = 1$.

Έτσι από την τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$2f''(x(t_0)) = (1 + \varepsilon \varphi^2(t_0)) \varphi'(t_0) \Leftrightarrow 2f''(1) = (1 + 1) \varphi'(t_0) \Leftrightarrow \varphi'(t_0) = 1.$$

Δ5. Είναι $h(x) = f(x^2) = e^{x^2-1} \geq (x^2 - 1) + 1 = x^2$, οπότε αφού το ίσον δεν ισχύει παντού παίρνουμε:

$$\int_0^1 h(x)dx > \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Προσομοίωση 2^η

ΘΕΜΑ Α

Είναι θεωρία.

A4. α) Λ

β) $f(x) = x^4$

α	β	γ	δ	ε	στ	ζ	η	θ	ι
Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ

A5. Μια διάταξη είναι η **A, Γ, Ε** και συμπέρασμα το **B**.

ΘΕΜΑ Β

B1. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, 3)$, οπότε:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^3 |f'(x)| dx = -\int_0^2 f'(x) dx + \int_2^3 f'(x) dx = \\ &= -(f(2) - f(0)) + f(3) - f(2) = -2f(2) + 2 + f(3) \end{aligned}$$

και αφού $E = 8$ έχουμε:

$$-2f(2) + 2 + f(3) = 8 \Leftrightarrow -2f(2) + f(3) = 6 \quad (1)$$

Επιπλέον αφού η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$, τότε θα ισχύει $f(0) = f(3) \Leftrightarrow f(3) = 2$ και επομένως από την (1) είναι $f(2) = -2$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (xf'(x)) = 1 \cdot (-3) = -3$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = f'(1) = -3$, η f' είναι συνεχής από την γραφική της παράσταση. Επίσης:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0}}{\frac{1}{f'(x)}} = -\infty$$

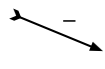
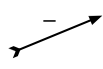
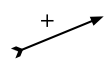
αφού $f'(x) < 0$ κοντά στο μηδέν και $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0$.

B2. Από το B1 έχουμε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, 3)$ και $f'(2) = 0$. Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 2$ το $f(2) = -2$. Ακόμη από το διάγραμμα έχουμε πως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$, ενώ $f''(1) = 0$ αφού η καμπύλη της $C_{f'}$ δέχεται εφαπτομένη στο $(1, f'(1))$.

Συμπερασματικά λοιπόν,

- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$, γνησίως αύξουσα στο $[2, 3]$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 2$ το $f(2) = -2$,
- η f είναι κοίλη στο $[0, 1]$, κυρτή στο $[1, 3]$ και το σημείο $(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής.

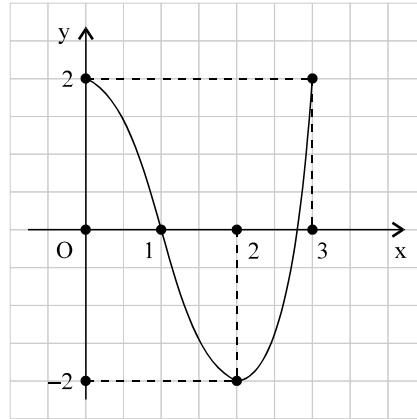
B3. Τα συμπεράσματα του ερωτήματος B2 συγκεντρώνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	1	2	3
f'(x)				
f(x)				

Σ.Κ.

Ο.Ε.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



B4. Αν είναι $f(x_0) \neq 0$, τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$ υπάρχει, αφού η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$. Επομένως για να μην υπάρχει το όριο θα πρέπει να υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2, 3)$, ώστε $f(x_0) = 0$ και η f να μην διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 . Η f είναι συνεχής στο $[2, 3]$ και $f(2) \cdot f(3) = -2 \cdot 2 = -4 < 0$. Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$, ώστε $f(x_0) = 0$. Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, 3]$. Άρα το x_0 είναι μοναδικό. Έχουμε ακόμα:

- $2 < x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) = 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.
- $x_0 < x < 3 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) = 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Επομένως το παραπάνω όριο στο x_0 δεν υπάρχει.

ΘΕΜΑ Γ

- Γ1.**
- $f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x}$ με $f'(1) = 0$, $f(1) = -1$.
 - $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$.

Σύνολο τιμών είναι το $f((0, +\infty)) = [-1, +\infty)$.

Γ2. Γράφεται $f(x) = 2017$. Αλλά $2017 \in f(\Delta_1)$ και $2017 \in f(\Delta_2)$, όπου $\Delta_1 = (0, 1]$, $\Delta_2 = [1, +\infty)$, $f(\Delta_1) = f(\Delta_2) = [-1, +\infty)$ κ.λπ.

Γ3. Θεώρημα Bolzano στην $g(x) = f'(x) + f(x) - 2017$. Είναι $g(x_1)g(x_2) = f'(x_1)f'(x_2) < 0$, διότι $f'(x) < 0$ στο $(0, 1)$, $f'(x) > 0$ στο $(1, +\infty)$, $x_1 < 1$ και $x_2 > 1$.

Άλλος τρόπος

Θεώρημα Rolle στην $h(x) = e^x (f(x) - 2023)$.

Γ4. Είναι $g(x) \geq 0$, οπότε $E = \int_1^e g(x) dx = \int_1^e (x-1) \ln x dx = \dots = \frac{e^2 - 3}{4}$.

Το ολοκλήρωμα βρίσκεται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες :

$$E = \int_1^e (x-1) \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{(x-1)^2}{2} \right)' (x-1) \ln x dx \text{ κλπ}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $G'(x) = g(x)$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη.

Δ2. Είναι $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}G(x) \Leftrightarrow x^2 f(x) = x + G(x)$. Παραγωγίζουμε και παίρνουμε:

$$2xf(x) + x^2 f'(x) = 1 + xf(x) \Leftrightarrow xf(x) + x^2 f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (xf(x))' = (\ln x)' \text{ κ.τ.λ.}$$

Δ3. $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$. Το $f(1) = 1$ είναι μέγιστο και $f(D_f) = (-\infty, 1]$. Η συνάρτηση παρουσιάζει στο $\sqrt{e}$ καμπή.

Δ4. $x = 0, y = 0$.

Για την εξίσωση, με $x > 0$, έχουμε :

$$x = e^{\lambda x - 1} \Leftrightarrow \ln x = \lambda x - 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1 + \ln x}{x} \Leftrightarrow$$

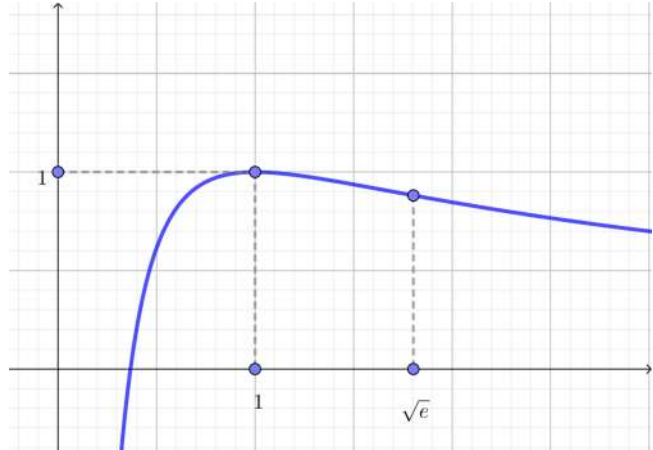
$$\Leftrightarrow f(x) = \lambda$$

Μετακινούμε την ευθεία $y = \lambda$ παράλληλα στον άξονα $x'x$ και βλέπουμε, ανάλογα με το λ , πόσες φορές τέμνει τη γραφική παράσταση. Έτσι :

Για $\lambda \leq 0$ έχουμε μόνο μία λύση, για $\lambda \in (0, 1)$

έχουμε δύο ακριβώς ρίζες, για $\lambda = 1$ έχουμε μία ακριβώς ρίζα, την $x = 1$, ενώ για $\lambda > 1$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

Δ5. $E = \int_1^e f(x) dx = \dots = \frac{3}{2}$ τ.μ. Αρκεί να γράψουμε $f(x) = (1 + \ln x)(1 + \ln x)' = \left(\frac{(1 + \ln x)^2}{2} \right)'$.



ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΘΕΜΑ Β (1)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax + \beta$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$

Στη θέση $x = 1$ η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο με τιμή 0.

B1. Να αποδείξετε ότι $a = -3$, $\beta = 2$.

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα τοπικά ακρότατα και τα κοίλα.

B3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f , το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2$ και να κάνετε τη γραφική παράσταση της f . Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

B4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$.

B5. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = 2 - 3x$ εφάπτεται στη C_f και μάλιστα την διαπερνά στο σημείο επαφής της.

ΘΕΜΑ Β (2)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x < 1 \\ x^2 - 2x + 1, & x > 1 \end{cases}$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια και να βρείτε την παράγωγό της.

B2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f , το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες της C_f .

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

B4. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να ορίσετε την f^{-1} .

B5. Στο μεταβλητό σημείο $M(a, f(a))$ της C_f , με $a < 1$, φέρνουμε την εφαπτομένη (ε) που τέμνει τις ευθείες $x = 1$, $y = 0$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$ και ότι το τρίγωνο $P\Delta E$ έχει σταθερό εμβαδόν, όπου $P(1, 0)$.

Συμπληρωματικό ερώτημα

B6. Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζουν η γραφική παράσταση της f , οι άξονες και η ευθεία $x = \lambda$, $0 < \lambda < 1$. Να υπολογίσετε το όριο:

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 1} E(\lambda)$$

ΘΕΜΑ Β (3)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = x^2 + 2x$ καθώς και η συνάρτηση $h = f \circ g$.

B1. Να ορίσετε τη συνάρτηση h , καθώς και τις $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$.

B2. Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία, τα τοπικά ακρότατα και τα κοίλα στα διαστήματα $(-\infty, -3]$, $[1, +\infty)$.

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_h και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

B4. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $A(-1, 0)$ δεν άγεται καμία εφαπτομένη προς τη C_h .

B5. Να βρείτε το σημείο N της C_f που απέχει από το $B\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ την ελάχιστη απόσταση και να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της C_f στο N είναι κάθετη στον BN .

Συμπληρωματικά ερωτήματα

B6. Να αποδείξετε ότι από κάθε σημείο της ευθείας $(\eta): y = -\frac{5}{4}$ άγονται δύο ακριβώς εφαπτομένες προς τη

C_g , οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους.

B7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία $x = 4$.

B8. Να εξετάσετε αν η h παραγωγίζεται στα σημεία $x_1 = -3$ και $x_2 = 1$.

B9. Να λύσετε την εξίσωση $(g \circ g \circ g)(x) = -1$

ΘΕΜΑ Β (4)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - x + 1$, $x > 0$

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι:

$$\ln 2019^{2019} - \ln 2018^{2018} > 1$$

B2. Να αποδείξετε ότι $x^x \geq e^{x-1}$ για κάθε $x > 0$.

B3. Να λύσετε την εξίσωση $x \ln x = x - 1$ (ή την εξίσωση $x = e^{\frac{x-1}{x}}$).

B4. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, να βρείτε τις ασύμπτωτες και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .

B5. Να βρείτε τις τιμές του $a > 0$ έτσι, ώστε $x^x \geq a^{x-1}$ για κάθε $x > 0$.

B6. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

ΘΕΜΑ Β (5)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & x < 0 \\ x^2 + ax, & x \geq 0 \end{cases}$. Η f παρουσιάζει στο $x = 1$ τοπικό ακρότατο.

B1. Να αποδείξετε ότι $a = -2$.

B2. Να βρείτε τις $f'(x)$, $f''(x)$ και να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$. Έχει η f σημεία καμπής; Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

B3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

B4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζει η C_f με τον άξονα $x'x$.

B5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^{-x}$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2, 3)$.

ΘΕΜΑ Γ (1)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 0$ και:

$$(f(x) - x)(f(x) + x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Έχει η f ολικά ακρότατα και ποια είναι αυτά;

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή, να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Γ3. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $O(0, 0)$ δεν άγεται καμία εφαπτομένη προς τη γραφική παράσταση της f .

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f(x+1) - f(2x-1))$

Γ5. Να λύσετε την εξίσωση $e^x + \sqrt{x^2 + 1} = x + 2$.

ΘΕΜΑ Γ (2)

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ και έστω F μια αρχική της f με την ιδιότητα:

$$f(x)F(2-x) = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = F(x)F(2-x)$, $x \in \mathbb{R}$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x-1}$.

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στην (ε), στη C_f και στον άξονα $y'y$.

Γ4. Το σημείο $M(x, f(x))$, με $x > 0$, απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με ρυθμό 2 cm/min . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας φ που σχηματίζει με τον $x'x$ η εφαπτομένη (η) της C_f στο M , τη χρονική στιγμή που το M απέχει από το $A(2, 0)$ την ελάχιστη απόσταση.

Γ5. Αν $h(x) = f(x^2)$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 h(x)dx > \frac{1}{3}$.

ΘΕΜΑ Δ (1)

Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ και την ιδιότητα:

$$\left| \frac{f(x) \ln x}{x-1} - \frac{f(y) \ln y}{y-1} \right| \leq (x-y)^2 \text{ για κάθε } x, y \in A$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{f(x) \ln x}{x-1}$ είναι $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$, $x \in A$.

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$, αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

Δ5. Να αποδείξετε ότι αν F είναι μια αρχική της f στο διάστημα $\Delta_2 = (1, +\infty)$, τότε $F(3) - F(2) < F(4) - F(3)$

ΘΕΜΑ Δ (2)

Δίνεται η κυρτή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 3$, $f'(0) = 0$ και $f'(1) = 2$. Η ευθεία (ε): $y = 2x + 2$ εφάπτεται με τη γραφική παράσταση C_f της f .

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 4$.

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta_{\mu x} - \sigma_{\nu x}}{f(x)}$.

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x^2 + 2) - f(x^2) \leq f(x + 4) - f(x + 2)$$

Δ5. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = [0, +\infty)$ και $g(x) = f(x)$, $x \in \Delta$.

i) Να αποδείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της g^{-1} .

ii) Αν η g^{-1} είναι συνεχής στο $g(\Delta)$, να υπολογίσετε το όριο $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} g^{-1}(x)$.

iii) Αν η g^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $(3, +\infty)$, να αποδείξετε ότι:

$$(g^{-1})'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)} \text{ για κάθε } x > 0$$

ΘΕΜΑ Δ (3) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και την ιδιότητα:

$$f'(x)(x^2 + 1) + xf(x) = 1 + 2x(x + \sqrt{x^2 + 1}) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) - x\sqrt{x^2 + 1} - x^2 - 1$ είναι σταθερή και $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, να βρείτε το σύνολο τιμών της, καθώς και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\sqrt{x^2 + 1} = 2018 - x$.

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, να βρείτε τις ασύμπτωτες και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .

Δ4. Αν F είναι αρχική της f , να λύσετε την εξίσωση:

$$F(2^x) + F(3^x) = F(4^x) + F(5^x)$$

Δ5. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$, $x \in \mathbb{R}$

Δ6. Να λύσετε την εξίσωση $(1 + e^{2-x}\sqrt{e^{2x-4} + 1})(\sqrt{e^{-2x} + 1} - e^{-x}) = e^{2-x}$

ΘΕΜΑ Δ (4) – Πρόβλημα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{100}{x}$, $x \neq 0$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα τοπικά ακρότατα και τα κοίλα.

Δ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f , το σύνολο τιμών της και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Δ3. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $O(0, 0)$ δεν μπορούμε να φέρουμε εφαπτομένη προς τη γραφική παράσταση της f .

Ένα μεγάλο τυπογραφείο έχει αναλάβει να εκτυπώσει 100 χιλιάδες πανομοιότυπες αφίσες. Για τον σκοπό αυτόν ενοικιάζει μηχανές, που η καθεμία εκτυπώνει 100 αφίσες την ώρα. Τα πάγια έξοδα ενοικίασης και εγκατάστασης της κάθε μηχανής ανέρχονται σε 100 €. Επιπλέον το τυπογραφείο για κάθε ώρα εκτύπωσης έχει πρόσθετα έξοδα 10 €.

Δ4. Να εκφράσετε τα συνολικά έξοδα εκτύπωσης ως συνάρτηση του αριθμού των εκτυπωτικών μηχανών που θα χρησιμοποιηθούν.

Δ5. Να βρείτε το πλήθος των μηχανών που πρέπει να τεθούν σε λειτουργία, ώστε η εκτύπωση να έχει το ελάχιστο κόστος, καθώς και το ελάχιστο αυτό κόστος.

ΔΥΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΘΕΜΑ 1°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 1$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες x_1, x_2 .

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 του ερωτήματος (β) ισχύει ότι $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ 2°

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) \left[e^{f(x)} + e^{-f(x)} \right] = 2$ για κάθε και $x \in \mathbb{R}$,
- $f(0) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) i) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την ευθεία $y = x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^3 f^2(x) dx < 9$ και $\int_0^1 f(x^2) dx < \frac{1}{3}$.

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Θέμα 1°

α) Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο $f'(x) = (e^{x-1} - \ln x)' = e^{x-1} - \frac{1}{x}$. Είναι $f'(1) = 1 - 1 = 0$ και επιπλέον

$$f''(x) = \left(e^{x-1} - \frac{1}{x} \right)' = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0.$$

Η f' λοιπόν είναι γνησίως αύξουσα και όπως δείχνει ο διπλανός πίνακας έχουμε:

- $x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$.
- $x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Το $f(1) = e^0 - \ln 1 = 1$ είναι ολικό ελάχιστο της f . Επίσης είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{x-1} - \ln x) = +\infty$ και επειδή η f είναι συνεχής, αλλά και γνησίως μονότονη στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$, είναι $f(\Delta_1) = [1, +\infty)$. Άρα $f(D_f) = [1, +\infty)$.

Σχόλιο

Αν θέσουμε $\Delta_2 = [1, +\infty)$ για την εύρεση του συνόλου τιμών της f δεν είναι απαραίτητο να βρούμε το $f(\Delta_2)$. Ωστόσο η εύρεση του $f(\Delta_2)$ γίνεται με παρόμοιο τρόπο:

- $f(1) = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} \left[1 - \frac{\ln x}{e^{x-1}} \right] = +\infty$,

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^{x-1}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^{x-1}} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{\ln x}{e^{x-1}} \right] = 1 > 0 \text{ καθώς και } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty.$$

β) Έχουμε βρει ότι το $1 = f(1)$ είναι το ολικό ελάχιστο της f και παρουσιάζεται μόνο για $x = 1$, αφού για $x \neq 1$ είναι $f(x) > 1$. Έτσι:

$$f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}.$$

Όμως $\frac{3}{2} \in f(\Delta_1) = [1, +\infty)$ και $\frac{3}{2} \in f(\Delta_2) = [1, +\infty)$. Άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}$:

- έχει μια ακριβώς ρίζα στο Δ_1 και μάλιστα στο $(-\infty, 1)$, διότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ_1 ,
- έχει μια ακριβώς ρίζα στο Δ_2 και μάλιστα στο $(1, +\infty)$, διότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ_2 .

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η δοσμένη εξίσωση έχει δύο ακριβώς ρίζες, οι οποίες είναι και θετικές.

γ) Από το ερώτημα (γ) είναι:

- $f(x_1) = f(x_2) = \frac{3}{2}$
- $x_1 \in (0, 1)$ και $x_2 \in (1, +\infty)$.

Η εφαπτομένη στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ της C_f έχει εξίσωση $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$. Αυτή διέρχεται από το σημείο $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$, οπότε:

$$\frac{3}{2} - f(\xi) = f'(\xi)(0 - \xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) + \frac{3}{2} = 0 \quad (1).$$

Για να υπάρχει λουπόν μοναδική εφαπτομένη της C_f σε σημείο της $A(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (x_1, x_2)$, που διέρχεται από το $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\xi f'(\xi) - f(\xi) + \frac{3}{2} = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο (x_1, x_2) . Θεωρούμε τη

$$\text{συνάρτηση } H(x) = \xi f'(x) - f(x) + \frac{3}{2}.$$

- Η συνάρτηση H είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$.
- $H(x_1) = x_1 f'(x_1) - f(x_1) + \frac{3}{2} = x_1 f'(x_1) < 0$, διότι $x_1 > 0$ και $f'(x_1) < 0$, αφού η f' είναι αρνητική στο $(0, 1)$.

Όμοια είναι $H(x_2) > 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$H(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) + \frac{3}{2} = 0,$$

που είναι η ζητούμενη σχέση. Είναι ακόμα

$$H'(x) = \left(\xi f'(x) - f(x) + \frac{3}{2} \right)' = f'(x) + \xi f''(x) - f'(x) = \xi f''(x) > 0,$$

διότι $x > 0$ και $f''(x) > 0$. Άρα η H είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το παραπάνω ξ είναι μοναδικό.

Άλλος τρόπος:

Rolle στην $G(x) = \frac{2f(x) - 3}{x}$ στο $[x_1, x_2]$. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\xi \in (x_1, 1)$, όπως δηλαδή ζητήθηκε στις εξετάσεις.

Θέμα 2°

α) Η δοθείσα σχέση γράφεται $(e^{f(x)} - e^{-f(x)})' = (2x)'$, οπότε $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Από την τελευταία, αν θέσουμε $x = 0$, βρίσκουμε $c = 0$ κι έτσι αυτή γράφεται $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$. Είναι:

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \Leftrightarrow e^{2f(x)} - 1 = 2xe^{f(x)} \Leftrightarrow e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow (e^{f(x)} - x)^2 = 1 + x^2 \quad (1).$$

Έστω $H(x) = e^{f(x)} - x$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε η σχέση (1) γράφεται $H^2(x) = 1 + x^2$. Άρα είναι $H(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αυτή διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αλλά $H(0) = 1 > 0$, οπότε είναι $H(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η σχέση (1) δίνει:

$$H(x) = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow e^{f(x)} - x = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

β) i) Είναι

$$f'(x) = \frac{(x + \sqrt{1+x^2})'}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Η f' είναι με τη σειρά της παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x) = \frac{-x}{(\sqrt{x^2+1})^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♦ Για $x > 0$ είναι $f''(x) < 0$, οπότε η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$.

♦ Για $x < 0$ είναι $f''(x) > 0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$.

♦ Στο $x = 0$ η f παρουσιάζει σημείο καμπής, το σημείο $(0, f(0))$ δηλαδή το $O(0, 0)$.

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 0$ είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$.

Αφού η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$, είναι $f(x) \leq x$ για κάθε $x \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 (x - f(x)) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} [x^2]_0^1 - \int_0^1 (x)' f(x) dx = \frac{1}{2} - [xf(x)]_0^1 + \int_0^1 xf'(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} - f(1) + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} - f(1) + \left[\sqrt{x^2+1} \right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

γ) Επειδή για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) < x$ και $f(x) > 0$ (αφού $f(x) > f(0)$), παίρνουμε:

$$\bullet \quad f^2(x) < x^2, \text{ οπότε } \int_0^2 f^2(x) dx < \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 9, \quad \bullet \quad f(x^2) < x^2, \text{ οπότε } \int_0^1 f(x^2) dx < \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

ΓΕΝΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 2023

Επειδή ο χρόνος πρέπει να μοιράζεται για τη μελέτη όλων των εξεταζόμενων μαθημάτων, προτείνουμε τα θέματα να γίνουν ως εργασία στην τάξη με την καθοδήγηση του διδάσκοντα.

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται 1-1;

Μονάδες 3

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

A3. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ με $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 9

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές ή Λ , αν είναι λανθασμένες.

(α) Κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι 1-1 είναι και γνησίως μονότονη.

(β) Για κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε θα είναι και

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta = (a, b)$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το (B, A) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.

(δ) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ , παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε $f'(x_0) = 0$

(ε) Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ και G μια αρχική της f στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$, $x \neq 1$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 5

B2. Να μελετήσετε την f ως τα κοίλα και τα σημεία καμψής.

Μονάδες 5

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Μονάδες 5

B4. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{1-x} - x - 1$. Να αποδείξετε ότι $f = g$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{-1} f(x) dx$.

Μονάδες 5

B5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^{1+x}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, όχι όμως παραγωγίσιμη, στο σημείο $x_0 = 0$ και να βρείτε το πρόσημο της f .

Μονάδες 5

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, να βρείτε το σύνολο τιμών της καθώς και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2022$.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \begin{cases} x + e^{-x} - 1, & x < 0 \\ \frac{2}{3}x\sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$ είναι αρχική της f και να υπολογίσετε

το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 9$

Μονάδες 7

4° ΘΕΜΑ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 3$,

$$g(x) = f(x) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \quad \text{και} \quad |f(x) - f(y) - e^x + e^y| \leq |x - y|^2 \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι :

$$f(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει

$$g'(x) + g(x) < g(x+1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδειχτεί ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ εφάπτεται και στην C_g στο ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

- Δ4.** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g , την κοινή εφαπτομένη $y = x + 3$ των C_g, C_f και την ευθεία $x = 1$.

Μονάδες 5

- Δ5.** Ένας ιδεατός διαβάτης διατρέχει από αριστερά προς τα δεξιά ολόκληρη τη γραφική παράσταση της f , κινούμενος πάνω σε αυτή. Να αποδείξετε ότι κάποια στιγμή η απόστασή του από το σημείο $N(1,0)$ γίνεται ελάχιστη και μάλιστα αυτό συμβαίνει σε ένα μόνο σημείο, το οποίο βρίσκεται στο διάστημα $(-1,0)$.

Μονάδες 5

Καλή Επιτυχία !!!

Ο ψύχραιμος μαθητής στις εξετάσεις :

- Δεν αφιερώνει περισσότερο χρόνο από 15' κατά μέσον όρο για κάποιο ερώτημα που παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία, εκτός κι αν έχει λύσει όλα τα υπόλοιπα.
- Γράφει κατευθείαν στο καθαρό για να μην χάνει χρόνο και κυρίως τα θέματα που βλέπει ότι τα κατέχει. Χρησιμοποιεί το πρόχειρο μόνο όταν το κρίνει απαραίτητο, όπως πχ να χαράξει μια γραφική παράσταση
- Εξετάζει σε κάθε θέμα μήπως το συμπέρασμα κάποιου υποερωτήματος είναι σκαλί για τη λύση κάποιου από τα επόμενα ερωτήματα. Μπορούμε λοιπόν να στηριχτούμε σε κάποιο ερώτημα, έστω κι αν δεν έχει αποδειχθεί, ώστε να αποδείξουμε το επόμενο.
- Σε κάθε ερώτημα που τον δυσκολεύει κάνει την ερώτηση : τι μπορώ να γράψω για να πάρω μια τουλάχιστον μονάδα ; Για το λόγο αυτό σας προτείνουμε : να γράφετε τους τύπους , τις υποθέσεις και το συμπέρασμα των σχετικών με την άσκηση θεωρημάτων , να ερμηνεύετε τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης και να αφήνετε στην κόλλα σας κάθε προσπάθεια, ακόμα κι αν εσείς νομίζετε ότι είναι ημιτελής ή λάθος.

Γενικές οδηγίες και συμβουλές για τις Πανελλαδικές 2021 !



Μπάμπης Στεργίου - Μαθηματικός

Φίλε μαθητή/φίλη μαθήτριά !

Διάβασε καλά αυτές τις οδηγίες δυο και τρεις φορές, αν έχεις το χρόνο ! Αποτελούν στην ουσία τις δικές σου σκέψεις και την εμπειρία των προηγούμενων υποψήφιων. Ο καθηγητής σου θα σχολιάσει υπεύθυνα μαζί σου τις πιο πολλές από αυτές τις οδηγίες. Αν συγκρατήσεις ένα μέρος τους , θα έχεις κάνει ένα μεγάλο βήμα για την επιτυχία σου!

1. Ποτέ δεν βιαζόμαστε να ξεκινήσουμε την λύση ενός ερωτήματος, αν δεν βεβαιωθούμε ότι έχουμε καταλάβει απόλυτα τόσο τα δεδομένα όσο και τα ζητούμενα. Ακόμα και τα σημεία στίξης έχουν τη σημασία τους πολλές φορές, ειδικά στα προβλήματα. Για αυτό διαβάζουμε αργά και σχολαστικά την άσκηση, τουλάχιστον δύο φορές. Μερικές φορές είναι χρήσιμο να ρίξουμε μια ματιά σε όλο το θέμα, γιατί από τα επόμενα ερωτήματα γίνονται καλύτερα αντιληπτά τα προηγούμενα. **Συνήθως η λύση βρίσκεται στην εκφώνηση !**

2. Πριν αρχίσουμε να γράφουμε, σκεφτόμαστε ψύχραιμα και φέρνουμε στο μυαλό μας αντίστοιχες ασκήσεις :

- Μήπως πρέπει να αναφέρω κάποιες προϋποθέσεις ; Κρίμα να χάσω μονάδες από έλλειψη αιτιολογήσεων. Δεν γίνομαι όμως υπερβολικός, γιατί χάνω χρόνο !
- Έγραψα το πεδίο ορισμού ; Έβαλα διπλή γραμμή στα πινακάκια που ίσως φτιάξω για μονοτονία ή για πρόσημο, όπου δεν ορίζεται η συνάρτηση ;
- Εξέτασα δεύτερη φορά τα πρόσημα σε κάποιον πίνακα που αφορά στην f ή στην f' ;
- Μήπως μπορώ να φτιάξω **ένα διάγραμμα** , ώστε και την εκφώνηση να καταλάβω καλύτερα, αλλά και την πορεία λύσης να αντιληφθώ γρηγορότερα ; Αυτό ενδείκνυται σε προβλήματα με εφαπτομένες, στο ρυθμό μεταβολής , σε ανισότητες πάνω σε κυρτές ή κοίλες συναρτήσεις αλλά και σε κάθε περίπτωση με γραφικές παραστάσεις , όπως πχ στις αντίστροφες.

3. Κάνουμε με πάρα πολύ προσοχή , χωρίς όμως πίεση και αγωνία, τις πράξεις. Σε κάθε βήμα *ελέγχουμε* τις απαντήσεις και μετά προχωράμε. Κοιτάζουμε για αντίθετους όρους, για κοινούς παράγοντες, για απλοποιήσεις κλπ, βάζοντας πάντα και παντού τυχόν περιορισμούς. Όταν λύνουμε

εξισώσεις ή καταλήγουμε σε αριθμητικές απαντήσεις, κάνουμε όπου είναι δυνατόν μια σύντομη επαλήθευση. Οι πιο πολλοί μαθητές χάνουν τουλάχιστον 1-3 μονάδες από επιπόλαια αριθμητικά λάθη.

Η απώλεια μονάδων από λάθος πράξεις είναι ό,τι χειρότερο μπορεί να σου συμβεί στις εξετάσεις ! Πρέπει με κάθε τρόπο οι πράξεις μας να είναι σωστές !

4. Αν ένα ερώτημα δεν μπορέσεις να το απαντήσεις, πάρε το συμπέρασμα έτοιμο, ως να το είχες αποδείξει, και χρησιμοποίησέ το έτοιμο για να λύσεις όχι μόνο το αμέσως επόμενο αλλά και τα επόμενα. Μπορεί μάλιστα το ερώτημα αυτό να είναι απαραίτητο για το τελευταίο υποερώτημα !

5. Αν δεις ότι στη λύση μιας άσκησης οδηγείσαι σε υπερβολικά πολλές πράξεις, εξισώσεις μεγάλου βαθμού ή πολύ σύνθετες και μακροσκελείς σχέσεις, τότε ένα είναι σίγουρο : ή έχεις κάνει κάποιο αριθμητικό λάθος ή προσπέρασες κάποια απλοποίηση ή βασικό αλγεβρικό τέχνασμα ή πήρες τελείως λανθασμένο τρόπο. Πάρε την ερώτηση από την αρχή, διάβασέ την καλά, βεβαιώσου εκ νέου ότι κατάλαβες τι σου ζητάνε και ξεκίνα από άλλο μονοπάτι αν μπορείς. Πάντα να σκέφτεσαι που πρέπει να φτάσεις.

6. Όπου μπορούμε , χαράσσουμε ένα πρόχειρο διάγραμμα ή έναν βοηθητικό πίνακα για να καταλάβουμε την ερώτηση ή να αξιοποιήσουμε τα δεδομένα(ειδικά αν μας δίνεται θέμα με διάγραμμα της παραγώγου). Χωρίς αυτό, μερικές φορές είναι αδύνατο να μπούμε στο σκεπτικό της άσκησης.

7. Σε κάθε μας λύση κάνουμε τουλάχιστον μια αναφορά στις προϋποθέσεις των προτάσεων που χρησιμοποιούμε. Αν οι αναφορές αυτές δεν είναι προφανείς, θέλουν λεπτομερή αιτιολόγηση, όπως πχ στο θεώρημα Bolzano η συνθήκη $f(\alpha)f(\beta) < 0$. Αντίθετα, είναι αρκετό να γράψουμε ότι : η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως άθροισμα συνεχών), είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο ...κλπ

8. Το λάθος, λογικό ή αριθμητικό, συνήθως γίνεται πιο συχνά σε ασκήσεις που ξέρουμε τη λύση τους παρά σε άλλες, τελείως άγνωστες. Για αυτό εκεί που βλέπουμε ότι ξέρουμε τον τρόπο, πρέπει να είμαστε δυο φορές συγκεντρωμένοι και να προχωράμε μεθοδικά και νηφάλια. Δεν βιαζόμαστε. Χρόνος υπάρχει αρκετός. Όμως αυτός ο χρόνος ροκανίζεται από τυχόν λάθη και ανόητες όπως τις λέμε αστοχίες : (α) άλλα ζητάει το πρόβλημα και άλλα ψάχνουμε εμείς (β) Άλλα δεδομένα έδωσε και άλλα νομίζουμε εμείς κλπ.

9. Μη βιάζεσαι ποτέ να πας να κάνεις τεχνάσματα που έμαθες στη λύση κάποιων ασκήσεων.

<< Ποτέ μην προσπερνάς το προφανές !!! >> ,

έλεγα παλιά σε έναν μαθητή μου και όταν τον συναντώ μετά από δέκα χρόνια, αντί για καλημέρα μου λέει αυτή τη φράση. Τόσο πολύ του άρεσε ! Αυτή εδώ είναι ίσως η πιο σημαντική φιλική συμβουλή που σου δίνω .Να ξεκινάς και να σκέφτεσαι όσο πιο απλά και σταθερά μπορείς. Βήμα – βήμα. Κάνε πρώτα αυτά που λένε ο ορισμός και τα θεωρήματα (πχ στο 1-1 ή στην μονοτονία ή στο θεώρημα Rolle). Προσπάθησε πχ να λύσεις την εξίσωση $f'(x) = 0$ με αλγεβρικό τρόπο. Ψάξε μήπως έχει κάποια προφανή ρίζα. Αν δεν λύνεται η εξίσωση αλγεβρικά, έχεις όμως βρει ρίζα με παρατήρηση , τότε ή προχώρα στην 2^η παράγωγο για να φτιάξεις το γνωστό καθοδικό πίνακα ή , αν προκύπτει περίπλοκη δεύτερη παράγωγος και δεν μπορείς να βρεις το πρόσημό της-μόνο τότε- , πάρε τον αριθμητή της παραγώγου ως βοηθητική συνάρτηση και βρες το πρόσημό της.

Έχεις κάνει πολλά τέτοια παραδείγματα και θα βρεις εύκολα τη σωστή λύση. Προσοχή : αν πάρεις ως βοηθητική συνάρτηση το 1^ο μέλος της εξίσωσης $f'(x) = 0$, τότε η μελέτη της θα σου λύσει μεν την εξίσωση, αλλά το πρόσημό της δεν είναι πάντα ίδιο με το πρόσημο της παραγώγου. Για την παράγωγο, αφού ξέρεις πια τις ρίζες, θα κάνεις άλλον πίνακα των f', f για να βάλεις πρόσημο και να βρεις τη μονοτονία της f .

10. Σε ερωτήσεις : << Να αποδείξετε ότι υπάρχει ...>> ή << να αποδείξετε ότι η εξίσωση ...έχει μία τουλάχιστον(ή ακριβώς μία) ρίζα σε ένα διάστημα >> φέρνουμε αμέσως στο μυαλό μας τα υπαρκτικά θεωρήματα : Bolzano, Rolle, ΘΕΤ, ΘΜΤ, ΘΜΕΤ.

Πρώτη σου σκέψη είναι να κάνεις έναν γρήγορο έλεγχο μήπως μια ρίζα βρίσκεται και μετά να αποδείξεις τη μοναδικότητα, αν ζητείται.

Λοιπόν, σε τέτοια ερωτήματα, μπορεί να πρέπει να θεωρήσουμε βοηθητική συνάρτηση. Όχι μόνο βάζουμε x στη θέση του γράμματος x_0 , του οποίου θέλουμε την ύπαρξη , όχι μόνο τα φέρνουμε όλα στο 1^ο μέλος, αλλά μερικές φορές διώχνουμε τους παρανομαστές που μηδενίζονται στα άκρα του διαστήματος που μας δίνουν. Έχετε κάνει δεκάδες τέτοιες ασκήσεις και με λίγη προσοχή θα τα καταφέρετε.

Το νου μας στο ΘΜΤ. Αν κάπου δούμε μέσα στο ζητούμενο δύο τιμές τις συνάρτησης , πχ $f(x+2)$ και $f(x-1)$, τότε αυτό ...φωνάζει για ΘΜΤ στο διάστημα $[x-1, x+2]$ (Να κάνετε το αντίστοιχο ερώτημα στο ΘΕΜΑ 4 – 2019)

Αν δεν δίνεται διάστημα, τότε η ύπαρξη συνήθως προκύπτει από το σύνολο τιμών. Βρίσκουμε λοιπόν το σύνολο και από εκεί γίνεται άμεση η ύπαρξη. Μένει ίσως η μοναδικότητα, αλλά αυτή γίνεται κατακόρον με την μονοτονία ή το 1-1.

11. Όταν λύνουμε εξισώσεις ή ανισώσεις, βάζουμε από την αρχή τους απαραίτητους περιορισμούς και στο τέλος **επαληθεύουμε** (ή συναληθεύουμε) τις λύσεις μας.

12. Όλες τις προτάσεις που θα χρησιμοποιήσεις στη λύση μιας άσκησης, να θυμάσαι ότι τις έχεις ήδη χρησιμοποιήσει δεκάδες φορές. Μην ανακαλύψεις δικό σου θεώρημα, όσο προφανές και να φαίνεται. Στηρίξου στα γνωστά. **Ναι στη φαντασία, όχι στην αυθαιρεσία !!!**

13. Να κοιτάς συνεχώς τα συμπεράσματα από τα προηγούμενα ερωτήματα, όλα όμως τα προηγούμενα ερωτήματα. Μπορεί πχ το Γ4 να βασίζεται στο Γ1 και το Γ1 θα έχει ξεχαστεί όσο εσύ μελετάς τα ενδιάμεσα ερωτήματα.

14. Αν το συμπέρασμα κάποιου ερωτήματος το αποδείξεις σε άλλο ερώτημα, να το αναφέρεις. Μπορεί πχ να μην λύσεις το Δ1, αλλά μέσα στο Δ3 να το λύσεις ακολουθώντας άλλη πορεία. Μπορείς στο γραπτό σου αυτό να το αναφέρεις βάζοντας έναν αστερίσκο.

15. Δεν εγκαταλείπουμε κανένα απολύτως ερώτημα. Ακόμα και εκεί που όλα δείχνουν σκοτεινά, κάνε στον εαυτό σου την ερώτηση :

<< Τι μπορώ να γράψω για να πάρω μια μονάδα ; >>.

Θα διαπιστώσεις ότι ερμηνεύοντας τα δεδομένα και τα ζητούμενα μπορείς να φτάσεις να πάρεις ακόμα και τις μισές μονάδες, χωρίς να έχεις λύσει το δύσκολο σημείο της άσκησης. Είναι προφανές ότι στο καθαρό αφήνουμε όλη μας την προσπάθεια. Μην βάζεις Χ(διαγραφή) σε αυτά που έχεις γράψει, αν δεν βρεις κάτι καλύτερο. Μπορεί σε αυτά που έχεις γράψει να έχεις κάνει μεγάλο βήμα για τη λύση της άσκησης και να μην το έχεις καταλάβει. Ο βαθμολογητής όμως θα το δει και θα σε ανταμείψει !

16. Αν δεις ΘΕΜΑ με διάγραμμα ή πρόβλημα(ακροτάτων ή ρυθμού μεταβολής) κάνε ακριβώς ό,τι έχεις μάθει στο μάθημα. Μη βιάζεσαι. Διάβασε πολλές φορές την εκφώνηση. Φτιάξε καλό σχήμα, αν δεις ότι βοηθάει. Βάλε σωστές μεταβλητές(αν και θα τις λέει ίσως το πρόβλημα). Αυτά τα θέματα, αν δεν τα φοβηθείς και έχεις λύσει πέντε από το καθένα, δεν τα χάνεις σχεδόν ποτέ ! Πάρε το σχολικό βιβλίο σου με το βοήθημα και λύσε μόνος σου αυτά που έχεις κάνει στο μάθημα. Δες

και τα ερωτήματα από παλιότερες εξετάσεις. Το μόνο δύσκολο για όλα αυτά είναι να βρεις 3 δίωρα για μελέτη . Μπορείς όμως να τα βρεις και σίγουρα αξίζει τον κόπο !

Γενικές παρατηρήσεις

1. Μοίρασε σωστά το χρόνο σου ! Αφιέρωσε για κάθε ερώτημα τουλάχιστον 5 λεπτά, όσο δύσκολο ή απροσπέλαστο και να σου φαίνεται. Προσπάθησε και από αυτό να πάρεις μία τουλάχιστον μονάδα. Αν διαπιστώσεις ότι το ερώτημα δεν προχωράει άλλο και περάσουν 15 λεπτά, προχώρα στο επόμενο και γυρίζεις σε αυτό στο τέλος, αφού πρώτα προσπαθήσεις όλα τα άλλα ερωτήματα.
2. Ελέγχουμε αν έχουμε περάσει όλες μας τις λύσεις στο καθαρό. Α! Να τονίσουμε ξανά ότι γράφουμε απευθείας στο καθαρό και στο τέλος του τετραδίου (είναι το πρόχειρο) κάνουμε ίσως κάποιον έλεγχο για δεύτερη φορά τις πράξεις κλπ. Τις χρήσιμες πράξεις να τις κάνεις στο καθαρό.
3. Αν νομίζεις ότι στο πρόχειρο έχεις αφήσει σωστές προσπάθειες που δεν προλαβαίνεις να τις περάσεις μπροστά, γράψε πάνω σε αυτές τις προσπάθειες σε ποιο ερώτημα αναφέρονται, σβήσε τα τελείως περιττά μέρη και πες στον επιτηρητή ότι τελειώνεις στο τέλος του τετραδίου. Εκεί να υπογράψει. Ο βαθμολογητής θα βρει κάθε σου σωστή προσπάθεια και θα την αξιολογήσει.
4. Κάθε είκοσι λεπτά και όπου δίνεται ευκαιρία, να σηκώνεις το κεφάλι από το τετράδιο, να ξεκουράζεις λίγο τα μάτια σου, να πίνεις λίγο νερό, να πας στην τουαλέτα, αν χρειαστεί ή να πάρεις ένα παυσίπονο, αν αισθανθείς πονοκέφαλο.
5. Την προηγούμενη των εξετάσεων να έχεις κοιμηθεί σχετικά νωρίς. Να πάρεις καλό πρωινό και να βάλεις τα σωστά ρούχα. Να έχεις μαζί σου ένα μπουκάλι νερό και ένα ήπιο επιτρεπτό παυσίπονο.
6. Πάρε μαζί σου δύο στυλό ίδιου χρώματος, ένα καλό μολύβι και έναν χάρακα αλλά και διαβήτη για τα σχήματα.
7. Το κινητό ίσως δεν είναι απαραίτητο. Αν ξεχάσεις να το παραδώσεις και χτυπήσει την ώρα της εξέτασης, το γραπτό σου μηδενίζεται. Κανένα ηλεκτρονικό εξάρτημα να μην έχεις πάνω σου.
8. Στο χρόνο αναμονής για τα θέματα, μέσα ή έξω από την τάξη, και μέχρι να πάρεις τη φωτοτυπία με τις ερωτήσεις, να είσαι ήρεμος. Μην ανοίγεις το βιβλίο ούτε να ακούς τους άλλους να κάνουν προφητείες τι θα πέσει και αγχωθείς. Μην ακούς τίποτα σχετικά με τις εξετάσεις και πιάσε κουβέντα με φίλους σου για άλλα ζητήματα, ευχάριστα και αισιόδοξα. Όμως, ...*να κρατάς την απόσταση !*
9. Την ώρα της εξέτασης να γράψεις τα στοιχεία σου σωστά, χωρίς λάθη. Να ακούς τις οδηγίες των επιτηρητών. Αν έρθει διόρθωση, να την περάσεις πάνω στα θέματά σου, ώστε να μην την ξεχάσεις.
10. Αν την ώρα που γράφεις αισθανθείς ότι κάτι σε ενοχλεί, ο ανεμιστήρας ή το ανοικτό παράθυρο ή κάποιος θόρυβος, να το πεις με ευγένεια στον επιτηρητή και αυτός θα το τακτοποιήσει.
11. Μπορεί σε κάποιο μάθημα να μην τα πας τόσο καλά όσο θα ήθελες ή όσο θα περίμενες. Δεν πειράζει, μην το σκέφτεσαι καθόλου. Επικεντρώσου με πείσμα στο επόμενο μάθημα και μην κοιτάζεις πίσω. Μόνο αν τελειώσει και το τελευταίο μάθημα κερδίζεται ο πόλεμος !

Ειδικές παρατηρήσεις στα Μαθηματικά

Σε μορφή ...μυθιστορήματος

Οι σημειώσεις που έχει κρατήσει ένας Υποψήφιος .

Τι θα συναντήσω στα μαθηματικά !

Παρακάτω υπάρχουν τα πιο βασικά είδη ασκήσεων που πρέπει να γνωρίζω, αλλά και ειδικές παρατηρήσεις. Τις συγκέντρωσα στη διάρκεια της χρονιάς, για να τις μελετήσω στην επανάληψη και κυρίως τις τελευταίες μέρες. Σε κάθε μου απορία πρέπει να ανατρέχω στο τετράδιο, στο βοήθημα ή στον καθηγητή μου. Είναι αδύνατο να περιγράψω ή να συγκεντρώσω εδώ τα τόσα πολλά και σημαντικά σημεία που έχω μάθει στο μάθημα μέσα σε μια ολόκληρη χρονιά, αλλά αυτά είναι, ανάμεσα στα άλλα, μερικά πράγματα που σίγουρα μπορώ να κάνω στις εξετάσεις ή που πρέπει να προσέξω λίγο πιο πολύ. Να λοιπόν τι ξέρω και τι μπορώ να κάνω με σιγουριά. Ελπίζω εσείς να ξέρετε πολύ περισσότερα :

1. Να ορίζω τη σύνθεση , το πηλίκο , το γινόμενο δύο συναρτήσεων καθώς και την αντίστροφη μιας συνάρτησης.
2. Να εξετάζω αν δύο συναρτήσεις είναι ίσες.
3. Να γράφω μια συνάρτηση ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων. Αυτό είναι λίγο δύσκολο, αλλά έχω στο τετράδιο των έξυπνων ερωτημάτων παράδειγμα και θα το μελετήσω και δυο μέρες πριν τις πανελλαδικές.
4. Να βρίσκω τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων και τη σχετική τους θέση.
5. Να βρω το πρόσημο μιας συνάρτησης. Πέραν των γνωστών μεθόδων (με πίνακα) από προηγούμενες τάξεις , το πρόσημο το βρίσκω εύκολα αν γνωρίζω τη μονοτονία και τη ρίζα της συνάρτησης σε ένα διάστημα. Τη ρίζα πολλές φορές την εντοπίζω με παρατήρηση.

- 6.** Να υπολογίζω όρια της μορφής $\frac{0}{0}$ ή $\frac{k \neq 0}{0}$ ή $\infty - \infty$ κλπ (Να ξέρω όλες τις κατηγορίες και ειδικά την μηδενική (επί) φραγμένη, όπου εφαρμόζω κριτήριο παρεμβολής)
- 7.** Να βρω παραμέτρους ώστε ένα όριο να είναι πραγματικός αριθμός ή να έχει μια δεδομένη τιμή. Αν το x τείνει σε αριθμό, λύνω ως προς τον αριθμητή. Αν όμως τείνει σε άπειρο, τότε παίρνω χωριστά τις περιπτώσεις που μηδενίζονται οι φαινόμενοι ως μεγιστοβάθμιοι όροι.
- 8.** Να χρησιμοποιώ ένα όριο για να βρω ένα άλλο (η συνάρτηση κρύβεται, οπότε θέτω...).
- 9.** Να βρω την τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα σημείο, βρίσκοντας το όριό της ή το αντίστροφο. Μερικές φορές διαιρώ μια ανισότητα με θετικό ή αρνητικό παράγοντα, παίρνω όρια και βρίσκω δύο σχέσεις $f(a) \geq \beta, f(a) \leq \beta$ και έτσι $f(a) = \beta$
- 10.** Να χρησιμοποιώ τον ορισμό της συνέχειας και της παραγώγου για να υπολογίσω ένα όριο (Συνήθως θέτουμε. Το περιμένω ως θέμα και να το προσέξω).
- 11.** Να εφαρμόζω υπαρξιακό θεώρημα (Bolzano, Rolle, ΘΜΤ, ΘΕΤ, ΘΜΕΤ) για την απόδειξη ύπαρξης αριθμού ή λύσης μιας εξίσωσης (Να ξέρω όλες τις περιπτώσεις).
- 12.** Να λύνω άσκηση με εφαπτομένες. Θυμάμαι ότι πρέπει να χρησιμοποιήσω την τετμημένη του σημείου επαφής, είτε την ξέρω είτε όχι, τη ζητάνε ή δεν την ζητάνε !
- 13.** Να γράφω, αν χρειαστεί, τις δύο συνθήκες για να έχω κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο ή μια ευθεία να εφάπτεται σε γραφική παράσταση γνωστής συνάρτησης. Για παράδειγμα για να εφάπτεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$, πρέπει και αρκεί να ισχύουν οι σχέσεις :
- $$f'(x_0) = \alpha \text{ και } f(x_0) = \alpha x_0 + \beta$$
- 14.** Να παραγωγίζω μία ή δύο φορές συνάρτηση, να βρω τις ρίζες της παραγώγου και το πρόσημό της. Είναι ερώτημα που θα το έχω με απόλυτη βεβαιότητα. Ο μεγάλος κίνδυνος είναι να κάνω επιπόλαιο λάθος στις πράξεις. Στη δεύτερη παράγωγο συνάρτησης πηλίκo,

πριν κάνω πράξεις, να βγάλω κοινό παράγοντα τον παρονομαστή. Θα γλυτώσω πολλές πράξεις.

- 15.** Να βρίσκω μονοτονία, ακρότατα, σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \beta$. Αν δεν είμαι βέβαιος πώς θα λύσω τέτοιο ερώτημα, μάλλον δεν πάω στις εξετάσεις !!!
- 16.** Να αναγνωρίζω, να καταλάβω δηλαδή, ότι πρέπει να εφαρμόσω το θεώρημα Fermat σε άσκηση εύρεσης παραμέτρου.
- 17.** Να λύνω προβλήματα στο ρυθμό μεταβολής και στα ακρότατα. Είναι ερωτήματα που έχουν συγκεκριμένη τεχνική. Αν ξέρω τρία από το κάθε είδος, θα λύσω και οποιοδήποτε άλλο.
- 18.** Να λύνω εξίσωση ή ανίσωση. Δεν ξεχνάω ότι πιθανόν πρέπει να τη φέρω στη μορφή $f(g(x)) = f(h(x))$ με γνησίως μονότονη συνάρτηση f . Να προσέξω αν έχω εξίσωση της μορφής $f(g(x)) = \beta$ και το β είναι το ακρότατο της f που παρουσιάζεται μόνο στη θέση a . Η εξίσωση τότε γίνεται : $f(g(x)) = \beta \Leftrightarrow g(x) = a$. Να θυμηθώ επίσης ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ γίνεται ισοδύναμα $f(x) = x$. Λύνω εκείνη από τις δύο που είναι η ευκολότερη.
- 19.** Να αποδεικνύω ανισότητα. Θα χρησιμοποιήσω ή το ακρότατο της συνάρτησης ή θα κάνω μελέτη τη συνάρτηση της διαφοράς ή θα κάνω ΘΜΤ σε κατάλληλη συνάρτηση σε κατάλληλο διάστημα, που θα καταλάβω από τη μορφή της ανίσωσης. Αν δω διπλή ανισότητα μάλλον είναι για ΘΜΤ, ειδικά αν την γράψω στη μορφή $A < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < B$.
- 20.** Να βρίσκω τον τύπο συνεχούς ή παραγωγίσιμης συνάρτησης που έχει κάποια ιδιότητα. Να θυμηθώ ότι αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα και δεν μηδενίζεται, τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο σε αυτό το διάστημα. Αν μηδενίζεται σε ένα σημείο, περιμένω τέσσερις συναρτήσεις.
- 21.** Να χρησιμοποιώ **βοηθητική συνάρτηση**. Θα το κάνω σίγουρα για εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano ή Rolle, αφού φέρω όλους τους όρους στο 1^o μέλος (και διώξω ίσως ανεπιθύμητους παρονομαστές). Θα χρησιμοποιήσω βοηθητική συνάρτηση επίσης, αν δεν μπορώ να βρω τις ρίζες της παραγώγου f' και έχω κλάσμα (αλλιώς προχωράω στην f). Αν

πάρω πχ βοηθητική τον αριθμητή $g(x)$ της f' , τότε μελετάω την g και βρίσκω το πρόσημό της. Να κάνω ξανά ένα παράδειγμα τρεις μέρες πριν πάω στις εξετάσεις.

22. Να εξάγω συμπεράσματα από διάγραμμα και να βρω μονοτονία, ρίζες, πλήθος ριζών, σύνολο τιμών, όρια κλπ. Το περιμένω θέμα και για αυτό θα λύσω όσα ερωτήματα έχουν πέσει μέχρι τώρα στις εξετάσεις αλλά και τα άλλα από το βοήθημά μου.

23. Στη θεωρία ξέρω καλά όλες τις διατυπώσεις και τις περιπτώσεις που θέλουν αντιπαράδειγμα.

24. Αν η συνάρτηση έχει παράμετρο και τα ακρότατα εκφράζονται συναρτήσει της παραμέτρου, μπορεί να ζητηθούν οι τιμές της παραμέτρου, ώστε το ακρότατο να είναι μέγιστο ή ελάχιστο. Αρκεί να μελετήσω τη συνάρτηση του ακροτάτου με μεταβλητή την παράμετρο!

25. Αν χρειαστώ το πεδίο ορισμού της αντίστροφης, είναι προτιμότερο τις περισσότερες φορές να το βρω από τη μονοτονία, τη συνέχεια και τα όρια, παρά απαιτώντας η εξίσωση $f(x) = y$ να έχει λύση ως προς x στο πεδίο ορισμού A της f .

26. Συνήθως το ΘΜΤ το εφαρμόζω στη δοσμένη συνάρτηση f που ξέρω από τα δεδομένα του προβλήματος (μένει σε μένα να βρω το διάστημα!), ενώ το θεώρημα Bolzano και Rolle θέλουν συχνά βοηθητική συνάρτηση, που τη βρίσκω με τον γνωστό τρόπο (Να τον θυμηθώ από τις εφαρμογές που έχω στο τετράδιό μου ή στο βοήθημα).

27. Όλες οι ασκήσεις με εφαπτομένες, για να λυθούν σωστά, πρέπει να εμπλέξουν το σημείο επαφής, είτε είναι γνωστό, είτε άγνωστο, είτε μας το ζητάνε είτε όχι! Να θυμάσαι ότι για να έχουν δύο συναρτήσεις f, g κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο με τετμημένη x_0 , πρέπει και αρκεί να ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις:

$$f(x_0) = g(x_0) \text{ και } f'(x_0) = g'(x_0)$$

Αν αντί για την g έχω την ευθεία (ε) με εξίσωση $y = ax + \beta$, τότε για να εφάπτεται η ευθεία (ε) με την γραφική παράσταση της f , πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x_0) = ax_0 + \beta \text{ και } f'(x_0) = a$$

Στην ουσία οι τελευταίες σχέσεις προκύπτουν από τις πρώτες και αυτό μου το έχει εξηγήσει ο καθηγητής μου πολλές φορές.

28. Είναι φανερό ότι άσκηση με διερεύνηση ορίου δεν πρέπει να με δυσκολέψει. Έχω λύσει αρκετές τέτοιες. Ακόμα και στο σχολικό βιβλίο μια ματιά θα βοηθήσει. Αν πχ $x \rightarrow x_0$, τότε θέτω τη συνάρτηση του ορίου $g(x)$, λύνω ως προς τον αριθμητή και παίρνω (ποτέ με ισοδύναμο) όρια και στα δύο μέλη. Αν όμως $x \rightarrow \pm\infty$, τότε κάνω τη διερεύνηση στους συντελεστές των φαινομενικά μεγιστοβάθμιων όρων του κλάσματος.

29. Αν σε μια συνάρτηση βρω ότι έχει παράγωγο ίση με μηδέν, δεν πρέπει να βιαστώ να πω ότι είναι σταθερή. Αν το πεδίο ορισμού δεν είναι διάστημα, τότε θα είναι σταθερή στο κάθε διάστημα (βάζω αρχικά διαφορετικές σταθερές για το κάθε διάστημα και μετά τις υπολογίζω).

30. Αν μου ζητήσουν να βρω τη μονοτονία της f' , θα βρω την f'' , το πρόσημό της και θα κατασκευάσω πίνακα προσήμου της f'' και μονοτονίας της f' . Προσέχω στον πίνακα να βάλω με διπλή γραμμή και τα ανοικτά άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της f . Το ίδιο θα κάνω αν μου ζητήσουν να βρω τα διαστήματα, στα οποία ο ρυθμός μεταβολής της f αυξάνει ή μειώνεται ή ακόμα το σημείο της C_f με την μεγαλύτερη ή τη μικρότερη κλίση.

Η πιο δύσκολη περίπτωση είναι να μου ζητήσουν να αποδείξω ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης με παράλληλες εφαπτομένες. Τι θα κάνω; Θα βρω την f'' και θα αποδείξω ότι αυτή διατηρεί πρόσημο στο εν λόγω διάστημα. Έτσι η f' είναι γνησίως μονότονη, και συνεπώς 1-1. Αλλιώς, αν δεν έχω διάστημα, πρέπει να αποδείξω ότι η f' είναι 1-1. Επομένως, σε κάθε περίπτωση, δεν θα υπάρχουν τέτοια σημεία.

31. Αν μου δοθεί κάποιο όριο και ζητηθούν άλλα, τότε θα θέσω τη συνάρτηση του ορίου $g(x)$ και θα πάρω από αυτήν όποιο μέρος χρειάζομαι, θα το αντικαταστήσω και θα βρω έτσι τα ζητούμενα όρια. Δεν ξεχνάω ποτέ τον ορισμό της συνεχούς και παραγωγίσιμης συνάρτησης, αφού από αυτά βρίσκω χρήσιμα όρια ή τιμές. Αυτή η εναλλακτική μορφή με το $h \rightarrow 0$ είναι πολύ ιδιόμορφη και την προσέχω. Για παράδειγμα, η f είναι συνεχής στο x_0 , αν και μόνο αν

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

32. Να ξέρω ένα καλό παράδειγμα που να δείχνει πώς μια σύνθετη συνάρτηση τη γράφουμε ως σύνθεση άλλων συναρτήσεων. Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση και αυτό μπορεί να είναι μια καλή αιτιολόγηση σε κάποιο ερώτημα που αφορά στη συνέχεια.

33. Όταν βρίσκω όριο και κάνω αλλαγή μεταβλητής(πχ όταν θέτω), τότε να προσέχω πχ το εξής: Αν $\frac{1}{x} = u$ και $x \rightarrow +\infty$, τότε $u \rightarrow 0^+$, ενώ αν $x \rightarrow -\infty$, τότε $u \rightarrow 0^-$. Με άλλα λόγια

το νέο όριο είναι πλευρικό και αυτό μπορεί να βοηθήσει σημαντικά.

Αντί του x μπορεί να είναι μια συνάρτηση με άπειρο όριο.

34. Ενώ μπορώ να παραγωγίσω μια ισότητα με (παραγωγίσιμες) συναρτήσεις, **δεν παραγωγίζω ποτέ ανισότητα**. Επίσης, μπορώ να αντιπαραγωγίσω μια ισότητα(και δεν ξεχνώ να βάλω στο 2^ο μέλος τη σταθερά : +c), δεν μπορώ όμως να αντιπαραγωγίσω ανισότητα. Σε ανισότητα με παραγώγους φέρνω όλους τους όρους στο α' μέλος, θεωρώ την συνάρτηση που έχει παράγωγο το 1^ο μέλος, βρίσκω τη μονοτονία της(από την ανισότητα που έχω) και εφαρμόζω σε αυτή τη συνάρτηση τον ορισμό της μονοτονίας.

35. Να θυμάμαι ποιες βοηθητικές προτάσεις έχω ως θεωρία που δεν τις έχει το σχολικό, αλλά οι οδηγίες για το μάθημα. Πχ : $e^x \geq x + 1$ με την ισότητα μόνο για $x = 0$ κλπ. Επίσης ξέρω τις ανισότητες $\ln x \leq x - 1$ με ισότητα για $x = 1$ και την $|\sin x| \leq |x|$ με ισότητα μόνο για $x = 0$.

36. Αν για μια συνάρτηση μου δοθεί ο περιορισμός $f(x) \neq 0$ σε ένα διάστημα, τότε πιθανόν να χρειαστεί να πω ότι διατηρεί πρόσημο (αν επιπλέον είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό) ή να διαιρέσω κάποια ισότητα με $f(x) \neq 0$ κλπ. Ο περιορισμός $f(x) > 0$ μπορεί να με βοηθήσει να πάρω λογάριθμο($\ln f(x)$) ή να δημιουργήσω το κλάσμα $\frac{f'(x)}{f(x)}$ και να γράψω

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln |f(x)|)' = (\ln f(x))'.$$

Αν μου δοθεί ότι $f'(x) \neq 0$ σε ένα διάστημα και η f είναι

παραγωγίσιμη, τότε η συνάρτηση αυτή έχει αντίστροφη (το αποδεικνύω με άτοπο : αν όχι, τότε υπάρχουν $x_1 < x_2$ με $f(x_1) = f(x_2)$). Εφαρμόζω το θεώρημα Rolle και καταλήγω σε άτοπο, αφού $f'(x) \neq 0$).

37. Να διαβάζω τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις που κάποιες παραστάσεις είναι οι παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων ή παράγωγος γινομένου ή πηλίκου. Πχ είναι

$$f(x)f'(x) = \left(\frac{f^2(x)}{2}\right)', \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln |f(x)|)', \quad \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left(-\frac{1}{f(x)}\right)', \quad e^{f(x)}f'(x) = (e^{f(x)})', \quad \text{κλπ}$$

38. Αν έχω όριο πηλίκου και παρουσιάζονται δύο ή περισσότεροι απειριζόμενοι όροι(με ή χωρίς απροσδιοριστία), βγάζουμε σε κάθε όρο του κλάσματος μπροστά τον πιο δυνατό απειριζόμενο όρο, ώστε αυτοί οι όροι που μείνουν ή δημιουργούνται μέσα στην παρένθεση να έχουν όριο μηδέν. Ανάλογα εργαζόμαστε συχνά και όταν δεν έχουμε πηλίκο αλλά εμφανίζεται απροσδιοριστία ή τριγωνομετρικός όρος. Επειδή θα έχω μορφή $\frac{\infty}{\infty}$ σε πολλά κλάσματα, δεν παραλείπω να αξιοποιήσω τον κανόνα DLH όπου εφαρμόζεται.

39. Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f , ορισμένη σε ανοικτό διάστημα Δ , έχει σύνολο τιμών της μορφής $[k, +\infty)$, τότε αυτό δηλώνει ότι η συνάρτηση έχει ελάχιστο (το k) και έτσι θα συμπεράνω από το θεώρημα Fermat ότι υπάρχει x_0 στο διάστημα Δ , ώστε $f'(x_0) = 0$. Η συνάρτηση f έχει λοιπόν κρίσιμο σημείο.

Αν η παράγωγος τώρα είναι γνησίως μονότονη στο Δ , τότε το x_0 (που είναι ρίζα της παραγώγου) είναι μοναδικό και επιπλέον θα είναι $f(x_0) = k$. Μπορώ τώρα, αφού η παράγωγος είναι γνησίως μονότονη, να βρω και τη μονοτονία της f . Αριστερά από το x_0 θα είναι γνησίως φθίνουσα και δεξιά γνησίως αύξουσα. Μα θα φτιάξω έναν πίνακα και όλα αυτά θα είναι προφανή! Επιπλέον η εξίσωση $f(x) = k$ θα έχει στο Δ μοναδική ρίζα την x_0 . Σε ανάλογα συμπεράσματα για την ύπαρξη κρίσιμων σημείων, καταλήγω αν έχω κλειστό διάστημα και τα ολικά ακρότατα δεν παρουσιάζονται στα άκρα.

Να τονίσω όμως ότι γενικά δεξιά –αριστερά από μια θέση ακροτάτου δεν είναι απαραίτητο να αλλάζει η μονοτονία. Είναι εκείνο το περίεργο σχήμα που μας έδειξε ο καθηγητής μας.

40. Είναι ύπουλο, αλλά το έχω καταλάβει. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα Δ έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Για αυτό όταν μου ζητάνε, ακόμα και σε πρόβλημα μέγιστη ή ελάχιστη τιμή, δεν πρέπει να παραλείψω να εξετάσω και τις τιμές στα άκρα, αν το διάστημα είναι κλειστό.

Έστω τώρα ότι η συνάρτηση παραγωγίζεται στο εσωτερικό του Δ . Αν ένα από τα ολικά ακρότατα δεν παρουσιάζεται σε άκρο του διαστήματος Δ , τότε από το θεώρημα Fermat η παράγωγος μηδενίζεται σε αυτό το σημείο. Επομένως η συνάρτηση μπορεί να έχει και άλλο τοπικό ακρότατο, σε κάποιο άκρο του διαστήματος Δ *ίσως*. Αυτό όμως θα το δω από τον πίνακα μονοτονίας.

41. Αν θέλω να βρω το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης της μορφής $f(x) = 0$, τότε - με μελέτη - θα βρω τα διαστήματα μονοτονίας της f , τις εικόνες τους μέσω της f και θα εξετάσω σε πόσες από αυτές τις εικόνες ανήκει το 0 (ή το β , αν έχω εξίσωση της μορφής $f(x) = \beta$). Προσέχω όμως να μην μετρήσω κάποια ρίζα δύο φορές κάτι που συμβαίνει ίσως μόνο αν κάποιο άκρο μιας εικόνας $f(\Delta)$ είναι το 0.

Αν θέλω να βρω σε πόσα σημεία έχει τοπικά ακρότατα η f κάνω το ίδιο με το παραπάνω, αλλά για την $g = f'$, βρίσκοντας δηλαδή το πρόσημο της g' . Στην τελευταία γραμμή του πίνακα μπορώ να έχω την $g = f'$. Προφανώς η f' θα αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ριζών της (ως γνησίως μονότονη στο κάθε διάστημα) και έτσι στις ρίζες της f' θα έχω τοπικά ακρότατα για την f . Είναι πρακτικό να ονομάζω την $f' = g$ και να μελετάω την g . Δεν υπάρχει λόγος να μπλέξω με πολλούς ...τόνους.

Ακριβώς την ίδια διαδικασία εφαρμόζω αν θέλω να βρω το πλήθος των θέσεων των σημείων καμπής μιας συνάρτησης f . Μιλάμε για δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Βρίσκω δηλαδή σε πόσες ρίζες έχει η συνάρτηση $g = f''$, στις οποίες όμως η g αλλάζει πρόσημο.

Είναι πρακτικό να ονομάζω την $f'' = g$ και να μελετάω την g .

42. Αν για μια συνάρτηση ξέρω τη μονοτονία σε ένα διάστημα και τη ρίζα της, τότε μπορώ να βρω το πρόσημό της. Πρόκειται για σπουδαία παρατήρηση με πολλές εφαρμογές.

43. Η μονοτονία μιας συνάρτησης είναι μεγάλη πληροφορία. Με βάση λοιπόν τη μονοτονία μπορώ να λύσω εξισώσεις ή ανισώσεις (αρκεί τις φέρω στη μορφή $f(g(x)) = f(h(x))$ ή $f(g(x)) < f(h(x))$) αλλά και να εφαρμόσω τον ορισμό της μονοτονίας για να αποδείξω ανισότητες. Προσέχω πιο πολύ όταν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, μια και η φορά αλλάζει στην εφαρμογή του ορισμού της μονοτονίας ή στο αντίστροφο.

44. Θυμάμαι πολύ καλά ότι ανισότητες αποδεικνύω ή με τον ορισμό της μονοτονίας ξεκινώντας από γνωστή ανισότητα ή με μελέτη και εύρεση του ολικού ακροτάτου μιας κατάλληλης συνάρτησης ή με ΘΜΤ, ειδικά αν η ανισότητα είναι διπλή ή συνθετικά (πιο δύσκολη περίπτωση). Μερικές φορές, αν η ανισότητα έχει δυνάμεις και γινόμενα, μετασχηματίζεται σε σχέση της μορφής $f(x) \leq f(a)$ ή $f(x) \geq f(a)$ και έτσι μελετάω την f ως προς τα ολικά ακρότατα.

45. Καλά, αν στα δεδομένα έχω ανισότητα και ζητάω ισότητα, τότε το Fermat είναι το θεώρημα που με τίποτα δεν θα ξεχάσω. Για παράδειγμα, αν για την f ξέρω ότι (α) είναι γνησίως φθίνουσα και (β) $f(a^x) \leq f(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (όπου $a > 0$), τότε μπορώ να αποδείξω ότι $a = e$. Προφανώς θα πάρω τη συνάρτηση $g(x) = a^x - x - 1$ και με βάση το θεώρημα του Fermat (η g πληροί τις προϋποθέσεις στο 0) θα πάρω ότι $g'(0) = 0$ κλπ. Δεν ξεχνάω ότι η θέση ακροτάτου πρέπει να είναι εσωτερικό σημείο διαστήματος και όχι άκρο ή κάτι άλλο.

46. Δεν ξεχνάω ότι σε ασκήσεις εύρεσης παραμέτρων, ειδικά σε ακρότατα, χρειάζεται επαλήθευση, διότι το Fermat –συνήθως αυτό χρησιμοποιούμε– εξασφαλίζει αναγκαία συνθήκη, όχι όμως και ικανή. Το ίδιο χρειάζεται μερικές φορές και σε παραμετρικά όρια, όταν θέλουμε αυτά να είναι πραγματικοί αριθμοί ή να έχουν μια συγκεκριμένη τιμή. Α! Και σε ασκήσεις που μου ζητάνε παράμετρο για να έχω δοσμένο σημείο καμπής, πάλι πρέπει να κάνω επαλήθευση, διότι το αντίστροφο του σχετικού θεωρήματος δεν ισχύει.

47. Οι ασκήσεις στην ανάλυση γενικά χωρίζονται σε μεγάλες κατηγορίες με παρόμοιο περίπου τρόπο αντιμετώπισης:

(α) Υπαρξιακά θέματα (β) Εξισώσεις –ανισώσεις (γ) Ανισότητες (δ) Προβλήματα σε ρυθμό μεταβολής ή σε ακρότατα (ε) Διαγράμματα (ε) Πλήθος ριζών, πλήθος ακροτάτων (στ) Εφαπτομένες σε σημείο, από σημείο, σε κοινό σημείο, σε μη κοινά σημεία. (ζ) Όρια. (η) Θέματα εύρεσης στο γενικό μέρος, στη συνέχεια και στην παράγωγο.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση που θα βλέπω μια άσκηση, θα προσπαθώ να την εντάξω, αν χρειαστεί, σε κάποια από αυτές τις ομάδες, ώστε να κάνω πρώτα όλες τις βασικές ενέργειες που κάνουμε στις ασκήσεις της ίδιας ομάδας και μόνο μετά θα προχωρήσω σε τεχνάσματα ή στην ανάκληση άλλων μεθόδων από τη λύση παρόμοιων ασκήσεων.

48. Αν μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ έχει ελάχιστο(ή μέγιστο) στο $x_0 \in \Delta$ και ένα από τα όρια της f είναι άπειρο, τότε δεν χρειάζεται να βρω και το όριο στο άλλο, αφού το σύνολο τιμών θα είναι το $f(\Delta) = [f(x_0), +\infty)$ (αντίστοιχα το $f(\Delta) = (-\infty, f(x_0)]$).

49. Ξέρω επίσης ότι εξισώσεις της μορφής $f^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμες με την εξίσωση $f(x) = x$. Όμως σε ανισώσεις τέτοιας μορφής χρειάζεται ειδική διερεύνηση και δεν ισχύει το ίδιο. Δεν συνθέτουμε δηλαδή στα δύο μέλη την f , αλλά θέλει και άλλες παρατηρήσεις. Το

έχω κάνει στο μάθημα σε μια άσκηση. Θυμάμαι ότι όλοι μας το είχαμε λύσει λάθος μέχρι να μας το πει ο καθηγητής μας.

- 50.** Μια ιδιαίτερη μορφή εξισώσεων της μορφής $f(x) = g(x)$ λύνονται ως εξής : Βρίσκω $\pi\chi$ ότι $f(x) \leq k$ με την ισότητα να ισχύει **μόνο** για $x = a$ και $g(x) \geq k$ με την ισότητα να ισχύει (τουλάχιστον) για $x = a$. Τότε η εξίσωση αυτή έχει μοναδική ρίζα την $x = a$, αφού για όλες τις άλλες τιμές του x θα ισχύει ότι $f(x) < g(x)$. Φυσικά, το ίδιο θα ισχύει αν αποδείξω ότι $f(x) \geq k \geq g(x)$ και το ίσον ισχύει συγχρόνως μόνο για μία τιμή του x , την $x = a$.
- 51.** (α) Η εύρεση των ασυμπτωτών είναι υπόθεση εύρεσης ορίων. Το πεδίο ορισμού συχνά μου δείχνει τις πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες. Είναι στα ανοικτά άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού και στα σημεία ασυνέχειας. Αν το πεδίο ορισμού έχει είναι ένωση διαστημάτων με πραγματικά άκρα, δεν έχει νόημα να ψάξω για ασύμπτωτες στα άπειρα, δηλαδή για οριζόντιες ή για πλάγια ασύμπτωτη.
- (β) Αν μου ζητήσουν τον ορισμό της ασύμπτωτης της μορφής $y = ax + \beta$ στο $+\infty$, δεν γράφω τους τύπους που βρίσκουμε τα a και β , αλλά τον ορισμό με το όριο (...).
- (γ) Όταν ξέρω τις ασύμπτωτες, μπορώ να τις μεταφράσω σε όρια. Με άλλα λόγια, από την γνώση των ασύμπτωτων μπορώ να υπολογίζω μερικά χρήσιμα όρια, τόσο σε σημείο όσο και στα άπειρα, ανάλογα με την ασύμπτωτη.
- 52.** Όταν εφαρμόζω τον κανόνα του DLH προσέχω να έχω τις προϋποθέσεις. Σε θεωρητικές ασκήσεις δεν πρέπει να υπερβώ τις υποθέσεις μου, γιατί μετά θα οδηγηθώ σε αδιέξοδο. Έχω σχετικό παράδειγμα στο τετράδιό μου.
- 53.** Μερικές ακόμα προτάσεις που δεν έχει το βιβλίο και μπορώ να χρησιμοποιήσω για τη λύση των ασκήσεων είναι οι παρακάτω. Είναι χρήσιμες και μπορεί να τις ρωτήσουν και σε Σωστό-Λάθος (Σ-Λ).

Χρήσιμες προτάσεις για τη λύση των ασκήσεων

Επίσημες Οδηγίες

1. i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$$

ii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2.$$

2. Έστω f, g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

i) Αν ισχύουν:

$$\alpha) f(x) \leq g(x) \text{ κοντά στο } x_0 \text{ και } \beta) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

τότε θα ισχύει και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

ii) Αν ισχύουν:

$$\alpha) f(x) \leq g(x) \text{ κοντά στο } x_0 \text{ και } \beta) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$$

τότε θα ισχύει και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x \geq x + 1$ και το ίσον (=) ισχύει μόνο για $x = 0$.

Πρόκειται για πολύ χρήσιμη πρόταση που βρίσκει εφαρμογή σε μεγάλο εύρος ασκήσεων, όχι μόνο ανισοτήτων αλλά και εξισώσεων.

4. Την ανισότητα $\ln x \leq x - 1$ την έχει το σχολικό, τη βάζω όμως και αυτή εδώ για να είναι όλες μαζί.

5. Το γινόμενο δύο συναρτήσεων μπορεί να είναι η σταθερή συνάρτηση μηδέν χωρίς καμία από τις δύο να είναι ίση με τη συνάρτηση μηδέν.

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x) = x + |x|$ και $g(x) = x - |x|$ έχουν γινόμενο μηδέν, αλλά καμία από τις δύο δεν είναι η μηδενική συνάρτηση. Συνιστάται να γίνει η γραφική τους παράσταση.

6. Αν μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα (σ_1, σ_2) έχει την ιδιότητα

$$\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow \sigma_2} f(x) = +\infty \text{ (ή } \lim_{x \rightarrow \sigma_1} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow \sigma_2} f(x) = -\infty),$$

τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

54. Αν σε ένα διάστημα Δ ισχύει $f'(x) = f(x)$, τότε $f(x) = ce^x$. Αυτή τη σχέση μπορώ να τη χρησιμοποιήσω αν θέλω να βρω τον τύπο κάποιας συνάρτησης. Για παράδειγμα, αν $2xf(x) = (x^2 + 1)(f(x) - f'(x))$ και $f(0) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε για βρω τον τύπο της f θα γράψω:

$$2xf(x) = (x^2 + 1)(f(x) - f'(x)) \Leftrightarrow (x^2 + 1)f'(x) + (x^2 + 1)f(x) = (x^2 + 1)f(x) \Leftrightarrow$$

$$((x^2 + 1)f(x))' = (x^2 + 1)f(x) \Leftrightarrow (x^2 + 1)f(x) = ce^x \Leftrightarrow f(x) = \frac{ce^x}{x^2 + 1}$$

Αλλά $f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$ και έτσι $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$. Βρείτε τώρα μόνοι σας τη μονοτονία, αν θέλετε.

55. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο Δ . Την πρόταση αυτή χρησιμοποιώ για να βρω τον τύπο συνεχούς συνάρτησης, ειδικά αν δημιουργήσω τετράγωνο ή απόλυτο τιμή. Εδώ θυμάμαι πχ ότι αν για τη συνάρτηση f έχω $f^2(x) = \ln^2 x$ και η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, τότε θα βρω τέσσερις συναρτήσεις, αφού $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, και όχι μόνο δύο. Ένας πίνακας με τις τέσσερις περιπτώσεις μου δίνει εύκολα όλες τις συναρτήσεις (έχει μπει και θέμα στις εξετάσεις).

56. Όσο για το **ΘΕΜΑ Α** πρέπει να ξέρω τέλεια :

- (α) Τους ορισμούς.
- (β) Τις διατυπώσεις όλων των θεωρημάτων και τις γεωμετρικές ερμηνείες όσων από αυτά έχουν.
- (γ) Τα θεωρήματα που δεν ισχύει το αντίστροφο και το κατάλληλο αντιπαράδειγμα, υπολογιστικό ή με διάγραμμα.
- (δ) Τις αποδείξεις όσων θεωρημάτων έχω κάνει στο μάθημα. Η απόδειξη του Θεωρήματος Fermat είναι η πιο δύσκολη και την χωρίζω σε τρία μέρη για να τη θυμάμαι.
- (ε) Τα σχόλια και τις παρατηρήσεις του βιβλίου που έχουν θέση προτάσεων και είναι χρήσιμα για τη λύση των ασκήσεων.
- (στ) Τις διατυπώσεις και τις γεωμετρικές ερμηνείες των επώνυμων θεωρημάτων. Τα θεωρήματα αυτά είναι :
 - Το θεώρημα Bolzano
 - Το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (ΘΕΤ)
 - Το θεώρημα μέγιστης ελάχιστης τιμής.

- Το θεώρημα Rolle.
- Το θεώρημα μέσης τιμής (ΘΜΤ)
- Το θεώρημα Fermat.

(§) Για την περίπτωση της αιτιολόγησης κάποιου ισχυρισμού ξέρω και μερικά βασικά σχήματα που περιέχει το σχολικό βιβλίο, κυρίως στην ενότητα των συνεχών συναρτήσεων. Θα τα μάθω και ελπίζω να μην χρειαστούν.

57. Έλεγε ο καθηγητής μας στο μάθημα ότι το ΘΜΤ είναι για τους μαθηματικούς ο Από Μηχανής Θεός σε ορισμένες περιπτώσεις ! Αυτό δεν το κατάλαβα και τόσο, αλλά αν όλα μου τα εργαλεία τελειώσουν θα προσπαθήσω να το εφαρμόσω και ό,τι βγει !

Εδώ πρέπει να σταματήσω όμως. Σας κούρασα. Δεν τελειώνουν όλα όσα έχω μάθει , όσα ξέρω και όσα έχω σημειώσει στο ειδικό τετράδιο που έχω για αυτή τη δουλειά ! Είμαι σίγουρος ότι και κάθε άλλος υποψήφιος, καθένας από σας , τα ξέρει όλα αυτά και θα έχει και πολλά άλλα να συμπληρώσει.

Θυμάμαι όμως και σας μεταφέρω, για να μην το ξεχάσω, τα λόγια του καθηγητή μου :
Στις εξετάσεις δεν πάμε να εφαρμόσουμε δύσκολα τεχνάσματα και σπάνιες τεχνικές, αλλά να αξιοποιήσουμε σε κάθε ερώτημα πρώτα τις βασικές και σημαντικές γνώσεις μας, κάνοντας νηφάλια ήρεμους συλλογισμούς και μετά τις υπόλοιπες ειδικές ενέργειες (όπως θέτω κλπ). Πάντα ξεκινάμε με τους πιο απλούς συλλογισμούς και συνεχίζουμε , ανάλογα με την άσκηση , σε πιο σύνθετους, σπάνια όμως σε πολύπλοκες και δαιδαλώδεις περιπέτειες.

Αυτά ! Για οτιδήποτε άλλο συναντήσω θα σκεφτώ ήρεμα, ψύχραιμα και θα εργαστώ μεθοδικά , ώστε να συλλέξω όσες πιο πολλές μονάδες μπορέσω , ακόμα κι αν δεν λύσω το ερώτημα μέχρι τέλος. << Αν κάνω τα λιγότερα επιτόλεια λάθη, τότε είμαι από τώρα φοιτητής. Αν δεν κάνω κανένα , τότε περνάω στην πρώτη μου προτίμηση >>. Αυτά λέει ο μαθηματικός μου , μάλλον για να μου δίνει κουράγιο, αλλά αυτός το πιστεύει γιατί μας το λέει συχνά με έμφαση και βεβαιότητα ! Καλό μου ακούγεται αυτό , πολύ αισιόδοξο και θα προσπαθήσω να το τηρήσω αλλά και να το αποδείξω στην πράξη, στις εξετάσεις δηλαδή.

Καλή επιτυχία !

Φίλοι μαθητές και φίλες μαθήτριες, σας εύχομαι ολόψυχα ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!

Ο ψύχραιμος μαθητής στις εξετάσεις :

- Δεν αφιερώνει περισσότερο χρόνο από 15' κατά μέσον όρο για κάποιο ερώτημα που παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία, εκτός κι αν έχει λύσει όλα τα υπόλοιπα.
- Γράφει κατευθείαν στο καθαρό για να μην χάνει χρόνο. Χρησιμοποιεί το πρόχειρο μόνο όταν το κρίνει απαραίτητο.
- Εξετάζει σε κάθε θέμα μήπως το συμπέρασμα κάποιου υποερωτήματος είναι σκαλί για τη λύση κάποιου από τα επόμενα ερωτήματα. Μπορούμε λοιπόν να στηριχτούμε σε κάποιο ερώτημα, έστω κι αν δεν έχει αποδειχθεί, ώστε να αποδείξουμε το επόμενο.
- Σε κάθε ερώτημα που τον δυσκολεύει κάνει την ερώτηση : τι μπορώ να γράψω για να πάρω μια τουλάχιστον μονάδα ; Για το λόγο αυτό σας προτείνουμε : να γράφετε τους τύπους , τις υποθέσεις και το συμπέρασμα των σχετικών με την άσκηση θεωρημάτων , να ερμηνεύετε τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης και να αφήνετε στην κόλλα σας κάθε προσπάθεια, ακόμα κι αν εσείς νομίζετε ότι είναι ημιτελής ή λάθος.

ΑΦΙΕΡΩΜΑ ΣΤΗΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

Στην παρούσα ενότητα επιχειρούμε να συστηματοποιήσουμε την εξεταστέα ύλη, θέτοντας ως πρώτο κριτήριο το είδος και τη μορφή των ασκήσεων. Για παράδειγμα, ασκήσεις που αναφέρονται στην εύρεση συνάρτησης συναντάμε σε πολλά κεφάλαια. Ανάλογα με το κεφάλαιο αυτό, η αντιμετώπιση των ασκήσεων γίνεται με διαφορετικό τρόπο. Στις σελίδες λοιπόν που ακολουθούν παρουσιάζονται οι πιο σημαντικές κατηγορίες θεμάτων και οι βασικότεροι τρόποι που χρησιμοποιούνται για τη λύση τους. Με την ταξινόμηση αυτή των ασκήσεων και τις εφαρμογές που τις συνοδεύουν ο μαθητής μπορεί εύκολα να συνοψίσει όλα όσα έχει συναντήσει στις επιμέρους ενότητες και να δει με ενιαίο τρόπο όσα πρέπει να εφαρμόσει στην πρώτη του επαφή με την άσκηση.

Α. ΘΕΜΑΤΑ ΕΥΡΕΣΗΣ

Αν συναντήσουμε ερώτημα, στο οποίο ζητείται η εύρεση του τύπου μιας συνάρτησης, τότε πρέπει να μην παραλείψουμε να αξιοποιήσουμε τις παρακάτω πολύ βασικές περιπτώσεις.

ΜΕΘΟΔΟΣ 1^η

Εφαρμόζουμε όλες τις μεθόδους που παρουσιάζονται στο γενικό μέρος των συναρτήσεων. Έτσι, αν π.χ. έχουμε συναρτησιακή σχέση που περιέχει δύο μεταβλητές, επιλέγουμε για αυτές συγκεκριμένες τιμές, ώστε να συλλέξουμε πληροφορίες για τη συμπεριφορά της συνάρτησης. Μπορούμε π.χ. να θέσουμε όπου y το x ή $x = y = 0$ ή $x = y = 1$ κλπ, ανάλογα με το πεδίο ορισμού, τη συνθήκη που έχει δοθεί αλλά και το ζητούμενο.

♦ Μετά την εύρεση της συνάρτησης και εφόσον η εκφώνηση είναι: "να βρεθεί η συνάρτηση ...", είναι απαραίτητη η επαλήθευση (αυτό ισχύει σε όλα τα θέματα εύρεσης, αν οι ενέργειες δεν είναι ισοδύναμες. Αν όμως η εκφώνηση είναι: "Να αποδείξετε ότι ...", τότε δεν απαιτείται επαλήθευση.

♦ Ορισμένες φορές τη συνάρτηση την βρίσκουμε από μια σχέση της μορφής $g(f(x)) = g(h(x))$, όπου g είναι μια $1-1$ συνάρτηση. Πρόκειται για την πιο απλή και έξυπνη συγχρόνως περίπτωση.

♦ Αξίζει επίσης να υπενθυμίσουμε ότι αν έχουμε μια σχέση της μορφής $f(x)g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$. Για παράδειγμα, για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x - |x|$ και $g(x) = x + |x|$ είναι:

$$f(x)g(x) = x^2 - |x|^2 = x^2 - x^2 = 0$$

χωρίς όμως κάποια από τις δύο συναρτήσεις να είναι παντού ίση με μηδέν. Για ένα όμως τυχαίο $x \in A$ ισχύει προφανώς η γνωστή μας ισοδυναμία:

$$f(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ ή } g(x) = 0$$

Παράδειγμα 1^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(0) = 0$ και:

$$2f(x) + f(1-y) + g(x) - g(y) = 3(x+1)^2 - 6y \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδειχθεί ότι:

$$\alpha) 2f(x) + f(1-x) = 3x^2 + 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\beta) f(x) = x^2 + 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\gamma) f = g.$$

Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι: } 2f(x) + f(1-y) + g(x) - g(y) = 3(x+1)^2 - 6y \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Η σχέση (1) με $y = x$ δίνει:

$$2f(x) + f(1-x) = 3(x+1)^2 - 6x = 3x^2 + 3 \quad (2)$$

β) Η σχέση (2), θέτοντας όπου x το $1-x$, δίνει:

$$2f(1-x) + f(x) = 3(1-x)^2 + 3 = 3x^2 - 6x + 6 \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε τη (2) με -2 και προσθέτουμε στην (3). Έτσι παίρνουμε:

$$-3f(x) = -6x^2 - 6 + 3x^2 - 6x + 6 \Leftrightarrow -3f(x) = -3x^2 - 6x \Leftrightarrow f(x) = x^2 + 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

γ) Με $y = 0$ η δοσμένη σχέση δίνει:

$$2f(x) + f(1) + g(x) - g(0) = 3(x+1)^2 \Leftrightarrow 2(x^2 + 2x) + 3 + g(x) = 3(x^2 + 2x + 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow g(x) = x^2 + 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι επομένως $f(x) = x^2 + 2x$ και $g(x) = x^2 + 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $f = g$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2^η

Για συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε διάστημα Δ προσπαθούμε να συμπληρώσουμε τετράγωνα και να βασιστούμε στην πρόταση:

"Συνεχείς συναρτήσεις που δεν μηδενίζονται σε ένα διάστημα, διατηρούν πρόσημο σε αυτό το διάστημα".

Αν λείπει μόνο μία τιμή της συνάρτησης, αυτή την βρίσκουμε από το όριο, δηλαδή με χρήση του ορισμού.

Παράδειγμα 2^ο

Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f με την ιδιότητα $f^2(x) = 1 + 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

Λύση

Συμπληρώνουμε το τετράγωνο προσθέτοντας στα δύο μέλη το x^2 και παίρνουμε:

$$f^2(x) = 1 + 2xf(x) \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow |f(x) - x| = \sqrt{x^2 + 1}$$

Αν θέσουμε $g(x) = f(x) - x$, παίρνουμε $|g(x)| = \sqrt{x^2 + 1} \quad (1)$.

Έτσι η g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και δε μηδενίζεται, αφού $\sqrt{x^2 + 1} \neq 0$. Επομένως η g διατηρεί πρόσημο και αφού $g(0) = f(0) = 1 > 0$, η g είναι θετική. Άρα η σχέση (1) δίνει:

$$|g(x)| = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Σχόλιο

Αν έλειπε η συνθήκη $f(0) = 1$, τότε θα παίρνουμε δύο συναρτήσεις:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα 3^ο

Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Προκύπτει αμέσως ότι για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$. Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \Leftrightarrow e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow (e^{f(x)} - x)^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |e^{f(x)} - x| = \sqrt{1 + x^2}$$

Αλλά η συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)} - x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δε μηδενίζεται, διότι $\sqrt{1 + x^2} \neq 0$, οπότε διατηρεί πρόσημο. Επιπλέον είναι $g(0) = 1 > 0$, οπότε η g είναι θετική. Άρα:

$$|e^{f(x)} - x| = \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow g(x) = \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow g(x) = \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow e^{f(x)} - x = \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

Τονίζουμε ότι είναι $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού:

$$x + \sqrt{1+x^2} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 3^η

Αν η δοσμένη σχέση περιέχει παράγωγο, τότε:

- Αντιπαραγωγίζουμε, βάζοντας πάντα (π.χ. στο δεύτερο μέλος) τη σταθερά. Η αντιπαραγωγή γίνεται προσπαθώντας να δημιουργήσουμε όρους ή ομάδες όρων που είναι παράγωγοι γνωστών συναρτήσεων, σύνθετων συναρτήσεων, γινομένου ή πηλίκου. Τονίζουμε ότι οι ενέργειες αυτές αφορούν μόνο τις περιπτώσεις που το πεδίο ορισμού είναι **διάστημα**. Για παράδειγμα είναι:

$$f^k(x)f'(x) = \left(\frac{f^{k+1}(x)}{k+1} \right)', \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln |f(x)|)', \quad e^{f(x)}f'(x) = (e^{f(x)})',$$

$$f(x) + xf'(x) = (xf(x))', \quad f(x)f'(x) = \left(\frac{f^2(x)}{2} \right)',$$

$$\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left(-\frac{1}{f(x)} \right)', \quad e^{\lambda x}(\lambda f(x) + f'(x)) = (e^{\lambda x}f(x))', \quad f(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)'$$

- Φέρνουμε τη σχέση στη μορφή $H'(x) + g(x)H(x) = k(x)$ και πολλαπλασιάζουμε με $e^{G(x)}$, όπου G είναι αρχική της g . Το πρώτο μέλος είναι η παράγωγος του $H(x)e^{G(x)}$, οπότε αρκεί να βρούμε και μια αρχική του δεύτερου μέλους.
- Σε περιπτώσεις που έχουμε συναρτησιακή σχέση με δύο μεταβλητές και παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε κρατάμε τη μία μεταβλητή σταθερή και παραγωγίζουμε ως προς την άλλη. Κάνοντας το ίδιο και για την άλλη μεταβλητή και δίνοντας ειδικές τιμές στις μεταβλητές, φτάνουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Αν η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, τότε γίνεται διερεύνηση ως προς τον βαθμό των πολυωνύμων των δύο μελών. Σημειώνουμε ότι η παράγωγος πολυωνυμικής συνάρτησης έχει βαθμό κατά ένα μικρότερο από τον βαθμό του αρχικού πολυωνύμου. Βρίσκουμε επομένως το βαθμό της ζητούμενης συνάρτησης, γράφουμε τη γενική μορφή της συνάρτησης αφού έχει πολυωνυμική μορφή, αντικαθιστούμε, εξισώσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές και βρίσκουμε τη συνάρτηση πολυώνυμο.

Παράδειγμα 4^ο

Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 2$, η οποία ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Λύση

Η δοσμένη γράφεται:

$$(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x \Leftrightarrow 2(f(x) + x)(f(x) + x)' = 2x \Leftrightarrow ((f(x) + x)^2)' = (x^2)' \Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = x^2 + c$$

Επειδή $f(0) = 2$, είναι $c = 4$, οπότε παίρνουμε:

$$(f(x) + x)^2 = x^2 + 4 \Leftrightarrow |f(x) + x| = \sqrt{x^2 + 4} \quad (1).$$

Είναι όμως $\sqrt{x^2 + 4} \neq 0$, οπότε από την τελευταία σχέση παίρνουμε ότι $f(x) + x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$ ως συνεχής και χωρίς ρίζες διατηρεί πρόσημο και αφού $g(0) = f(0) = 2 > 0$, είναι θετική.

Από την σχέση (1) παίρνουμε λοιπόν:

$$|f(x) + x| = \sqrt{x^2 + 4} \Leftrightarrow f(x) + x = \sqrt{x^2 + 4} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 5°

Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f με την ιδιότητα $f(x) + \ln f'(x) = x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

Λύση

Αρχικά πρέπει $f'(x) > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) + \ln f'(x) = x + 1 &\Leftrightarrow \ln e^{f(x)} + \ln f'(x) = x + 1 \Leftrightarrow \ln(e^{f(x)} f'(x)) = x + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) = e^{x+1} \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = (e^{x+1})' \end{aligned}$$

Άρα $e^{f(x)} = e^{x+1} + c$, $c \in \mathbb{R}$. Όμως για $x = 0$ είναι $c = 0$.

Τελικά βρίσκουμε $f(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ αφού είναι $f'(x) = 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οι συνθήκες ικανοποιούνται όλες και έτσι η συνάρτηση που βρήκαμε είναι δεκτή.

Σημειώνουμε ότι αν έχουμε ανισοτική σχέση με παραγώγους, δεν επιτρέπεται να αντιπαραγωγίσουμε, επιτρέπεται όμως να πάρουμε ορισμένο ολοκλήρωμα, έχοντας πρώτα διατάξει τα άκρα ολοκλήρωσης, με την προϋπόθεση ότι και τα δύο μέλη είναι συνεχείς συναρτήσεις.

ΜΕΘΟΔΟΣ 4°

Αν η συνάρτηση που ψάχνουμε βρίσκεται μέσα σε ολοκλήρωμα με σταθερά άκρα, τότε θέτουμε αυτό το ολοκλήρωμα ίσο με a , το αντικαθιστούμε στη δοσμένη σχέση και ολοκληρώνουμε εκ νέου, προσπαθώντας να βρούμε το a .

Παράδειγμα 6°

Δίνονται οι γνησίως μονότονες και παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:

$$2F(x) = g^2(x) \text{ και } 2G(x) = f^2(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου F, G είναι αρχικές των f, g αντίστοιχα με $F(0) = G(0) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f = g$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

α) Καταρχάς εύκολα παίρνουμε ότι $f(0) = g(0) = 0$. Παραγωγίζοντας προκύπτει ότι:

$$f(x) = g(x) \cdot g'(x)$$

από όπου παίρνουμε $f(x) \cdot g(x) = g^2(x) \cdot g'(x)$ και αντίστοιχα $g(x) = f'(x) \cdot f(x)$, από όπου προκύπτει:

$$f(x) \cdot g(x) = f^2(x) \cdot f'(x)$$

Επομένως, εξισώνοντας τις παραπάνω ισότητες, παίρνουμε:

$$3g^2(x) \cdot g'(x) = 3f^2(x) \cdot f'(x) \Leftrightarrow (g^3(x))' = (f^3(x))' \Leftrightarrow g^3(x) = f^3(x) + c$$

και αφού $g(0) = f(0)$ προκύπτει ότι $g^3(x) = f^3(x) \Leftrightarrow g(x) = f(x)$.

β) Ισχύει $f(x) = g(x) \cdot g'(x)$, οπότε $f(x) = f(x) \cdot f'(x)$ (1), διότι $g = f$. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και $f(0) = 0$, το $x_0 = 0$ είναι η μοναδική της ρίζα. Επομένως είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν από την (1) ότι $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, δηλαδή ότι:

$$f(x) = \begin{cases} x + c_1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + c_2, & x > 0 \end{cases}$$

Λόγω της συνέχειας της f στο $x = 0$, παίρνουμε $c_1 = c_2 = 0$ (αφού η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη). Επομένως $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 7°

Να βρείτε τη θετική και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ που ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$\int_{f'(x)}^{f(x)} f(t) dt = f'(x) - f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Λύση

Έστω ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ με $f(\xi) > f'(\xi)$. Η δοσμένη σχέση για $x = \xi$ δίνει άτοπο αφού το αριστερό μέλος είναι θετικό ενώ το δεξιό είναι αρνητικό.

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ με $f(\xi) < f'(\xi)$. Συνεπώς:

$$f(x) = f'(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x \Leftrightarrow f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R} \text{ αφού } f(0) = 1$$

Η συνάρτηση αυτή είναι δεκτή, διότι επαληθεύει όλες τις δοσμένες συνθήκες.

Σχόλιο

Επειδή $f'(x) - f(x) = -\int_{f'(x)}^{f(x)} 1 dt$, η δοσμένη συνθήκη γράφεται $\int_{f'(x)}^{f(x)} (f(t) + 1) dt = 0$ και έτσι μπορούμε να διερευνήσουμε τα άκρα, αφού $f(t) + 1 > 0$. Αν το ένα είναι μικρότερο από το άλλο, τότε το ολοκλήρωμα είναι θετικό ή αρνητικό και έτσι φτάνουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα 8°

Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(xy) + f\left(\frac{x}{y}\right) = 2f(x), \text{ για κάθε } x, y > 0$$

Αν $f(1) = 0$ και $f'(1) = 1$, να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, για κάθε $x > 0$.

β) $f'(x) + \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$, για κάθε $x > 0$. γ) $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

Λύση

α) Για $x = 1$ παίρνουμε ότι $f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 2f(1) = 0$, $y > 0$. Άρα $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $x > 0$.

β) Για $y = c > 0$ (δηλαδή θεωρώντας το y σταθερό) παίρνουμε ότι:

$$f(xc) + f\left(\frac{x}{c}\right) = 2f(x), \quad x > 0$$

Παραγωγίζουμε ως προς x , οπότε $cf'(xc) + \frac{1}{c} f'\left(\frac{x}{c}\right) = 2f'(x)$, $x > 0$. Αυτή για $x = 1$ δίνει

$$cf'(c) + \frac{1}{c} f'\left(\frac{1}{c}\right) = 2f'(1) = 2. \text{ Άρα ισχύει ότι } xf'(x) + \frac{1}{x} f'\left(\frac{1}{x}\right) = 2, \quad x > 0, \text{ οπότε και:}$$

$$x^2 f'(x) + f'\left(\frac{1}{x}\right) = 2x, \quad x > 0$$

Θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}$ και παίρνουμε $\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) + f'(x) = 2\frac{1}{x}$, $x > 0$.

γ) Από τη σχέση $\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) + f'(x) = 2\frac{1}{x}$, $x > 0$ παίρνουμε ότι:

$$\left(-f\left(\frac{1}{x}\right)\right)' + f'(x) = (2\ln x)', \quad x > 0$$

Άρα $-f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 2\ln x + c$, $x > 0$, που λόγω του ερωτήματος (α), προκύπτει ότι:

$$2f(x) = 2\ln x + c, \quad x > 0$$

Επειδή $f(1) = 0$, προκύπτει $c = 0$, οπότε τελικά είναι $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

B. ΘΕΜΑΤΑ ΥΠΑΡΞΗΣ

Θέματα ύπαρξης μπορούμε συνήθως να αντιμετωπίσουμε:

α) Με το θεώρημα Bolzano στη συνάρτηση της διαφοράς, αφού γίνει πρώτα η απαλοιφή τυχόν ανεπιθύμητων παρονομαστών ή αλλάξουμε ενδεχομένως τελείως τη μορφή της ζητούμενης σχέσης με λογαρίθμηση, αν δούμε π.χ. δυνάμεις ή εκθετική μορφή.

β) Με το θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

γ) Με το θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης τιμής.

δ) Με εύρεση του συνόλου τιμών.

Για παράδειγμα, αν για μια συνεχή συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ βρούμε ότι $f(A) = B$ και $\beta \in B$, τότε υπάρχει $\alpha \in A$ τέτοιο, ώστε $f(\alpha) = \beta$. Αν μάλιστα η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε αυτό το α είναι μοναδικό.

Την παραπάνω διαδικασία την εφαρμόζουμε ακριβώς με τον ίδιο τρόπο και στην απόδειξη για την ύπαρξη ρίζας μια εξίσωσης, αφού αν $\beta \in B = f(A)$, τότε η εξίσωση $f(x) = \beta$ έχει ρίζα στο A . Η ρίζα αυτή, σε περίπτωση γνησίως μονότονης συνάρτησης, είναι μοναδική.

ε) Με απαγωγή σε άτοπο, χρησιμοποιώντας την πρόταση:

"Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα και δε μηδενίζεται σε αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο".

Αξίζει επίσης να σημειώσουμε πως αν μια συνάρτηση δε μηδενίζεται, τότε μπορεί να γίνει ο παρονομαστής μιας άλλης συνάρτησης.

στ) Με το θεώρημα Rolle σε κατάλληλη βοηθητική συνάρτηση, που συνήθως βρίσκεται με αντιπαράγωγηση ή δοκιμές.

ζ) Με το Θ.Μ.Τ. στη δοσμένη ή σε κατάλληλη βοηθητική συνάρτηση.

Παράδειγμα 1°

Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με $f(0) = 1$ και $f(2) = 5$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 2\xi$.

Υπόδειξη

Η σχέση $f'(\xi) = 2\xi$ οδηγεί στην $f'(x) = 2x$ και αυτή με τη σειρά της στη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2$, γιατί $g'(x) = f'(x) - 2x$.

Η g είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$. Επιπλέον:

$$g(0) = f(0) = 1 \quad \text{και} \quad g(2) = f(2) - 4 = 5 - 4 = 1$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - 2\xi = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 2\xi$$

Παράδειγμα 2°

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) , $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma) = \alpha + \beta - \gamma$.

β) Υπάρχουν $\lambda, \mu \in (\alpha, \beta)$, με $\lambda \neq \mu$ και $f'(\lambda)f'(\mu) = 1$.

Υπόδειξη

α) Έστω $g(x) = f(x) - \alpha - \beta + x$, $x \in [\alpha, \beta]$. Εφαρμόζουμε για την g το Θεώρημα Bolzano. Έχουμε:

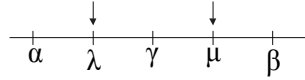
♦ Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

$$\diamond \quad g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha - \beta + \alpha = \alpha - \beta < 0 \quad \text{και} \quad g(\beta) = f(\beta) - \alpha - \beta + \beta = \beta - \alpha > 0,$$

δηλαδή $g(\alpha)g(\beta) < 0$.

Υπάρχει επομένως $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(\gamma) = 0 \Leftrightarrow f(\gamma) = \alpha + \beta - \gamma$.

β) Θα χρησιμοποιήσουμε το Θ.Μ.Τ.



Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\alpha, \gamma]$, $[\gamma, \beta]$ και παραγωγίσιμη στα (α, γ) , (γ, β) . Σύμφωνα λοιπόν με το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\lambda \in (\alpha, \gamma)$ και $\mu \in (\gamma, \beta)$ τέτοια, ώστε:

$$\begin{aligned} \bullet \quad f'(\lambda) &= \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} = \frac{\alpha + \beta - \gamma - \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{\beta - \gamma}{\gamma - \alpha} \\ \bullet \quad f'(\mu) &= \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} = \frac{\beta - (\alpha + \beta - \gamma)}{\beta - \gamma} = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \gamma} \end{aligned}$$

Αρα, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη παίρνουμε $f'(\lambda)f'(\mu) = \frac{\beta - \gamma}{\gamma - \alpha} \cdot \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \gamma} = 1$.

Παράδειγμα 3°

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ και $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-2, 2)$. Αν $f(-2) = -2$ και $f(2) = 2$, να αποδειχθεί ότι:

α) Υπάρχουν $\xi_1 \in (-2, 0)$ και $\xi_2 \in (0, 2)$ τέτοια, ώστε:

$$2 + f(0) = 2f'(\xi_1) \quad \text{και} \quad 2 - f(0) = 2f'(\xi_2)$$

β) $f(0) = 0$.

Υπόδειξη

α) Για την f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[-2, 0]$ και $[0, 2]$. Υπάρχουν δηλαδή:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \xi_1 \in (-2, 0): \quad f'(\xi_1) &= \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{f(0) + 2}{2}, \quad \text{οπότε} \quad f(0) + 2 = 2f'(\xi_1) \\ \bullet \quad \xi_2 \in (0, 2): \quad f'(\xi_2) &= \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - f(0)}{2}, \quad \text{οπότε} \quad 2 - f(0) = 2f'(\xi_2). \end{aligned}$$

β) Είναι $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-2, 2)$, οπότε:

$$\begin{aligned} \bullet \quad f'(\xi_1) &\leq 1 \Leftrightarrow \frac{f(0) + 2}{2} \leq 1 \Leftrightarrow f(0) + 2 \leq 2 \Leftrightarrow f(0) \leq 0 \quad (1) \\ \bullet \quad f'(\xi_2) &\leq 1 \Leftrightarrow \frac{2 - f(0)}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 2 - f(0) \leq 2 \Leftrightarrow f(0) \geq 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε ότι $f(0) = 0$.

Παρατήρηση

Ας δούμε μια άλλη "προσπάθεια". Η δοσμένη σχέση δίνει:

$$\bullet \quad \int_0^2 f'(x) dx \leq \int_0^2 1 dx \Leftrightarrow f(2) - f(0) \leq 2 \Leftrightarrow f(0) \geq 0 \quad (1)$$

$$\bullet \quad \int_{-2}^0 f'(x) dx \leq \int_{-2}^0 1 dx \Leftrightarrow f(0) - f(-2) \leq 2 \Leftrightarrow f(0) \leq 0 \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν ότι $f(0) = 0$.

Ωστόσο η παραπάνω λύση είναι λανθασμένη, διότι κατά την ολοκλήρωση θεωρήσαμε δεδομένο ότι η f' είναι συνεχής, κάτι όμως που δε δίνεται.

Γ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Γ1. Εξισώσεις

Στη συνέχεια προσπαθούμε να επισημάνουμε και να περιγράψουμε τις πιο χαρακτηριστικές εξισώσεις που μπορεί να συναντήσει ο μαθητής στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου. Για την κάθε περίπτωση δίνουμε μερικά βασικά θεωρητικά στοιχεία που δηλώνουν τη μορφή και υποδεικνύουν στην ουσία τον τρόπο λύσης των ασκήσεων αυτών. Ακολουθούν μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα για την κάθε περίπτωση, ώστε να φανεί πιο συγκεκριμένα ο τρόπος ή οι τρόποι επίλυσης των εξισώσεων αυτών.

ΜΕΘΟΔΟΣ 1^η

Κάθε εξίσωση, μετά από πιθανή εκτέλεση πράξεων ή κατάλληλους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς (π.χ. λογαριθμίζουμε ή πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με κατάλληλη μη μηδενιζόμενη παράσταση), έχει ή παίρνει τη μορφή $f(x) = 0$, όπου f είναι κατάλληλη συνάρτηση, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , που είναι και το πεδίο ορισμού της εξίσωσης. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να λυθεί με αλγεβρικές μεθόδους.

A. Έστω ότι για τη συνάρτηση f γνωρίζουμε ή μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι 1-1. Προσπαθούμε τότε να βρούμε με παρατήρηση έναν αριθμό $\alpha \in A$, ώστε $f(\alpha) = 0$. Φέρνουμε λοιπόν την εξίσωση στη μορφή $f(x) = f(\alpha)$, οπότε λόγω του 1-1 παίρνουμε:

$$f(x) = f(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha$$

Επομένως η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = \alpha$.

B. Είναι συνήθως πιο εύκολο να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. Στη συνέχεια προσπαθούμε να εντοπίσουμε με παρατήρηση μια ρίζα της εξίσωσης, δηλαδή αριθμό $\alpha \in A$, ώστε $f(\alpha) = 0$. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, η ρίζα αυτή είναι και η μοναδική.

Εφαρμογή 1^η

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) = -f(2-x) \quad \text{και} \quad f'(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$, με τα δεδομένα ότι η f είναι παραγωγίσιμη, ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = -f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Εξετάσεις 2003)

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, αυτή θα διατηρεί πρόσημο. Έτσι, η f είναι γνησίως μονότονη και συγκεκριμένα:

- ♦ είναι γνησίως αύξουσα, αν η f' είναι θετική.
- ♦ είναι γνησίως φθίνουσα, αν η f' είναι αρνητική.

β) Παρατηρούμε ότι για $x = 1$ η δοσμένη σχέση δίνει:

$$f(1) = -f(2-1) \Leftrightarrow f(1) + f(1) = 0 \Leftrightarrow 2f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$$

Επομένως η τιμή $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

γ) Με τις νέες προϋποθέσεις δεν έχουμε εξασφαλισμένη τη μονοτονία της f , αφού δεν γνωρίζουμε τη συνέχεια της f' . Μας αρκεί όμως η f να είναι 1-1 και αυτό το πετυχαίνουμε με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω λοιπόν ότι η f δεν είναι 1-1. Υπάρχουν τότε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$.

Για την f πληρούνται στο $[\alpha, \beta]$ οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$, άτοπο. Έτσι η f είναι 1-1, οπότε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1 \blacksquare$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 2^η

Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $f(x) = 0$ και εντοπίζουμε με παρατήρηση μια ρίζα. Κατά τη μελέτη όμως της βοηθητικής συνάρτησης f μπορεί να προκύψουν προβλήματα τόσο με την πρώτη όσο και με τη δεύτερη παράγωγο της f . Σε αυτή την περίπτωση αλλάζουμε μορφή στην αρχική εξίσωση, είτε απαλείφοντας παρονομαστές, είτε λογαριθμίζοντας (αν έχουμε εκθετικές μορφές) ή μεταφέρουμε παράγοντες, κυρίως εκθετικής μορφής, από το ένα μέλος στο άλλο. Με τον τρόπο αυτό η νέα συνάρτηση που θα θεωρήσουμε μελετάται πιο εύκολα και έτσι η μοναδικότητα προκύπτει με πιο φυσιολογικό τρόπο.

Εφαρμογή 2^η

Να λύσετε την εξίσωση $e^{-x} = x^2 + 1$.

Λύση

Σύμφωνα με τα σχόλια και την ανάλυση της μεθόδου, πρώτα εξετάζουμε αν μπορούμε να εντοπίσουμε ρίζα. Πράγματι, η τιμή $x = 0$ είναι λύση της εξίσωσης.

Φέρνουμε όλους τους όρους στο a' μέλος και θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = e^{-x} - x^2 - 1$$

Είναι $f'(x) = (e^{-x} - x^2 - 1)' = -e^{-x} - 2x$ και $f''(x) = (-e^{-x} - 2x)' = e^{-x} - 2$.

Φαίνεται όμως με την πρώτη ματιά ότι αφού η πρώτη παράγωγος δεν δίνει αμέσως ρίζα και πρόσημο, ενώ η δεύτερη παράγωγος δεν διατηρεί πρόσημο, δεν είναι κακή σκέψη να αλλάξουμε τη μορφή της εξίσωσης και αν χρειαστεί, επανερχόμαστε. Είναι λοιπόν:

$$e^{-x} = x^2 + 1 \Leftrightarrow (x^2 + 1)e^x = 1 \Leftrightarrow (x^2 + 1)e^x - 1 = 0$$

Ας θεωρήσουμε λοιπόν τη συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 1)e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι:

- ♦ $f(0) = 0$,
- ♦ $f'(x) = ((x^2 + 1)e^x - 1)' = e^x(x + 1)^2 > 0$, $x \neq -1$.

Η συνάρτηση λοιπόν f είναι γνησίως μονότονη, αφού είναι συνεχής και η παράγωγος μηδενίζεται μόνο σε ένα σημείο, χωρίς να αλλάξει πρόσημο εκατέρωθεν αυτού. Έτσι η τιμή $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, συνεπώς και της αρχικής εξίσωσης. ■

Να σημειώσουμε ότι θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε την πρώτη μας προσπάθεια, η διαδικασία όμως θα ήταν πιο πολύπλοκη διότι θα έπρεπε να βρούμε το πρόσημο της f'' , τη μονοτονία και το πρόσημο της f' και τελικά τη μονοτονία της $f(x) = e^{-x} - x^2 - 1$. Ας το επιχειρήσει μόνος του ο απαιτητικός μαθητής. Ωστόσο, μια πολύ εύκολη ενέργεια κατέστησε την λύση της άσκησης πολύ πιο απλή. Υπάρχουν περιπτώσεις που χωρίς τον κατάλληλο μετασχηματισμό της εξίσωσης η επίλυσή της είναι δυσχερής ή αδύνατη.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3^η

Αν η εξίσωση έχει σχετικά πολύπλοκη μορφή, προσπαθούμε να τη φέρουμε στη μορφή:

$$f((g(x))) = f(h(x))$$

όπου f είναι μια κατάλληλη 1-1 συνάρτηση. Επομένως θα είναι:

$$f((g(x))) = f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) = h(x)$$

Η νέα εξίσωση είτε λύνεται αλγεβρικά, είτε λύνεται όπως στις μεθόδους που περιγράψαμε παραπάνω.

Εφαρμογή 3^η

Να λυθεί η εξίσωση:

$$e^{x+3} - e^{x^2-x} = x^2 - 2x - 3$$

Λύση

Βλέπουμε ότι στους δύο εκθετικούς όρους παρουσιάζονται οι παραστάσεις $x^2 - x$ και $x + 3$. Διατάσσουμε ξανά τη δοσμένη σχέση, ώστε οι όροι αυτοί να βρίσκονται στο ίδιο μέλος:

$$e^{x+3} - e^{x^2-x} = x^2 - 2x - 3 \Leftrightarrow e^{x+3} + (x+3) = e^{x^2-x} + (x^2 - x) \quad (1)$$

Η σχέση αυτή μας οδηγεί στο να θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$. Έτσι η σχέση (1) γράφεται:

$$f(x+3) = f(x^2 - x) \quad (2)$$

Τι χρειαζόμαστε ακόμα, ώστε να απαλλαχθούμε από την εμφάνιση της f στην παραπάνω ισότητα; Μα προφανώς το $1-1$. Πώς θα το εξασφαλίσουμε αυτό; Η απάντηση είναι:

Έχουμε τον ορισμό ή μέσω της μονοτονίας!

Επειδή $f'(x) = e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς και $1-1$. Επομένως η σχέση (2) δίνει ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} f(x+3) = f(x^2 - x) &\Leftrightarrow x^2 - x = x + 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ ή } x = 3) \end{aligned}$$

Η δυσκολία των εξισώσεων αυτών βρίσκεται στο να δημιουργήσουμε στο κάθε μέλος την κατάλληλη παράσταση, ώστε να οδηγηθούμε στην δέουσα συνάρτηση.

Εφαρμογή 4^η

$$\text{Να λύσετε την εξίσωση } 2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x-2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right].$$

Εξετάσεις 2010

Λύση

Βλέπουμε αρχικά ότι η εξίσωση έχει νόημα (ορίζεται) σε όλο το $\mathbb{R}$.

Είναι φανερό ότι μάλλον πρέπει να εξετάσουμε μήπως η εξίσωση παίρνει μια πιο καλή μορφή και όχι να θεωρήσουμε για μελέτη τη συνάρτηση της διαφοράς. Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

$$\begin{aligned} 2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x-2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right] &\Leftrightarrow \ln((3x-2)^2 + 1) + 2(3x-2) = \ln(x^4 + 1) + 2x^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln((3x-2)^2 + 1) + 2(3x-2) = \ln((x^2)^2 + 1) + 2x^2 \end{aligned}$$

Αν λοιπόν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 2x$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\ln((3x-2)^2 + 1) + 2(3x-2) = \ln((x^2)^2 + 1) + 2x^2 \Leftrightarrow f(3x-2) = f(x^2)$$

Θα μελετήσουμε επομένως την f ως προς τη μονοτονία. Είναι

$$f'(x) = (\ln(x^2 + 1) + 2x)' = \frac{2x}{x^2 + 1} + 2 = 2 \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} > 0$$

Αφού λοιπόν η παράγωγος της f είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, η f είναι γνησίως αύξουσα. Είναι επομένως και $1-1$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$f(3x-2) = f(x^2) \Leftrightarrow 3x-2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ή } x = 1)$$

Και οι δύο αυτές τιμές είναι δεκτές, μια και δεν έχουμε περιορισμούς. ■

Εφαρμογή 5^η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(xe^x)$. Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(x^4 + 3) + f(x^2 + 1) = f(x^4 + 1) + f(x^2 + 3)$$

Λύση

Η εξίσωση, αλλάζοντας τη θέση των όρων, παίρνει τη μορφή:

$$f(x^4 + 3) - f(x^4 + 1) = f(x^2 + 3) - f(x^2 + 1)$$

Σύνολο αναφοράς είναι το $\mathbb{R}$. Έχουμε λοιπόν:

$$\blacklozenge f(x) = e^x - \ln(xe^x) = e^x - x - \ln x, \text{ με } x > 0$$

$$\blacklozenge f'(x) = (e^x - x - \ln x)' = e^x - \frac{1}{x} - 1 \text{ και } f''(x) = \left(e^x - \frac{1}{x} - 1\right)' = e^x + \frac{1}{x^2} > 0, \text{ } x > 0.$$

Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Η μορφή της εξίσωσης μας οδηγεί να θεωρήσουμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x+2) - f(x)$$

αφού έτσι η εξίσωση παίρνει τη μορφή $g(x^4 + 1) = g(x^2 + 1)$, με $x \in \mathbb{R}$. Είναι όμως:

$$g'(x) = f'(x+2) - f'(x) > 0$$

διότι η f' είναι γνησίως αύξουσα και $x+2 > x$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς είναι και 1-1. Έτσι, τελικά παίρνουμε:

$$g(x^4 + 1) = g(x^2 + 1) \Leftrightarrow x^4 + 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1)$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 4^η

A. Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $f(x) = f(a)$ και αποδεικνύουμε ότι το a είναι το μοναδικό σημείο, στο οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ακρότατο. Αυτό συνήθως το πετυχαίνουμε με το να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f αλλάζει μονοτονία μόνο στο $x = a$. Για το λόγο αυτό μελετάμε αρχικά την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Στη συνέχεια, αν το a είναι το μοναδικό σημείο, στο οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ακρότατο, τότε με τη βοήθεια του ορισμού της μονοτονίας προκύπτει ότι $f(x) \neq f(a)$ για κάθε $x \neq a$. Έτσι το $x = a$ είναι η μοναδική ρίζα.

B. Σε εξισώσεις που έχουν ή παίρνουν την μορφή $f(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$, όπου f είναι μια κυρτή ή κοίλη συνάρτηση μπορούμε, εκτός από τη μέθοδο της διαφοράς, εργαστούμε και ως εξής:

- ◆ Παρατηρούμε το $x = a$ είναι ρίζα της εξίσωσης.
- ◆ Βλέπουμε ότι το β' μέλος είναι το y στην ευθεία της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(a, f(a))$.
- ◆ Από την ιδιότητα της εφαπτομένης σε κυρτή ή κοίλη συνάρτηση παίρνουμε η τιμή $x = a$ είναι η μοναδική.

Εφαρμογή 6^η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{x+1}{x}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 + 1) + f(x^4 + 1) = 4$.

Λύση

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = (0, +\infty)$. Είναι:

$$f'(x) = \left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

Από το πρόσημο της f' προκύπτει ότι η f είναι:

- ♦ Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$.
- ♦ Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

β) Από τη μονοτονία της f προκύπτει ότι το $f(1) = 2$ είναι ολικό ελάχιστο της f και μάλιστα αυτό παρουσιάζεται μόνο στη θέση $x_0 = 1$. Αυτό σημαίνει ότι είναι $f(x) > 2$ για κάθε $x \neq 1$. Άρα η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 2$ είναι η $x = 1$.

Σχόλιο

Μπορούμε να εργαστούμε πιο αναλυτικά ως εξής:

- ♦ Αν $x < 1$, τότε $f(x) > f(1) = 2$, δηλαδή $f(x) > 2$. Αυτό σημαίνει ότι $f(x) \neq 2$ για $x < 1$.
- ♦ Αν $x > 1$, τότε $f(x) > f(1) = 2$, δηλαδή $f(x) > 2$. Αυτό σημαίνει ότι $f(x) \neq 2$ για $x > 1$.

Επομένως η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = 1$.

γ) Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $f(x^2 + 1) + f(x^4 + 1) = 4$ αληθεύει για $x = 0$. Αυτή η ρίζα είναι η μοναδική, αφού για κάθε άλλη τιμή του x είναι $x^2 + 1 \neq 1$ και $x^4 + 1 \neq 1$, οπότε $f(x^2 + 1) > 2$ και $f(x^4 + 1) > 2$, δηλαδή $f(x^2 + 1) + f(x^4 + 1) > 2 + 2 = 4$. Άρα:

$$f(x^2 + 1) + f(x^4 + 1) = 4 \Leftrightarrow x = 0 \quad \blacksquare$$

Εφαρμογή 7^η

Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Εξετάσεις 2016

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $e^x \geq x + 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$. Επομένως είναι $e^{x^2} \geq x^2 + 1$ με την ισότητα να ισχύει όταν:

$$e^{x^2} - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Η εξίσωση έχει επομένως τη μοναδική λύση $x = 0$.

Εφαρμογή 8^η

Αν $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x + 3) - f(x)$$

όταν $x \in [0, +\infty)$.

Εξετάσεις 2016

Λύση

Είναι $f'(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)' = e^{x^2} \cdot 2x - 2x = 2x(e^{x^2} - 1)$.

Η μονοτονία αλλάζει στο 0, αφού $e^{x^2} - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δεν μπορούμε όμως να διαπιστώσουμε με την πρώτη ματιά αν αυτό θα βοηθήσει. Ας συλλέξουμε μερικές ακόμα πληροφορίες για την f και ας πάμε στη δεύτερη παράγωγο:

$$f''(x) = (e^{x^2} \cdot 2x - 2x)' = e^{x^2} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2} \cdot 2 - 2 = 4x^2 e^{x^2} + 2(e^{x^2} - 1) > 0 \text{ για κάθε } x \neq 0$$

Η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα. Με αυτές τις πληροφορίες ας δούμε τι μπορούμε να κάνουμε στην εξίσωση, που έχει τη μορφή:

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x + 3) - f(x) \quad (1)$$

Το να μελετήσουμε τη συνάρτηση της διαφοράς είναι κακή επιλογή για πολλούς λόγους.

Θα καταφύγουμε επομένως σε βοηθητική συνάρτηση άλλης μορφής. Η συνάρτηση αυτή είναι η $g(x) = f(x + 3) - f(x)$, $x \geq 0$, διότι τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$g(|\eta\mu x|) = g(x)$$

Μένει να αποδείξουμε ότι η g είναι 1-1. Είναι:

$$g'(x) = f'(x+3) - f'(x)$$

Αλλά η f' είναι γνησίως αύξουσα και έτσι:

$$\begin{aligned} x+3 > x &\Rightarrow f'(x+3) > f'(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x+3) - f'(x) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \end{aligned}$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς και 1-1. Άρα:

$$g(|\eta_{\mu x}|) = g(x) \Leftrightarrow |\eta_{\mu x}| = x \Leftrightarrow x = 0$$

διότι ξέρουμε ότι $|\eta_{\mu x}| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 5^η

Εντοπίζουμε με παρατήρηση μια ρίζα x_0 και με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση δεν έχει άλλη ρίζα. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $x < x_0$, $x > x_0$, εκμεταλλευόμαστε τη μονοτονία της συνάρτησης και καταλήγουμε σε άτοπο.

Εφαρμογή 9^η

Να λύσετε την εξίσωση $(2^x + 3^x)^{2018} = (2^{2018} + 3^{2018})^x$.

Λύση

Διαιρούμε και τα δύο μέλη της δοσμένης εξίσωσης με 3^{2018x} και ισοδύναμα παίρνουμε την εξίσωση:

$$\left[\left(\frac{2}{3} \right)^x + 1 \right]^{2018} = \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{2018} + 1 \right]^x$$

Προφανής ρίζα είναι η τιμή $x = 2018$. Διακρίνουμε στη συνέχεια τις περιπτώσεις $x < 2018$, $x > 2018$.

Στην πρώτη π.χ. περίπτωση, όπου $x < 2018$, λόγω του γεγονότος ότι η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2}{3} \right)^x$ είναι γνησίως

φθίνουσα, ενώ η συνάρτηση $g(x) = \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{2018} + 1 \right]^x$ είναι γνησίως αύξουσα, παίρνουμε:

$$\left[\left(\frac{2}{3} \right)^x + 1 \right]^{2018} > \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{2018} + 1 \right]^{2018} > \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{2018} + 1 \right]^x$$

που σημαίνει ότι δεν υπάρχουν ρίζες μικρότερες του 2018. Όμοια εργαζόμαστε και για $x > 2018$. Άρα η μοναδική ρίζα της δοσμένης εξίσωσης είναι η $x = 2018$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 6^η

Σε ορισμένες, πιο σπάνιες περιπτώσεις, πιθανόν να χρειαστεί να εντοπίσουμε με παρατήρηση δύο ή περισσότερες ρίζες και να αποδείξουμε ότι οι ρίζες αυτές είναι οι μοναδικές. Αυτό μπορεί να γίνει και ως εξής:

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση (που παίρνει ή έχει τη μορφή $f(x) = 0$) έχει π.χ. τουλάχιστον τρεις ρίζες, οπότε με διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος Rolle για τις f , f' , f'' προσπαθούμε να καταλήξουμε σε άτοπο.

Εφαρμογή 10^η

Να λύσετε την εξίσωση $2^x + 3^{2x} = 9x + 2$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $x = 0$, $x = 1$ επαληθεύουν την εξίσωση, οπότε είναι ρίζες. Θα αποδείξουμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο ότι αυτές οι λύσεις είναι οι μοναδικές. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει και άλλη λύση και ας ονομάσουμε α , β , γ τις τρεις (τουλάχιστον) από τις ρίζες της εξίσωσης, με $\alpha < \beta < \gamma$. Είναι προφανές ότι δύο από τους

αριθμούς α, β, γ είναι οι 0 και 1.

Η εξίσωση μάς οδηγεί στη συνάρτηση:

$$f(x) = 2^x + 3^{2x} - 9x - 2$$

Είναι τότε $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$. Από το θεώρημα Rolle για την f υπάρχουν $x_1 \in (\alpha, \beta)$ και $x_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(x_1) = 0 \text{ και } f'(x_2) = 0$$

Επίσης, πάλι από το θεώρημα του, Rolle αλλά για την f' , υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, με $f''(\xi) = 0$. Είναι όμως:

$$f'(x) = 2^x \ln 2 + 2 \cdot 3^{2x} \ln 3 - 9 \text{ και}$$

$$f''(x) = 2^x \ln^2 2 + 4 \cdot 3^{2x} \ln^2 3 > 0$$

Αλλά η τελευταία σχέση με την $f''(\xi) = 0$ οδηγούν σε άτοπο. Η εξίσωση λοιπόν δεν μπορεί να έχει τρεις ή περισσότερες ρίζες, οπότε οι λύσεις της είναι αναγκαστικά οι $x = 0, x = 1$. ■

Εφαρμογή 11^η

Να λύσετε την εξίσωση $2^x + 3^x + 6^x = 3x^2 + 5x + 3$.

Υπόδειξη

Προφανείς ρίζες είναι οι $x = 0, x = 1, x = -1$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τέσσερις τουλάχιστον ρίζες, τις $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\alpha < \beta < \gamma < \delta$. Όπως στην προηγούμενη εφαρμογή, πάλι με διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2^x + 3^x + 6^x - 3x^2 - 5x - 3$$

θα πρέπει να υπάρχει ξ με $f^{(3)}(\xi) = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι:

$$f^{(3)}(x) = 2^x \ln^3 2 + 3^x \ln^3 3 + 6^x \ln^3 6 > 0$$

Εφαρμογή 12^η

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και $\alpha \in \mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι προφανής ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = \alpha$. Έστω ότι υπάρχει και άλλη μία ρίζα x της εξίσωσης με $x \neq \alpha$, π.χ. $x < \alpha$. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi \in (x, \alpha)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \Leftrightarrow f(x) = f(\alpha) + f'(\xi)(x - \alpha)$$

Επομένως η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow f(\alpha) + f'(\xi)(x - \alpha) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)(x - \alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \stackrel{x \neq \alpha}{\Leftrightarrow} f'(\xi) = f'(\alpha) \Leftrightarrow \xi = \alpha$$

διότι η f είναι κυρτή, οπότε η f' , ως γνησίως αύξουσα, είναι 1-1. Αλλά η σχέση $\xi = \alpha$ οδηγεί σε άτοπο, διότι $\xi \in (x, \alpha)$ που σημαίνει ότι $\xi \neq \alpha$.

Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο, αν δεχθούμε ότι υπάρχει ρίζα x της εξίσωσης με $x > \alpha$. Άρα η μοναδική ρίζα της δοσμένης εξίσωσης είναι η $x = \alpha$.

Άλλος τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(\alpha, f(\alpha))$ είναι η εξής:

$$(ε): y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$$

Αλλά η f είναι κυρτή, οπότε η γραφική της παράσταση είναι πάνω από την εφαπτομένη (ε), με εξαίρεση το σημείο επαφής $M(\alpha, f(\alpha))$. Έτσι, για $x \neq \alpha$ ισχύει ότι:

$$f(x) > y \Leftrightarrow f(x) > f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$$

Αφού το $x = \alpha$ είναι ρίζα της δοσμένης εξίσωσης, από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι αυτή είναι και η μοναδική. ■

ΜΕΘΟΔΟΣ 7η

Υπάρχει μια ειδική κατηγορία εξισώσεων, που έχουν τη γενική μορφή:

$$f(\alpha(x)) + f(\beta(x)) = f(\gamma(x)) + f(\delta(x))$$

Στις εξισώσεις αυτές προσπαθούμε αρχικά να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. Στη συνέχεια, αφού εντοπίσουμε μια ρίζα ρ της δοσμένης εξίσωσης, προσπαθούμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο να αποδείξουμε ότι η εξίσωση δεν έχει άλλη ρίζα. Αυτό το πετυχαίνουμε διακρίνοντας τις περιπτώσεις $x < \rho$ ή $x > \rho$, συγκρίνοντας τις ποσότητες $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\delta(x)$ κατάλληλα ανά δύο και χρησιμοποιώντας το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης f .

Εφαρμογή 13η

Να λυθεί η εξίσωση:

$$2^x \ln(2^x + 1) + 4^x \ln(4^x + 1) = 3^x \ln(3^x + 1) + 5^x \ln(5^x + 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

Λύση

Μια προφανής ρίζα είναι η $x = 0$. Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x \ln(x+1)$, με $x > -1$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$f(2^x) + f(4^x) = f(3^x) + f(5^x)$$

Είναι όμως:

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} = \ln(x+1) + 1 - \frac{1}{x+1} \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

Είναι $f'(0) = 0$ και η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η f' είναι αρνητική στο διάστημα $(-1, 0)$ και θετική στο $(0, +\infty)$. Η συνάρτηση f είναι λοιπόν γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

- ♦ Για $x < 0$ είναι $2^x > 3^x$ και $4^x > 5^x$, οπότε $f(2^x) > f(3^x)$ και $f(4^x) > f(5^x)$, διότι οι αριθμοί 2^x , 3^x , 4^x , 5^x ανήκουν στο διάστημα $(0, +\infty)$. Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$f(2^x) + f(4^x) > f(3^x) + f(5^x)$$

- ♦ Για $x > 0$ είναι $2^x < 3^x$ και $4^x < 5^x$, οπότε $f(2^x) < f(3^x)$ και $f(4^x) < f(5^x)$, διότι οι αριθμοί 2^x , 3^x , 4^x , 5^x ανήκουν επίσης στο διάστημα $(0, +\infty)$. Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$f(2^x) + f(4^x) < f(3^x) + f(5^x)$$

Επομένως η εξίσωση $f(2^x) + f(4^x) = f(3^x) + f(5^x)$ δεν έχει άλλη ρίζα εκτός από την $x = 0$ ■

ΜΕΘΟΔΟΣ 8η

Σε ορισμένες περιπτώσεις εντοπίζουμε ρίζες με παρατήρηση, αλλά η μοναδικότητα αυτών των ριζών εξασφαλίζεται μόνο με την εύρεση των διαστημάτων της μονοτονίας. Έτσι, αν η βοηθητική συνάρτηση f αλλάζει μονοτονία μόνο μια φορά και στο καθένα από τα διαστήματα που δημιουργούνται έχουμε ρίζα, τότε η εξίσωση έχει δύο ακριβώς ρίζες και η διαδικασία επίλυσης έχει ολοκληρωθεί.

Εφαρμογή 14η

Να λυθεί η εξίσωση $4^x = x^4$, $x > 0$.

Λύση

Δύο προφανείς ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x = 2$, $x = 4$. Θα αποδείξουμε ότι αυτές είναι και οι μοναδικές.

Λογαριθμίζοντας βλέπουμε ότι εξίσωση παίρνει την ισοδύναμη μορφή $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 4}{4}$. Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{και βρίσκουμε ότι:}$$

- ♦ $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $x > 0$.

- ♦ Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

Έτσι, αφού $2 < e$ και $4 > e$, βλέπουμε ότι:

- ♦ Στο διάστημα $(0, e]$ είναι $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 4}{4} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow f(x) = f(2) \Leftrightarrow x = 2$.
- ♦ Στο διάστημα $[e, +\infty)$ είναι $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 4}{4} \Leftrightarrow f(x) = f(4) \Leftrightarrow x = 4$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $x = 2$ και $x = 4$. ■

ΜΕΘΟΔΟΣ 9^η

Για τις εξισώσεις με κυρτές ή κοίλες συναρτήσεις ιδιαίτερα σημαντικές είναι και οι παρακάτω περιπτώσεις. Οι περιπτώσεις αυτές έχουν τη βάση τους στο γεγονός ότι μια κυρτή ή κοίλη συνάρτηση μπορεί να τέμνει μια ευθεία το πολύ σε δύο σημεία. Αν η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, τότε μπορούμε να εργαστούμε τόσο με τη μέθοδο της μελέτης της συνάρτησης της διαφοράς, αφού η f' θα έχει από το θεώρημα Rolle ρίζα ανάμεσα στις δύο ρίζες της f που θα εντοπίσουμε με παρατήρηση, όσο και με απαγωγή σε άτοπο, αφού αν η εξίσωση έχει τρεις ρίζες, τότε η f'' θα έχει τουλάχιστον μία, κάτι που συνήθως οδηγεί σε άτοπο.

Εφαρμογή 15^η

α) Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu x - (2x - \pi)\sigma\upsilon\nu x = \pi$, $x \in [0, \pi]$.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων προς τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$

που άγονται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - (2x - \pi)\sigma\upsilon\nu x - \pi$, $x \in [0, \pi]$. Είναι:

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - 2\sigma\upsilon\nu x + (2x - \pi)\eta\mu x = (2x - \pi)\eta\mu x$$

Μοναδική ρίζα της παραγώγου στο $(0, \pi)$ είναι η $x = \frac{\pi}{2}$. Έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως

αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Επομένως:

- ♦ Για $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ είναι $f(x) < f(0) = 0$.
- ♦ Για $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ είναι $f(x) < f(\pi) = 0$.

Είναι λοιπόν $f(0) = f(\pi) = 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$. Επομένως οι μοναδικές ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x = 0$, $x = \pi$.

Άλλος τρόπος

Είναι $f(0) = f(\pi) = 0$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και άλλη ρίζα ρ της εξίσωσης στο $(0, \pi)$. Επειδή $f(0) = f(\rho) = f(\pi) = 0$, από το θεώρημα του Rolle θα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα x_1 της f' στο $(0, \rho)$ και μία τουλάχιστον ρίζα x_2 της f' στο διάστημα (ρ, π) , δηλαδή $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Αλλά:

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - 2\sigma\upsilon\nu x + (2x - \pi)\eta\mu x = (2x - \pi)\eta\mu x$$

η οποία έχει μόνο μία ρίζα στο $(0, \pi)$, την $x = \frac{\pi}{2}$. Καταλήξαμε επομένως σε άτοπο. Συνεπώς η δοσμένη εξίσωση έχει μόνο τις ρίζες $x = 0$, $x = \pi$.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (1)$$

η οποία γράφεται και στη μορφή:

$$y - \eta \mu x_0 = \sigma \nu \nu x_0 \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y - \eta \mu x_0 = (x - x_0) \sigma \nu \nu x_0 \quad (2)$$

Αυτή περνάει όμως από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε πρέπει:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - f(x_0) &= f'(x_0) \left(\frac{\pi}{2} - x_0 \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \pi - 2f(x_0) &= f'(x_0)(\pi - 2x_0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f'(x_0)(\pi - 2x_0) - \pi + 2f(x_0) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2f(x_0) + f'(x_0)(\pi - 2x_0) - \pi &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\eta \mu x_0 - (2x_0 - \pi)\sigma \nu \nu x_0 - \pi &= 0 \Leftrightarrow g(x_0) = 0 \end{aligned}$$

όπου $g(x) = 2\eta \mu x - (2x - \pi)\sigma \nu \nu x - \pi$, $x \in [0, \pi]$.

Σύμφωνα με το ερώτημα (α) αυτή η εξίσωση έχει ρίζες $x = 0$, $x = \pi$ και έτσι από την (2) προκύπτει ότι οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι οι:

$$\blacklozenge (\varepsilon_1): y = x \quad \text{και} \quad \blacklozenge (\varepsilon_2): y = \pi - x$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 10^η

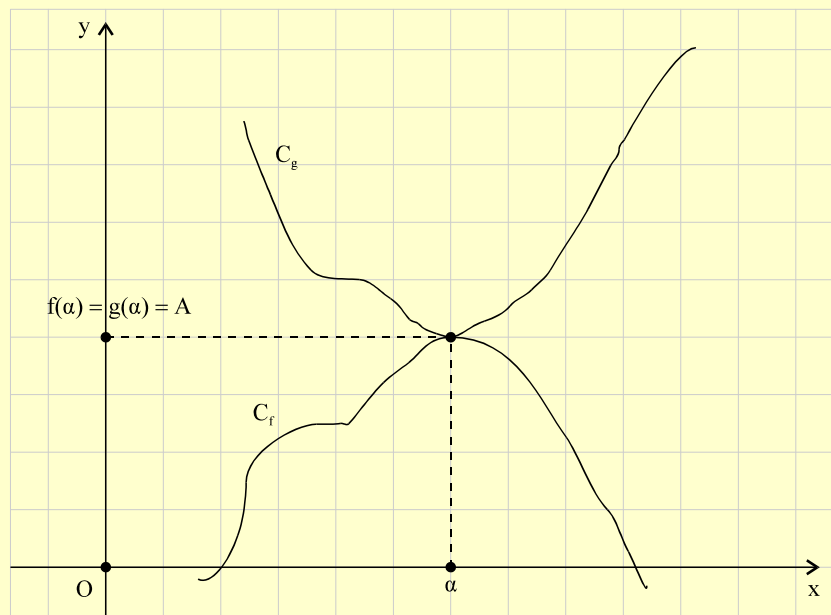
Έστω ότι έχουμε δύο συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού Δ , η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο $a \in \Delta$ και η g ολικό ελάχιστο **μόνο** στο σημείο $a \in \Delta$ και επιπλέον $f(a) = g(a)$. Είναι τότε φανερό ότι η εξίσωση:

$$f(x) = g(x)$$

έχει στο Δ μοναδική ρίζα την $x = a$. Η αιτιολόγηση γίνεται ως εξής:

- ◆ Το $x = a$ είναι προφανής ρίζα.
- ◆ Ισχύει ότι $f(x) \leq f(a) = g(a) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$ και οι ισότητες ισχύουν συγχρόνως μόνο αν $x = a$.

Επομένως το $x = a$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης.



Ανάλογα εργαζόμαστε όταν η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $a \in \Delta$, η συνάρτηση g μηδενίζεται μόνο στο $a \in \Delta$ και θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση:

$$f(x) = A + g^{2v}(x), \quad x \in \Delta, \quad v \in \mathbb{N}^* \text{ και } A = f(a)$$

Πραγματικά, το $x = a$ επαληθεύει την εξίσωση, ενώ για κάθε $x \neq a$ είναι $f(x) < A + g^{2v}(x)$. Γενικά, με παρόμοιο τρόπο λύνονται εξισώσεις της μορφής:

$$f(x) = g(x)$$

με $A = f(a) = g(a)$, το A είναι μέγιστο της f και $g(x) \geq g(a)$ (1) ή $A = f(a) = g(a)$, το A είναι ελάχιστο της f και

$g(x) \leq g(\alpha)$ (2), $x \in \Delta$, αρκεί το ίσον στις (1), (2) να ισχύει μόνο για $x = \alpha$.

Εφαρμογή 16^η

Να λύσετε την εξίσωση $e^x - x = 1 - (x^2 - x)^{2018}$.

Υπόδειξη

Προφανής ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = 0$. Θα αποδείξουμε ότι είναι και η μοναδική.

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - x$, βρίσκουμε ότι αυτή έχει ελάχιστο το $f(0) = 1$, δηλαδή $f(x) \geq f(0) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$e^x - x = 1 - (x^2 - x)^{2018} \Leftrightarrow f(x) = 1 - (x^2 - x)^{2018}$$

Αν $x \neq 0$, είναι $f(x) > 1 \geq 1 - (x^2 - x)^{2018}$, που σημαίνει ότι $f(x) \neq 1 - (x^2 - x)^{2018}$. Επομένως το $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα.

ΜΕΘΟΔΟΣ 11^η (Εξισώσεις με ολοκληρώματα)

Οι παρακάτω περιπτώσεις δεν απαιτούν παραγώγιση ή εύρεση πεδίου ορισμού συνάρτησης ολοκλήρωμα, οπότε δεν εξαιρούνται από την εξεταστέα ύλη.

Έστω ότι η εξίσωση έχει ή παίρνει τη μορφή $\int_a^{g(x)} f(t) dt = 0$, όπου f είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύουμε πρώτα ότι η f είναι θετική (ή αρνητική) στο $\mathbb{R}$. Στη συνέχεια θεωρούμε μια αρχική H της f και παρατηρούμε ότι η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$H(g(x)) - H(\alpha) = 0 \Leftrightarrow H(g(x)) = H(\alpha) \quad (1)$$

Είναι όμως $H'(x) = f(x) > 0$ (ή $H'(x) = f(x) < 0$), οπότε η συνάρτηση H είναι γνησίως μονότονη, συνεπώς και 1-1. Έτσι η εξίσωση (1) ισοδύναμα γίνεται:

$$H(g(x)) = H(\alpha) \Leftrightarrow g(x) = \alpha$$

Στη συνέχεια λύνουμε την νέα εξίσωση είτε αλγεβρικά, είτε με τις μεθόδους που περιγράψαμε παραπάνω.

Άλλος τρόπος

Αφού αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο, μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής.

Ας υποθέσουμε πχ ότι $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Η περίπτωση που η f είναι αρνητική, είναι τελείως παρόμοια.

♦ Αν ήταν $\alpha < g(x)$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}$, τότε θα ήταν και $\int_a^{g(x)} f(t) dt > 0$, άτοπο.

♦ Αν ήταν $\alpha > g(x)$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}$, τότε θα ήταν $\int_a^{g(x)} f(t) dt < 0$, άτοπο.

Επομένως, αναγκαστικά παίρνουμε $\int_a^{g(x)} f(t) dt = 0 \Leftrightarrow g(x) = \alpha$.

Εφαρμογή 17^η

Να βρείτε όλους τους πραγματικούς αριθμούς α , ώστε $\int_1^{e^\alpha} \sqrt{t^2 + 1} dt = 0$.

Λύση

Έστω F μια αρχική της $f(t) = \sqrt{t^2 + 1}$, $t \in \mathbb{R}$. Είναι $\int_1^{e^\alpha} \sqrt{t^2 + 1} dt = 0 \Leftrightarrow F(e^\alpha) - F(1) = 0$. Θεωρούμε επομένως τη συνάρτηση $g(x) = F(x) - F(1)$. Είναι τότε:

$$g'(x) = \sqrt{x^2 + 1} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση g είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1. Έτσι η εξίσωση γίνεται:

$$\int_1^{e^\alpha} \sqrt{t^2 + 1} dt = 0 \Leftrightarrow g(e^\alpha) = 0 \Leftrightarrow g(e^\alpha) = g(1) \Leftrightarrow e^\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Άλλος τρόπος

Επειδή $\sqrt{t^2+1} > 0$ και επιπλέον η συνάρτηση $h(t) = \sqrt{t^2+1}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι $\int_a^\beta \sqrt{t^2+1} dt \neq 0$ για κάθε $\alpha \neq \beta$ και πιο συγκεκριμένα:

♦ Αν $\alpha < \beta$, τότε $\int_\alpha^\beta \sqrt{t^2+1} dt > 0$.

♦ Αν $\alpha > \beta$, τότε $\int_\alpha^\beta \sqrt{t^2+1} dt < 0$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω σχόλια παίρνουμε ότι:

$$\int_1^{e^a} \sqrt{t^2+1} dt = 0 \Leftrightarrow e^a = 1 \Leftrightarrow a = 0 \quad \blacksquare$$

Εφαρμογή 18^η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και στη συνέχεια ότι είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $F(2f'(x)) = F(1)$, όπου F είναι αρχική της f .

Εξετάσεις 2014

Λύση

α) Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1 = f(0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$ όπου $h(x) = xe^x - e^x + 1$.

Το πρόσημο της h καθορίζει το πρόσημο της f' .

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ με $h'(x) = xe^x$.

Επίσης είναι:

♦ $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

♦ $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

♦ $h'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$. Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$		0	

Συνεπώς για $x > 0$ έχουμε $h(x) > h(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$. Όμοια, για $x < 0$ έχουμε $h(x) < h(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$.

Τελικά, αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

β) Θα βρούμε αρχικά την παράγωγο της f στο 0 με τη χρήση του ορισμού.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Ας έρθουμε τώρα στην εξίσωση που θέλουμε να λύσουμε: $F(2f'(x)) = F(1)$ (1).

Είναι φανερό ότι η πρώτη μας προσπάθεια είναι να εξασφαλίσουμε ότι η F είναι 1-1. Αλλά $F'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού οι όροι $e^x - 1$ και x είναι ομόσημοι για $x \neq 0$. Επομένως η F είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και 1-1. Η εξίσωση λοιπόν (1) γίνεται ισοδύναμα:

$$F(2f'(x)) = F(1) \Leftrightarrow 2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x) = f'(0)$$

Όπως στο πρώτο ερώτημα προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. Έτσι, η f' , ως γνησίως αύξουσα, είναι και $1-1$, οπότε παίρνουμε $f'(x) = f'(0) \Leftrightarrow x = 0$.

Εφαρμογή 19^η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$ και F μια αρχική της f . Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $F(x) + F(x^3) = F(x^5) + F(x^7)$ **β)** $F(x) + F(2x) = F(3x) + F(4x)$

Λύση

α) Είναι $F'(x) = f(x) > 0$, οπότε η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα.

Παρατηρούμε αρχικά ότι οι τιμές $x = 0, x = 1, x = -1$ είναι λύσεις της εξίσωσης. Θα αποδείξουμε ότι οι λύσεις αυτές είναι οι μοναδικές.

♦ Με $x > 1$ είναι $x < x^5$ και $x^3 < x^7$. Επομένως:

$$F(x) < F(x^5) \text{ και } F(x^3) < F(x^7)$$

Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$F(x) + F(x^3) < F(x^5) + F(x^7)$$

που σημαίνει ότι κανένας αριθμός $x > 1$ δεν επαληθεύει την εξίσωση (1).

♦ Με $0 < x < 1$ είναι $x > x^5$ και $x^3 > x^7$. Επομένως, εντελώς ανάλογα παίρνουμε:

$$F(x) > F(x^5) \text{ και } F(x^3) > F(x^7)$$

Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$F(x) + F(x^3) > F(x^5) + F(x^7)$$

που σημαίνει ότι κανένας αριθμός x δεν επαληθεύει την εξίσωση (1).

♦ Με $-1 < x < 0$ ή με $x < -1$ εργαζόμαστε εντελώς ανάλογα. Σημειώνουμε ότι στην πρώτη περίπτωση θα είναι $x < x^5$ και $x^3 < x^7$ ενώ στη δεύτερη περίπτωση θα είναι $x > x^5$ και $x^3 > x^7$.

Τελικά, οι μοναδικές ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x = 0, x = 1, x = -1$.

β) Έχουμε την εξίσωση, με σύνολο αναφοράς το $\mathbb{R}$:

$$F(x) + F(2x) = F(3x) + F(4x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Προφανής ρίζα είναι η $x = 0$. Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις $x > 0$ ή $x < 0$.

♦ Έστω $x > 0$. Είναι τότε $x < 3x$, $2x < 4x$. Επομένως, αφού η F είναι γνησίως αύξουσα, παίρνουμε:

$$F(x) < F(3x) \text{ και } F(2x) < F(4x)$$

Αυτές με πρόσθεση δίνουν $F(x) + F(2x) < F(3x) + F(4x)$, που σημαίνει ότι η εξίσωση δεν έχει θετικές ρίζες.

♦ Έστω ότι $x < 0$. Είναι τότε $x > 3x$, $2x > 4x$. Επομένως, αφού η F είναι γνησίως αύξουσα, παίρνουμε:

$$F(x) > F(3x) \text{ και } F(2x) > F(4x)$$

Αυτές με πρόσθεση δίνουν $F(x) + F(2x) > F(3x) + F(4x)$, που σημαίνει ότι η εξίσωση δεν έχει αρνητικές ρίζες.

Άρα η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = 0$. ■

Σημείωση

Ο τρόπος αυτός εφαρμόζεται για κάθε συνάρτηση f που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ .

ΜΕΘΟΔΟΣ 12^η (Εξισώσεις με αντίστροφη συνάρτηση)

A. Συχνά συναντάμε εξισώσεις της μορφής $f^{-1}(x) = x$. Από τη συμμετρία όμως των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} συμπεραίνουμε ότι οι εξισώσεις $f^{-1}(x) = x$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες. Αν λοιπόν δοθεί η μία από τις δύο, τότε επιλέγουμε την άλλη. Συνήθως δίνεται η πρώτη και επιλέγουμε τη δεύτερη, διότι η εύρεση της αντίστροφης είναι συχνά δυσχερής ή αδύνατη.

B. Έστω ότι κατά την διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης καταλήξουμε στην εξίσωση $f(f(x)) = x$, όπου f είναι κατάλληλη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ . Εφαρμόζουμε τότε την εξής βοηθητική πρόταση:

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, τότε:

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow f(x) = x$$

Απόδειξη

Η απόδειξη γίνεται με απαγωγή σε άτοπο, ως εξής:

Έστω α μια ρίζα της εξίσωσης $f(f(x)) = x$, δηλαδή $f(f(\alpha)) = \alpha$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- ♦ Αν $f(\alpha) < \alpha$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα παίρνουμε:

$$f(f(\alpha)) < f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha < f(\alpha)$$

πράγμα που είναι άτοπο, διότι $f(\alpha) < \alpha$.

- ♦ Αν $f(\alpha) > \alpha$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα παίρνουμε:

$$f(f(\alpha)) > f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha > f(\alpha)$$

πράγμα που είναι άτοπο, διότι $f(\alpha) > \alpha$.

Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε τελικά θα είναι $f(\alpha) = \alpha$.

Αντιστρόφως, αν το α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$, δηλαδή $f(\alpha) = \alpha$, τότε:

$$f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha$$

δηλαδή το α είναι ρίζα και της εξίσωσης $f(f(x)) = x$.

Γ. Τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } x = f(y)$$

διότι:

$$(x, y) \in C_f \Leftrightarrow f(x) = y \text{ και } (y, x) \in C_{f^{-1}} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

Δ. Για τη λύση της εξίσωσης $f^{-1}(x) = f(x)$ εργαζόμαστε όπως ακριβώς παραπάνω, αφού, αν θέσουμε $f^{-1}(x) = f(x) = y$, τότε $f(x) = y$ και $x = f(y)$.

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$$

Επομένως η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$ ανάγεται σε μία από τις απλούστερες εξισώσεις:

$$f^{-1}(x) = x \text{ ή } f(x) = x$$

Πραγματικά, η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(f(x)) = x$ και η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την παράγραφο Β.

*** Σε επίπεδο Πανελλαδικών Εξετάσεων η παραπάνω διαδικασία πρέπει να αποτελεί μέρος της λύσης.

Ε. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και γνησίως φθίνουσα, τότε ισχύει ότι:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = -x$$

Με άλλα λόγια, αν μια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και περιττή, τότε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = -x$.

Απόδειξη

Έστω ότι $f^{-1}(a) = f(a)$. Είναι τότε:

$$f^{-1}(a) = f(a) \Leftrightarrow f(f(a)) = a$$

Θα αποδείξουμε ότι $f(a) = -a$. Έστω ότι $f(a) \neq -a$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

♦ Αν $f(a) < -a$, τότε:

$$f(a) < -a \Leftrightarrow f(f(a)) > f(-a) \Leftrightarrow a > -f(a) \Leftrightarrow f(a) > -a, \text{ άτοπο}$$

♦ Αν $f(a) > -a$, τότε:

$$f(a) > -a \Leftrightarrow f(f(a)) < f(-a) \Leftrightarrow a < -f(a) \Leftrightarrow f(a) < -a, \text{ άτοπο}$$

Είναι επομένως $f(a) = -a$.

Αντιστρόφως τώρα, αν $f(a) = -a$, τότε:

$$f(a) = -a \Leftrightarrow -f(a) = a \Leftrightarrow f(-a) = a \Leftrightarrow f^{-1}(a) = -a \Leftrightarrow f^{-1}(a) = f(a)$$

Άρα το a είναι ρίζα και της εξίσωσης $f^{-1}(x) = f(x)$.

*** Σε επίπεδο Πανελλαδικών Εξετάσεων η παραπάνω διαδικασία πρέπει να αποτελεί μέρος της λύσης.

Εφαρμογή 20^η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 2$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = x - 1$.

δ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x - 1$.

ε) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$.

Λύση

α) Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1-1», οπότε ορίζεται η f^{-1} . Έχουμε:

$$f^{-1}(x) = 1 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = f(1) \Leftrightarrow x = 4$$

γ) Η f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, οπότε είναι:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = x - 1 &\Leftrightarrow x = f(x - 1) \Leftrightarrow x = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (x - 1) + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

διότι στην εξίσωση $x^2 - 3x + 3 = 0$ είναι $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$.

δ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, θα ισχύει:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) \geq x - 1 &\Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) \geq f(x - 1) \Leftrightarrow x \geq (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (x - 1) + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x \leq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 3) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \end{aligned}$$

διότι στο τριώνυμο $\varphi(x) = x^2 - 3x + 3$ είναι $a = 1 > 0$ και $\Delta = -3 < 0$, οπότε $\varphi(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in (-\infty, 0]$.

ε) Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, σύμφωνα με το σχόλιο είναι:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + x + 2 = x \Leftrightarrow x^3 = -2 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2}$$

Εφαρμογή 21^η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{e}{x} + x$.

α) Να αποδειχθεί ότι ορίζεται η f^{-1} .

β) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

Λύση

α) Είναι $D_f = (0, +\infty)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Έστω $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$. Τότε $\ln x_1 < \ln x_2$ και $-\frac{e}{x_1} < -\frac{e}{x_2}$. Άρα:

$$\ln x_1 - \frac{e}{x_1} + x_1 < \ln x_2 - \frac{e}{x_2} + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Η μονοτονία της f προκύπτει εύκολα και με χρήση παραγώγων, αφού για παράδειγμα είναι:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{e}{x^2} + 1 > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε και «1-1». Ορίζεται λοιπόν η $f^{-1} : f(D_f) \rightarrow \mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = x$, διότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία με εξίσωση $y = x$. Έτσι:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = x &\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow \ln x - \frac{e}{x} + x = x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln x - \frac{e}{x} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \end{aligned}$$

όπου $g(x) = \ln x - \frac{e}{x}$, $x > 0$. Όμως η g είναι γνησίως αύξουσα (προκύπτει με τον ορισμό ή με παράγωγο) και $g(e) = 0$.

Άρα $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$.

Επομένως $f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow x = e$.

Γ2. Ανισώσεις

Για την λύση ανισώσεων εφαρμόζουμε σχετικά τις ίδιες ή ανάλογες μεθόδους με αυτές που συναντήσαμε στην επίλυση εξισώσεων.

Η πιο σημαντική διαφορά είναι ότι στις ανισώσεις δεν παίζει κανένα ρόλο η ιδιότητα του 1-1, αλλά η μονοτονία.

Οι σημαντικότερες περιπτώσεις είναι οι εξής:

1. Αν είναι εφικτό, φέρνουμε την ανίσωση στην ισοδύναμη μορφή $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$. Στη συνέχεια βρίσκουμε τη μονοτονία της f και μία ρίζα, έστω α , της εξίσωσης $f(x) = 0$, με παρατήρηση (ή άλλον τρόπο). Με βάση λοιπόν τον ορισμό της μονοτονίας παίρνουμε:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x > \alpha, & \text{αν η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα.} \\ x < \alpha, & \text{αν η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα.} \end{cases}$$

Προφανώς, δεν παραλείπουμε να εξασφαλίσουμε ότι οι τιμές που βρήκαμε ανήκουν και στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Ανάλογα εργαζόμαστε και στις ανισώσεις της μορφής $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

2. Αν η ανίσωση έχει πιο σύνθετη μορφή, προσπαθούμε να την φέρουμε στη μορφή $f(g(x)) > f(h(x))$, όπου f είναι κατάλληλη γνησίως μονότονη συνάρτηση. Στην περίπτωση αυτή, όπως και πριν, παίρνουμε:

$$f(g(x)) > f(h(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > h(x), & \text{αν η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα.} \\ g(x) < h(x), & \text{αν η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα.} \end{cases}$$

Εντελώς ανάλογα αντιμετωπίζονται οι περιπτώσεις:

$$f(g(x)) < f(h(x)), f(g(x)) \geq f(h(x)), f(g(x)) \leq f(h(x))$$

3. Ενδιαφέρον έχουν επίσης ανισώσεις της μορφής $\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt > 0$ που δεν αντιμετωπίζονται με τις παραπάνω μεθόδους. Στην περίπτωση λοιπόν αυτή, εργαζόμαστε ως εξής:

- Διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και δεν αλλάζει πρόσημο στο πεδίο ορισμού της, επιπλέον όμως να μην είναι παντού μηδέν. Πιο ευνοϊκή περίπτωση είναι εκείνη, που η f είναι παντού θετική ή παντού αρνητική.
- Από βασική πρόταση των ολοκληρωμάτων παίρνουμε τότε ότι:

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < h(x), \text{ αν } f(x) \geq 0 \\ g(x) > h(x), \text{ αν } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

κάτι που, αν χρειαστεί, αιτιολογείται απλά με άτοπο απαγωγή.

Εφαρμογή 22^η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x - 3$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

β) Να λυθεί η εξίσωση $x^5 + x^3 + x = 3$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $e^{5x} + e^{3x} + e^x < 3$.

Υπόδειξη

Πρόκειται για απλό αλλά χαρακτηριστικό παράδειγμα.

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής και γνησίως μονότονη, αρκεί να βρούμε τα όριά της στο $-\infty$ και στο $+\infty$. Τα όρια αυτά είναι αντίστοιχα ίσα με $-\infty$ και $+\infty$. Επομένως $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

β) Είναι:

$$x^5 + x^3 + x = 3 \Leftrightarrow x^5 + x^3 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Όμως } f(1) = 1 + 1 + 1 - 3 = 0 \quad (2).$$

Έτσι η $(1) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1$, διότι η f ως γνησίως μονότονη είναι και 1-1.

γ) Με παρατήρηση διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση γράφεται:

$$(e^x)^5 + (e^x)^3 + e^x - 3 < 0 \Leftrightarrow f(e^x) < 0 \Leftrightarrow f(e^x) < f(1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$$

Τονίζουμε ότι επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, παίρνουμε ότι:

$$f(e^x) < f(1) \Leftrightarrow e^x < 1.$$

Δ. ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ

1. Ύπαρξη ριζών εξασφαλίζουμε:

- α) Με το θεώρημα Bolzano στη συνάρτηση της διαφοράς ή μιας ισοδύναμης μορφής.
- β) Με το θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών ή το θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης τιμής.
- γ) Με το θεώρημα Rolle σε αρχική της συνάρτησης διαφοράς.
- δ) Με άτοπο και χρήση της πρότασης που αφορά συνεχή συνάρτηση σε διάστημα χωρίς ρίζες (οπότε θα διατηρεί πρόσημο).
- ε) Με την εύρεση του συνόλου τιμών κατάλληλης συνάρτησης.

2. Το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης το βρίσκουμε συνήθως με τη μελέτη της συνάρτησης διαφοράς:

- Βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας.
- Βρίσκουμε το σύνολο τιμών $f(\Delta)$ της συνάρτησης στο κάθε υποδιάστημα Δ του πεδίου ορισμού που η συνάρτηση είναι συνεχής και διατηρεί μονοτονία.
- Εξετάζουμε αν στο κάθε σύνολο $f(\Delta)$ ανήκει το 0. Αν ναι, τότε έχουμε μοναδική ρίζα στο Δ . Αν όχι, τότε στο Δ δεν έχουμε ρίζα.

3. Αν θέλουμε να αποδείξουμε πιο ειδικά ότι μιας εξίσωσης έχει μοναδική ρίζα, τότε αποδεικνύουμε αρχικά την ύπαρξη με τους γνωστούς τρόπους και για την μοναδικότητα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε τη μονοτονία, είτε το 1-1, είτε να εργαστούμε με άτοπο (χρήση του θεωρήματος Rolle ή της διατήρησης προσήμου).

Σχόλιο

Την παραπάνω διαδικασία, δηλαδή τη διαδικασία εύρεσης του πλήθους ριζών, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο την εφαρμόζουμε:

α) Για την συνάρτηση f' (ή στη συνάρτηση που θα οδηγήσει η εξίσωση $f'(x) = 0$), αν θέλουμε να βρούμε το **πλήθος των τοπικών ακροτάτων** μιας συνάρτησης f .

β) Για την f'' (ή στη συνάρτηση που θα οδηγήσει η εξίσωση $f''(x) = 0$), αν θέλουμε να βρούμε το **πλήθος των σημείων καμπής** της f .

Τονίζουμε ότι η εύρεση του πλήθους ριζών μιας εξίσωσης, στην έμμεση ή άμεση μορφή, αποτελεί μόνιμο θέμα στις εξετάσεις και για το λόγο αυτό πρέπει να δοθεί η δέουσα βαρύτητα.

4. Στο ερώτημα "**Να αποδείξετε ότι μια εξίσωση έχει το πολύ κ ρίζες**", εργαζόμαστε συνήθως με άτοπο. Υποθέτουμε δηλαδή ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον $\kappa + 1$ ρίζες και με διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος Rolle στα διαστήματα των ριζών για τις f, f', f'' κλπ καταλήγουμε σε άτοπο. Με f συμβολίζουμε τη συνάρτηση της διαφοράς ή κάποια άλλη συνάρτηση στην οποία μάς οδηγεί η δοσμένη συνάρτηση με ισοδύναμους μετασχηματισμούς. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται με λεπτομέρειες στο βοήθημα.

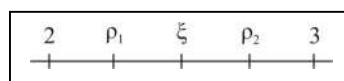
Παράδειγμα 1°

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 4x + \mu = 0$ έχει, για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$, το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(2, 3)$.

Υπόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 4x + \mu, \quad x \in \mathbb{R}$$



Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(2, 3)$. Αν ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$ είναι δύο από τις ρίζες αυτές, τότε έχουμε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Αλλά:

♦ $f'(x) = x^2 - 5x + 4$.

♦ $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi^2 - 5\xi + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = 1 \\ \text{ή} \\ \xi_2 = 4 \end{cases}$.

Επειδή $\xi_1, \xi_2 \notin (2, 3)$, η δοσμένη εξίσωση έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(2, 3)$.

Παράδειγμα 2°

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $4\lambda x^3 + 6x^2 - 4(\lambda + 1)x + \lambda = 0$, όπου $\lambda \neq 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Υπόδειξη

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = 4\lambda x^3 + 6x^2 - 4(\lambda + 1)x + \lambda$, τότε διαπιστώνουμε ότι το θεώρημα Bolzano δεν εφαρμόζεται, γιατί δε μπορούμε να αποδείξουμε ότι $f(0)f(1) < 0$.

Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση:

$$F(x) = \lambda x^4 + 2x^3 - 2(\lambda + 1)x^2 + \lambda x,$$

η οποία έχει παράγωγο την f .

Η F είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, με $F(0) = 0$ και $F(1) = \lambda + 2 - 2\lambda - 2 + \lambda = 0$, δηλαδή $F(0) = F(1)$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 0$$

Άρα το $x = \xi$ είναι ρίζα της δοσμένης εξίσωσης.

Παράδειγμα 3°

Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$.

β) η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x = 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 1)$.

Υπόδειξη

α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση:

$$f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$$

στα διαστήματα $(-1, 0)$ και $(0, 1)$.

β) Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για την $f(x)$ στο $[\xi_1, \xi_2]$, όπου $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$. Επομένως η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 1)$.

Παράδειγμα 4°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$.

α) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f .

β) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της f .

γ) Να εξετασθεί αν η f έχει ολικά ακρότατα.

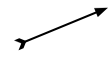
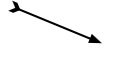
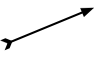
δ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

ε) Να βρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $2x^3 + 8 = 3x(x + 4)$.

Υπόδειξη

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$. Είναι:

- $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12, x \in \mathbb{R}$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 2$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					
		T.M.	T.E.		

Από τον πίνακα προσήμου της f' προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1]$, $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 2]$.

β) Από τη μορφή της μονοτονίας της f προκύπτει ότι:

- ♦ Το $f(-1) = -2 - 3 + 12 + 8 = 15$ είναι τοπικό μέγιστο της f .
- ♦ Το $f(2) = 16 - 12 - 24 + 8 = -12$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

γ) Επειδή:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 8) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 8) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$

συμπεραίνουμε ότι η f δεν έχει ούτε ολικό ελάχιστο, ούτε ολικό μέγιστο.

δ) Η f είναι συνεχής στο $A = \mathbb{R}$, με $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = \mathbb{R}$. Το γεγονός αυτό προκύπτει από το Θ.Ε.Τ. Η μονοτονία της f δεν παίζει στην περίπτωση αυτή κανένα ρόλο και δεν είναι απαραίτητη.

Σχόλιο

Επειδή $f(A) = \mathbb{R}$, προκύπτει ότι η f δεν έχει ολικό ελάχιστο ή ολικό μέγιστο.

ε) Η εξίσωση παίρνει τη μορφή $f(x) = 0$.

Έστω $\Delta_1 = (-\infty, -1)$, $\Delta_2 \in [-1, 2)$ και $\Delta_3 = [2, +\infty)$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

- Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 15$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ_1 . Άρα $f(\Delta_1) = (-\infty, 15)$.

Επειδή $0 \in f(\Delta_1)$ και η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ_1 , συμπεραίνουμε ότι η f έχει μία ακριβώς ρίζα στο Δ_1 .

- Είναι $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 15$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -12$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 . Άρα $f(\Delta_2) = (-12, 15]$.

Επειδή $0 \in f(\Delta_2)$ και η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ_2 , συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο Δ_2 .

- Όμοια βρίσκουμε ότι $f(\Delta_3) = [-12, +\infty)$ και έτσι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο Δ_3 . Άρα, τελικά, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες.

Παράδειγμα 5°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x - 1$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2019}$, $x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

γ) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 2018$.

(Εξετάσεις 2012 – Κ – Γ)

Παράδειγμα 6°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

β) Να βρείτε το πλήθος των ακροτάτων της f καθώς και το είδος τους.

Λύση

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R}$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, με:

$$f'(x) = 2e^{x-2} - 2x \quad \text{και} \quad f''(x) = 2e^{x-2} - 2 = 2(e^{x-2} - 1).$$

Είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα προσήμου της f'' , από όπου προκύπτει ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$. Το $M(2, f(2))$, δηλαδή το $M(2, -2)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$			

β) Για να βρούμε το πλήθος των τοπικών ακροτάτων της f , αρκεί να βρούμε το πλήθος των ριζών της f' στις οποίες η f' αλλάζει πρόσημο (δηλαδή η f αλλάζει μονοτονία).

Η συνάρτηση f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 2$ με τιμή $f'(2) = -2$.

Θα βρούμε το πλήθος ριζών της f' . Για τον σκοπό αυτό θα βρούμε όπως είναι λογικό το σύνολο τιμών της f' σε καθένα από τα διαστήματα μονοτονίας της. Έστω λοιπόν τα διαστήματα $\Delta_1 = (-\infty, 2]$ και $\Delta_2 = [2, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στα Δ_1 , Δ_2 και επιπλέον:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2(e^{x-2} - x)] = +\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0.$$

$$f'(2) = -2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2e^{x-2} \left[1 - \frac{x}{e^{x-2}} \right] \right) = +\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty \text{ και:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-2}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-2}} = 0$$

$$\text{Συνεπώς } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{e^{x-2}} \right) = 1 > 0.$$

Επομένως είναι $f'(\Delta_1) = [-2, +\infty)$ και $f'(\Delta_2) = [-2, +\infty)$.

- ♦ Παρατηρούμε ότι $0 \in f'(\Delta_1)$, οπότε υπάρχει $x_1 \in (-\infty, 2)$: $f'(x_1) = 0$. Το x_1 είναι μοναδικό, διότι η f' είναι γνησίως μονότονη στο Δ_1 .
- ♦ Είναι επίσης $0 \in f'(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει $x_2 \in (2, +\infty)$: $f'(x_2) = 0$. Το x_2 είναι μοναδικό, διότι η f' είναι γνησίως μονότονη στο Δ_2 .

x	$-\infty$	x_1	2	x_2	$+\infty$
$f''(x)$	-	-	0	+	+
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$					

Το πρόσημο της f' προκύπτει έτσι άμεσα από τη μονοτονία της και συγκεκριμένα:

Για $x < x_1$ είναι $f'(x) > 0$, για $x \in (x_1, x_2)$ είναι $f'(x) < 0$ και για $x > x_2$ είναι $f'(x) > 0$.

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, x_1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_2, +\infty)$.

Συνεπώς η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .

Παρατήρηση

Την ίδια ακριβώς πορεία θα χρησιμοποιήσουμε αν θέλουμε να βρούμε το πλήθος των σημείων καμπής της συνάρτησης $g(x) = 6e^{x-2} - x^3$.

Ε. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Ε₁. Συνήθεις ανισότητες

Ανισότητες μπορούμε να αποδείξουμε κυρίως με τους παρακάτω τρόπους !

α) Με το θεώρημα μέσης τιμής (Θ.Μ.Τ.) σε κατάλληλη συνάρτηση σε κατάλληλο διάστημα.

β) Με χρήση του ορισμού της μονοτονίας.

γ) Με μελέτη της συνάρτησης διαφοράς και εύρεση ολικού ακροτάτου ή χρήση του ορισμού του ακροτάτου (ειδικά αν έχουμε συγκεκριμένες τιμές).

δ) Με ολοκλήρωση κατά μέλη μιας ανισότητας.

Παράδειγμα 1°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$.

Παράδειγμα 2°

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$, $x > 0$ και μια αρχική συνάρτηση F της f με $F(a) = 0$.

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(f(x))^2 \ln \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$.

β) Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \leq x-1$, που ισχύει για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $F(x) + F(3x) > 2F(2x)$, για κάθε $x > 0$.

Παράδειγμα 3°

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με:

$$f(0) = 0 \text{ και } f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f .

β) Να αποδειχθεί ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να βρεθεί ο αριθμός $f''(0)$.

γ) Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f και f' είναι γνησίως αύξουσες.

δ) Να αποδειχθεί ότι $\frac{x}{2} \leq f(x) \leq xf'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει το «ίσον»;

ε) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=0$, $x=1$ και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2}f(1)$.

Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \quad (1)$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε:

$$f'(x) + e^{-f(x)}f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x)[1 + e^{-f(x)}] = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} \quad (2)$$

β) Το β' μέλος της (2) είναι πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε η f' παραγωγίζεται. Επομένως:

$$f''(x) = -\frac{(1+e^{-f(x)})'}{(1+e^{-f(x)})^2} = \frac{f'(x)e^{-f(x)}}{(1+e^{-f(x)})^2} = \frac{e^{-f(x)}}{(1+e^{-f(x)})^3}$$

Προφανώς $f''(0) = \frac{1}{8}$, αφού $f(0) = 0$.

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα, διότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η μονοτονία όμως της f προκύπτει και ως εξής:
Αν η f δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε υπάρχουν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \geq f(x_2)$. Αλλά τότε:

$$e^{-f(x_1)} \leq e^{-f(x_2)}, \quad -e^{-f(x_1)} \geq -e^{-f(x_2)}$$

και επειδή $f(x_1) \geq f(x_2)$, με πρόσθεση αυτής και της τελευταίας κατά μέλη παίρνουμε:

$$f(x_1) - e^{-f(x_1)} \geq f(x_2) - e^{-f(x_2)} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow x_1 - 1 \geq x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$$

που είναι άτοπο, διότι $x_1 < x_2$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Η f' είναι επίσης γνησίως αύξουσα, διότι $f''(x) > 0$.

Ωστόσο η μονοτονία της f' προκύπτει κατασκευαστικά και με τον ορισμό ως εξής:

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

- ♦ $f(x_1) < f(x_2)$, $e^{-f(x_1)} > e^{-f(x_2)}$.
- ♦ $1 + e^{-f(x_1)} > 1 + e^{-f(x_2)} > 0$ και $\frac{1}{1 + e^{-f(x_1)}} < \frac{1}{1 + e^{-f(x_2)}}$.

Επομένως $f'(x_1) < f'(x_2)$, που σημαίνει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Σχόλιο

Είναι πολύ βασικό να μπορούμε να αποδείξουμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης με χρήση του ορισμού (ή και με άτοπο), διότι πιθανόν σε κάποιο θέμα η παραγωγισιμότητα της συνάρτησης να μην είναι δεδομένη.

δ) Για $x = 0$ η σχέση $\frac{x}{2} \leq f(x) \leq xf'(x)$ ισχύει ως ισότητα.

- ♦ Έστω $x > 0$. Από το Θ.Μ.Τ. (προφανώς πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις) για την f στο διάστημα $[0, x]$ υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \quad (3)$$

Όμως $0 < \xi < x$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι:

$$f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow \frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$$

διότι $x > 0$.

- ♦ Έστω $x < 0$. Πάλι από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x, 0)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = \frac{f(x)}{x} \quad (4)$$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $x < \xi < 0$, παίρνουμε:

$$f'(x) < f'(\xi) < f'(0) \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} f'(x) < \frac{f(x)}{x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow xf'(x) > f(x) > \frac{x}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\frac{x}{2} \leq f(x) \leq xf'(x)$, που είναι η ζητούμενη ανισότητα.

Ας σημειώσουμε ότι στην παραπάνω σχέση το «ίσον» ισχύει μόνο αν $x = 0$, αφού για $x > 0$ ή $x < 0$ ισχύει ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$.

ε) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, με $x > 0$ παίρνουμε $f(x) > f(0) = 0$. Άρα $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Έτσι $E = \int_0^1 f(x)dx$. Επειδή $\frac{x}{2} \leq f(x) \leq xf'(x)$ για κάθε $x \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, με βάση και το ερώτημα (α) παίρνουμε:

$$\int_0^1 \frac{x}{2} dx < \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 xf'(x) dx \quad (1)$$

Άρα:

- $E > \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$.
- $E < \int_0^1 xf'(x) dx \Leftrightarrow E < [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow E < f(1) - E \Leftrightarrow E < \frac{1}{2} f(1)$.

Τελικά $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$.

Ε2. Ανισότητες στο Ολοκλήρωμα

Οι ανισότητες με ολοκληρώματα παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον αλλά και δυσκολίες. Ανάμεσα στις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις είναι η $\int_a^b f(x) dx \geq M$. Για την απόδειξη ανισοτήτων στο ολοκλήρωμα, ανάμεσα σε άλλα, εστιάζουμε στα εξής:

- Προσπαθούμε να βρούμε ένα ακρότατο για τη συνάρτηση f και μετά να ολοκληρώσουμε.
- Προσπαθούμε να βρούμε το πρόσημο της f (με μελέτη) και μετά να ολοκληρώσουμε.
- Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάποια συνάρτηση g και μετά ολοκληρώνουμε.
- Μελετάμε τη συνάρτηση $G(x) = F(x) - F(a)$, όπου F είναι μια παράγουσα της f και σε αυτή εφαρμόζουμε τον ορισμό της μονοτονίας ($\beta > \alpha$) ή του ακροτάτου. Σημειώνουμε ότι $G(\beta) = F(\beta) - F(a) = \int_a^\beta f(x) dx$.

ν) Για κυρτές συναρτήσεις εφαρμόζουμε τη σχέση $f(x) \geq f'(\gamma)(x - \gamma) + f(\gamma)$, όπου γ είναι κατάλληλα επιλεγμένος αριθμός (για τον οποίο έχουμε πληροφορίες) και ολοκληρώνουμε στο $[a, \beta]$. Το 2^ο μέλος προέρχεται από την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο με τετμημένη γ . Παίρνουμε έτσι ότι:

$$f(x) \geq f'(\gamma)(x - \gamma) + f(\gamma) \Rightarrow \int_a^\beta f(x) dx > \int_a^\beta (f'(\gamma)(x - \gamma) + f(\gamma)) dx = A$$

Αντίστοιχα εργαζόμαστε για κοίλες συναρτήσεις. Ιδιαίτερη προσοχή δείχνουμε στη διάταξη των άκρων ολοκλήρωσης.

Σχόλιο

Αν τη σχέση $f(x) \geq y_\varepsilon \Leftrightarrow f(x) \geq f'(\gamma)(x - \gamma) + f(\gamma)$ την πολλαπλασιάσουμε με μια μη αρνητική συνάρτηση $g(x)$, όχι ίση με μηδέν, παίρνουμε:

$$f(x)g(x) \geq y_\varepsilon g(x)$$

Από τη σχέση αυτή, με ολοκλήρωση στο $[a, \beta]$, προκύπτει ότι:

$$\int_a^\beta f(x)g(x) dx > \int_a^\beta y_\varepsilon g(x) dx = A$$

Την τακτική αυτή εφαρμόζουμε ακόμα και στην περίπτωση που θέλουμε να βρούμε πρόσημο τιμών συνάρτησης (για να κάνουμε στη συνέχεια π.χ. Bolzano), αλλά παρουσιάζονται ορισμένα ολοκληρώματα (με γνωστά άκρα), τα οποία θέλουμε να συγκρίνουμε με άλλες αριθμητικές τιμές.

Αν για παράδειγμα θέλουμε να βρούμε το πρόσημο του $F(2) = 8 - \int_1^3 f(t) dt$ και ξέρουμε ότι η f είναι κυρτή, τότε βρίσκουμε την εξίσωση μιας εφαπτομένης, πχ στο 1 και αν αυτή είναι η $\varepsilon: y = 2x$, τότε από τη σχέση $f(x) \geq 2x$ (1) παίρνουμε:

$$\int_1^3 f(t)dt > \int_1^3 2tdt = 8$$

διότι στην (1) δεν ισχύει παντού η ισότητα. Επομένως: $F(2) = 8 - \int_1^3 f(t)dt < 0$

vi) Ορισμένες φορές ξεκινάμε από μια βασική ανισότητα που προκύπτει από τα δεδομένα ή τα άλλα υποερωτήματα, ολοκληρώνουμε, κάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση και το αρχικό ολοκλήρωμα επανεμφανίζεται.

vii) Κάνουμε δύο Θ.Μ.Τ. χωρίζοντας κάποιο διάστημα στη μέση και εργαζόμαστε σε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) - F(a)$, όπου F είναι μια παράγουσα της f , η οποία αποδεικνύουμε πρώτα ότι είναι κυρτή ή κοίλη, ώστε να έχουμε τη μονοτονία της G' .

Θυμίζουμε ότι:

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ και $f(x) \leq g(x)$, για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε:

$$\int_a^\beta f(x)dx \leq \int_a^\beta g(x)dx$$

Αν μάλιστα η ισότητα δεν ισχύει παντού στο $[a, \beta]$, τότε η διάταξη είναι γνήσια, δηλαδή:

$$\int_a^\beta f(x)dx < \int_a^\beta g(x)dx$$

viii) Χρησιμοποιούμε τις ανισότητες $e^x \geq x+1$, $\ln x \leq x-1$, $|\eta\mu x| \leq |x|$ ή ακόμα τις ανισότητες $|\eta\mu x| \leq 1, |\csc x| \leq 1$ καταλήγουμε βήμα-βήμα σε μια ανισότητα της μορφής $f(x) \geq g(x)$ ή $f(x) \leq g(x)$, για κάποια συνεχή συνάρτηση g . Στη συνέχεια και αφού διαπιστώσουμε ότι δεν ισχύει παντού η ισότητα, ολοκληρώνουμε στο διάστημα $[a, \beta]$ και παίρνουμε:

$$\int_a^\beta f(x)dx > \int_a^\beta g(x)dx = A$$

Παράδειγμα 4°

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\blacklozenge f(x) \neq x \quad \text{και} \quad \blacklozenge f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \blacklozenge f(0) = 3$$

σταθερή.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι αν F είναι αρχική της f , τότε:

$$F(x+1) - F(x) < F(x+2) - F(x+1), \quad x \in \mathbb{R}$$

(Εξετάσεις 2010 – Κ – Δ)

Παράδειγμα 5°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Αν $a > 0$, τότε $2af(a) < \int_a^{3a} f(t)dt < 2af(3a)$.

Υπόδειξη

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, διότι $x + \sqrt{x^2 + 1} \geq x + \sqrt{x^2} \geq x + |x| \geq 0$. Βρίσκουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Θα εφαρμόσουμε την ισχυρή μέθοδο της αρχικής συνάρτησης.

Παρατηρούμε ότι η διαφορά των άκρων του ολοκληρώματος είναι $3a - a = 2a$. Αν F είναι αρχική της f (υπάρχει διότι η f είναι συνεχής), τότε η δοσμένη σχέση, με βάση και το Θ.Μ.Τ. για την F στο διάστημα $[a, 3a]$, γράφεται:

$$\int_a^{3a} f(t) dt < 2af(3a) \Leftrightarrow F(3a) - F(a) < 2af(3a) \Leftrightarrow \frac{F(3a) - F(a)}{3a - a} < f(3a) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F'(\xi) < f(3a) \Leftrightarrow f(\xi) < f(3a)$$

Η τελευταία σχέση μας οδηγεί στη μονοτονία της f . Πράγματι, η συνάρτηση f έχει παράγωγο:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$$

οπότε είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή $a < \xi < 3a$, θα είναι $f(\xi) < f(3a)$ και η ζητούμενη αποδείχθηκε. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε και το άλλο σκέλος.

Άλλος τρόπος

Από τη μορφή του ολοκληρώματος θεωρούμε $a \leq t \leq 3a$ και από την μονοτονία της f παίρνουμε $f(a) \leq f(t) \leq f(3a)$ χωρίς να ισχύει παντού η ισότητα. Επειδή η f είναι συνεχής, παίρνουμε:

$$\int_a^{3a} f(a) dt < \int_a^{3a} f(t) dt < \int_a^{3a} f(3a) dt \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(a)(3a - a) < \int_a^{3a} f(t) dt < f(3a)(3a - a) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2af(a) < \int_a^{3a} f(t) dt < 2af(3a)$$

Ας προσέξουμε ότι η ολοκλήρωση γίνεται παντού ως t (βάζουμε δηλαδή παντού dt).

Άλλος τρόπος

Θα αποδείξουμε αρχικά το δεύτερο σκέλος, δηλαδή ότι:

$$\int_a^{3a} f(t) dt \leq 2af(3a)$$

Όμως $2a = \int_a^{3a} 1 \cdot dt$. Έτσι, η ζητούμενη σχέση γράφεται $\int_a^{3a} (f(t) - f(3a)) dt \leq 0$, η οποία, όπως περιγράψαμε και στα σχόλια, ισχύει διότι $a \leq t \leq 3a$, η f είναι γνησίως αύξουσα, γεγονός που δίνει ότι $f(t) \leq f(3a)$ και τέλος διότι η $h(t) = f(t) - f(3a)$ είναι συνεχής, αλλά όχι παντού μηδέν. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε και το άλλο σκέλος.

Σχόλιο

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι:

$$\text{Αν } f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \text{ τότε } 3af(2a) < \int_{2a}^{5a} f(t) dt < 3af(5a), \text{ για κάθε } a \neq 0$$

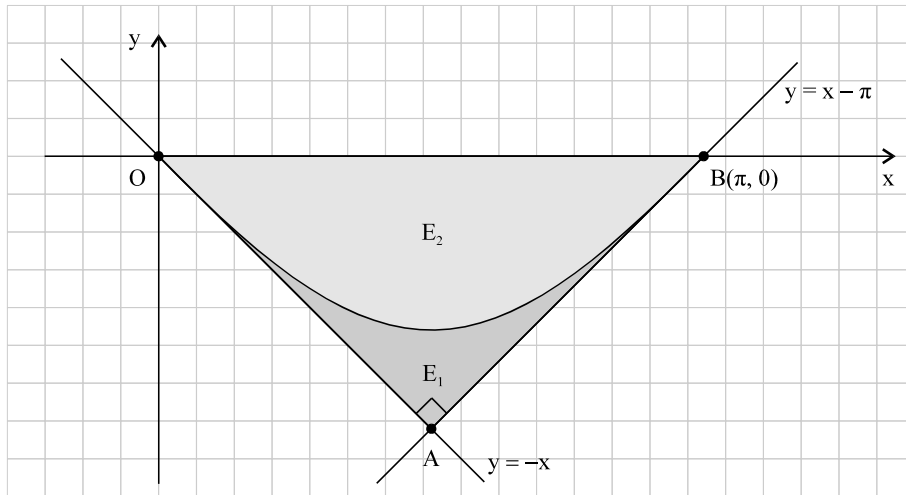
Η απόδειξη να γίνει από το μαθητή με όλους τους παραπάνω τρόπους.

Παράδειγμα 6° - Θέμα Γ (2017 - Κ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$, και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτομένες (ε_1) , (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το A , τις οποίες και να βρείτε.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$.

Υπόδειξη

β) Από το σχήμα παίρνουμε ότι $f(x) \geq x - \pi \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \geq 1 - \frac{\pi}{x}$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = \pi$. Άρα, διαιρώντας με $0 < x \leq \pi$ και ολοκληρώνοντας στο $[1, e]$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx &> \int_1^e dx - \pi \int_1^e \frac{1}{x} dx > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx &> (e-1) - \pi [\ln x]_1^e \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx &> e-1-\pi \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7ο - Θέμα Δ (2017 – Ε)

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} -\frac{\eta\mu x}{x} + \alpha, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα $[0, 2]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Αν επιπλέον η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

Δ2. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f .

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^2 f(x) dx < \frac{3\pi}{2} - 1$.

Υπόδειξη

Δ4. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^2 f(x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2) dx = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x \right]_0^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + 0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx \end{aligned}$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι $\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + 0 < \frac{3\pi}{2} - 1$. Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ έχουμε:

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \geq f(x) \geq f(0) \Rightarrow 2 \leq f(x) \leq 3 - \frac{2}{\pi} \quad (1) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2dx &< \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x)dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(3 - \frac{2}{\pi}\right)dx \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot \frac{\pi}{2} &< \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x)dx < \left(3 - \frac{2}{\pi}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x)dx < \frac{3\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

Η φορά στην ανισότητα που προκύπτει είναι γνήσια, διότι στη σχέση (1) δεν ισχύει παντού η ισότητα.

Παράδειγμα 8° - ΟΕΦΕ 2018

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(\sin x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι $2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx > 1$.

Υπόδειξη

α) Η f έχει ολικό μέγιστο το $f(0) = 0$.

β) Η συνάρτηση κάτω από το ολοκλήρωμα πρέπει να συνδεθεί με την f . Είναι:

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} \geq \ln(\sin x), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Η σχέση αυτή δίνει:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \geq e^{\ln(\sin x)} = \sin x$$

και το ίσον δεν ισχύει παντού (ισχύει μόνο για $x = 0$). Επομένως:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx > \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx = [\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 9° - Θέμα Δ (2016 – Κ)

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \cdot \eta\mu x dx = \pi$,
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$,
- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(\pi) = \pi$ και $f'(0) = 1$.

Δ2. α) Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$.

Υπόδειξη

Δ3. Στο ολοκλήρωμα $\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx$ θέτουμε $u = \ln x$, οπότε $du = \frac{1}{x} dx$. Επομένως:

$$x = 1 \Rightarrow u = 0 \text{ και } x = e^\pi \Rightarrow u = \pi$$

Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^\pi f(u) du \quad (1)$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[0, \pi]$, και ισχύει $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi$, θα είναι:

$$0 \leq u \leq \pi \Rightarrow f(0) \leq f(u) \leq f(\pi) \Rightarrow 0 \leq f(u) \leq \pi$$

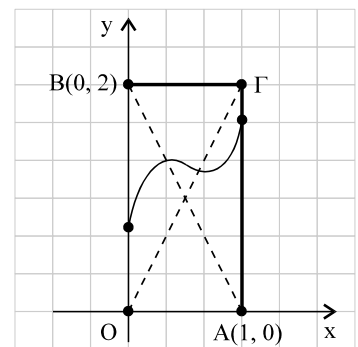
Έτσι, ολοκληρώνοντας την τελευταία ανισότητα, αφού το ίσον δεν ισχύει παντού, παίρνουμε:

$$0 < \int_0^\pi f(u) du < \int_0^\pi \pi du = \pi^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$$

Παράδειγμα 10°

Η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο ορθογώνιο του διπλανού σχήματος και δεν διέρχεται από τις κορυφές O και Γ . Να αποδείξετε ότι:



α) Η C_f τέμνει τη διαγώνιο OG σε εσωτερικό της σημείο.

β) Η C_f τέμνει τη διαγώνιο AB .

γ) $\int_0^1 f(x) dx < 2$.

δ) $\int_0^1 f^2(x) dx < 2 \int_0^1 f(x) dx$.

Υπόδειξη

α) Επειδή $\lambda_{OG} = \frac{2}{1} = 2$, η διαγώνιος OG έχει εξίσωση $y = 2x$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$

τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 2x_1$.

Θεωρούμε, όπως είναι λογικό, τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2x$, $x \in [0, 1]$.

- Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
- $g(0) = f(0) > 0$, διότι η C_f δεν περνάει από το O και η C_f βρίσκεται μέσα στο ορθογώνιο.
- $g(1) = f(1) - 2 < 0$, διότι η C_f δεν διέρχεται από το Γ , αφού βρίσκεται μέσα στο ορθογώνιο, οπότε $f(1) < 2$.

Άρα, $g(0)g(1) < 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = 2x_1$, που είναι η ζητούμενη σχέση.

β) Θα βρούμε πρώτα την εξίσωση της διαγωνίου AB .

- $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 0}{0 - 1} = -2$.
- $(AB): y - y_A = \lambda_{AB}(x - x_A) \Leftrightarrow y - 0 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2(x - 1)$.

Για να τέμνει λοιπόν η C_f τη διαγώνιο AB αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_2 \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_2) = -2(x_2 - 1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + 2(x - 1)$, $x \in [0, 1]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
- $h(0) = f(0) - 2 \leq 0$, αφού $0 < f(0) \leq 2$.
- $h(1) = f(1) \geq 0$.

Είναι επομένως $h(0)h(1) \leq 0$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) Αν $h(0)h(1) = 0 \Leftrightarrow (h(0) = 0 \text{ ή } h(1) = 0)$ επιλέγουμε $x_2 = 0$ και έτσι η C_f τέμνει την AB στο B ή στο A αντίστοιχα.

ii) Αν $h(0)h(1) < 0$, τότε από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$:

$$h(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = -2(x_2 - 1).$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν υπάρχει $x_2 \in [0, 1]$, ώστε $f(x_2) = -2(x_2 - 1)$. Άρα η C_f τέμνει τη διαγώνιο AB.

γ) Επειδή $0 \leq f(x) \leq 2$, χωρίς όμως να ισχύει παντού το ίσον (αφού $f(0) > 0$ και $f(1) < 2$), παίρνουμε:

$$\int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 2 dx = 2$$

δ) Από τη σχέση $0 \leq f(x) \leq 2$, παίρνουμε $f(x) \leq 2 \Leftrightarrow f(x) - 2 \leq 0$, οπότε:

$$f(x)(f(x) - 2) \leq 0 \Leftrightarrow f^2(x) \leq 2f(x)$$

χωρίς να ισχύει παντού το ίσον. Επειδή η f είναι επιπλέον συνεχής, παίρνουμε ότι:

$$\int_0^1 f^2(x) dx < \int_0^1 2f(x) dx$$

Σημείωση

Για το σημείο $x_1 = 1$ είναι $f(x_1) = 2x_1$ και $x_1 \in (0, 1)$. Άρα $f(x_1) \neq 0$ και $f(x_1) - 2 < 0$, αφού $2x_1 < 2$.

Παράδειγμα 11° – Εξετάσεις 2018 – Κ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} dx > -\frac{32}{15}$$

Υπόδειξη

Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[2, 3]$ διότι $f''(x) = 2(e^{x-2} - 1)$ και έτσι βρίσκουμε γενικότερα την κυρτότητα στο πεδίο ορισμού της.

Στο σημείο $A(2, f(2))$ η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη:

$$\varepsilon: y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y + 2 = -2(x - 2) \Leftrightarrow y = -2x + 2$$

Αλλά η f είναι κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$, οπότε:

$$f(x) \geq -2x + 2 \Rightarrow f(x) \sqrt{x-2} \geq (-2x + 2) \sqrt{x-2}$$

για κάθε $x \in [2, 3]$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 2$. Επομένως:

$$\int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} dx > \int_2^3 (-2x + 2) \sqrt{x-2} dx$$

Θέτουμε $y = x - 2 \Rightarrow dy = dx$. Βρίσκουμε τα νέα άκρα ολοκλήρωσης:

$$x = 2 \rightarrow y = 0, \quad x = 3 \rightarrow y = 1$$

Επομένως είναι:

$$\begin{aligned} \int_2^3 (-2x + 2) \sqrt{x-2} dx &= \int_0^1 (-2y - 2) \sqrt{y} dy = \\ &= -2 \left[\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = -4 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = -\frac{32}{15} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} dx > -\frac{32}{15}.$$

ΣΤ. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

Αν μας δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή, τότε έχουμε τις εξής πολύ σπουδαίες άμεσες ή έμμεσες πληροφορίες:

α) Η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε αν έχουμε και μία ρίζα της f' , βρίσκουμε αμέσως το πρόσημό της και άρα τη μονοτονία και το ακρότατο της f .

β) Θα ισχύει η ανισότητα $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$ για κάθε εσωτερικό σημείο a του πεδίου ορισμού της f , λόγω της ιδιότητας της εφαπτομένης. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = a$.

γ) Η εξίσωση $f(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = a$, λόγω της προηγούμενης σχέσης.

δ) Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα που ορίζεται. Η απόδειξη απαιτεί χρήση του Θ.Μ.Τ. στον αριθμητή της παραγώγου για την f στο διάστημα $[a, x]$ (για $x > a$) ή στο διάστημα $[x, a]$ (για $x < a$).

ε) Χωρίζουμε το διάστημα στη μέση, κάνουμε δύο Θ.Μ.Τ. και με τον ορισμό της μονοτονίας της f' παίρνουμε μια ανισότητα (ανισότητα Jensen), που παρουσιάζεται συχνά με φανερή ή κρυφή μορφή.

στ) Η μέθοδος της κυρτότητας βρίσκει συχνά εφαρμογή και σε θέματα ανισότητας με ολοκληρώματα. Έτσι, ας διαπιστώσουμε ότι μια συνάρτηση είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της ή σε ένα διάστημα $\Delta = [\kappa, +\infty)$, τότε βρίσκουμε την εφαπτομένη $y = ax + \beta$ στο σημείο της, οπότε προκύπτει αμέσως η ανισότητα $f(x) \geq ax + \beta$ και έτσι:

$$\int_{\gamma}^{\delta} f(t)dt \geq \int_{\gamma}^{\delta} (at + \beta)dt = \left[a \frac{t^2}{2} + \beta t \right]_{\gamma}^{\delta}$$

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της ή σε κάποιο διάστημα.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Να αποδείξετε ότι $\int_0^3 f(t^2)dt < 9$

Υπόδειξη

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

και $f''(x) = -\frac{x}{(\sqrt{1+x^2})^3}$, οπότε η συνάρτηση είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(0,0)$

είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$, οπότε αφού η συνάρτηση είναι κοίλη, από τη σχέση γραφικής παράστασης και εφαπτομένης παίρνουμε $f(x) \leq x$ για κάθε $x \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$. Επομένως παίρνουμε ότι $f(t^2) \leq t^2$, η οποία με τη σειρά της, αφού δεν ισχύει παντού το ίσον, δίνει ότι:

$$\int_0^3 f(t^2)dt < \int_0^3 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^3 = 9$$

Σχόλιο

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για την κοίλη συνάρτηση.

ζ) Την τακτική αυτή εφαρμόζουμε ακόμα και στην περίπτωση που θέλουμε να βρούμε πρόσημο τιμών συνάρτησης (για να κάνουμε π.χ. Bolzano), αλλά παρουσιάζονται ολοκληρώματα (με γνωστά άκρα), τα οποία θέλουμε να συγκρίνουμε με αριθμητικές τιμές. Αν, για παράδειγμα, θέλουμε να βρούμε το πρόσημο του $F(2) = 15 - \int_1^4 f(t)dt$ και ξέρουμε ότι η f είναι κυρτή, τότε βρίσκουμε την εξίσωση μιας εφαπτομένης, π.χ. στο 1, και αν αυτή είναι η

(ε): $y = 2x$, τότε από τη σχέση $f(x) \geq 2x$ (1) παίρνουμε $\int_1^4 f(t)dt > \int_1^4 2tdt = 15$, διότι στην (1) δεν ισχύει παντού η ισότητα. Επομένως $F(2) = 15 - \int_1^4 f(t)dt < 0$.

η) Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη, τότε η γραφική της παράσταση τέμνει μια τυχαία ευθεία το πολύ σε δύο σημεία. Αν λοιπόν έχουμε μια εξίσωση της μορφής $f(x) = 0$, όπου η f είναι κυρτή ή κοίλη, και εντοπίσουμε με παρατήρηση δύο ρίζες της εξίσωσης αυτής, τότε αυτές είναι και οι μοναδικές. Η πιο απλή αιτιολόγηση γίνεται με άτοπο, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Rolle, μπορεί να γίνει όμως και με μελέτη της διαφοράς, αφού η f' έχει σίγουρα μοναδική ρίζα ανάμεσα στις ρίζες της f (πάλι από το θεώρημα Rolle).

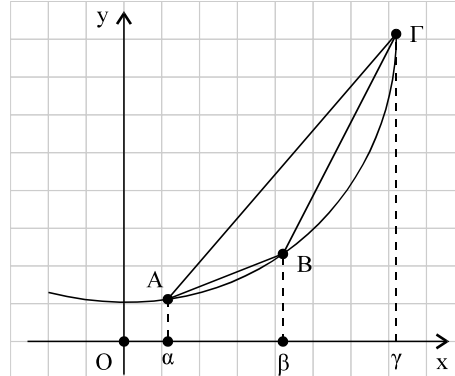
θ) Μια σπουδαία ανισότητα που ισχύει για τις κυρτές συναρτήσεις είναι αυτή που περιγράφεται με τον τίτλο "Θεώρημα των τριών χορδών".

Αν λοιπόν η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή συνάρτηση και $\alpha < \beta < \gamma$, τότε:

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} < \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$$

Η πρόταση αυτή προκύπτει γεωμετρικά από τη σύγκριση των κλίσεων των ευθειών AB, AG, BG, αφού:

$$\lambda_{AB} < \lambda_{AG} < \lambda_{BG}$$



Ζ. Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΣΤΑ ΟΡΙΑ

Όρια μπορούμε να συναντήσουμε σε πολλά σημεία μιας άσκησης, είτε άμεσα είτε έμμεσα. Για τον υπολογισμό τους απαιτείται:

- Η καλή γνώση των ιδιοτήτων και των θεωρημάτων.
- Ένα ελάχιστο επίπεδο τεχνικών.

Όρια λοιπόν μπορούμε να υπολογίσουμε:

- α) Με χρήση της κλασικής θεωρίας (κριτήριο παρεμβολής κ.λπ.)
- β) Με τους κανόνες De L'Hospital.
- γ) Θέτοντας βοηθητικές συναρτήσεις (κυρίως σε θεωρητικά θέματα).
- δ) Αξιοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας ή της παραγώγου σε ένα σημείο.

Όταν υπολογίζουμε ένα όριο:

- Πρώτα εξετάζουμε αν η μεταβλητή τείνει σε αριθμό ή σε άπειρο, διότι στην κάθε περίπτωση συνήθως εφαρμόζουμε διαφορετική τεχνική, ειδικά αν έχουμε τον τύπο της συνάρτησης (αριθμητικό όριο).
- Στη συνέχεια εξετάζουμε τη μορφή, στην οποία οδηγεί το όριο. Οι απροσδιόριστες μορφές απαιτούν συχνά χρήση του κανόνα De L'Hospital. Προσέχουμε ιδιαίτερα ώστε στην διαδοχική εφαρμογή του κανόνα De L'Hospital να μην υπερβούμε τα δεδομένα της άσκησης. Πιθανόν στο τελευταίο βήμα να χρειαστεί να περάσουμε στον ορισμό της παραγώγου με πρόσθεση και αφαίρεση του κατάλληλου αριθμού.

- Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα όρια που οδηγούν στη μορφή $\frac{\kappa}{0}$ με $\kappa \neq 0$. Σε αυτές τις περιπτώσεις γράφουμε την αντίστοιχη συνάρτηση στη μορφή $\frac{A(x)}{B(x)} = A(x) \cdot \frac{1}{B(x)}$, όπου $\lim_{x \rightarrow x_0} A(x) = \kappa$, $\lim_{x \rightarrow x_0} B(x) = 0$. Για την εύρεση

τέτοιων ορίων πρέπει να γνωρίζουμε το πρόσημο του κ , πιο σημαντικό όμως είναι να βρούμε το πρόσημο του παρονομαστή $B(x)$ κοντά στο x_0 . Για το λόγο αυτό, αν δεν πρόκειται για πολύ απλή ή βασική μορφή, μελετάμε τη συνάρτηση $B(x)$ ή εξετάζουμε μήπως ο παρονομαστής είναι κάποια ήδη γνωστή διαφορά που προκύπτει από τη δομή της άσκησης, όπως π.χ. η διαφορά $f(x) - y_\varepsilon$, όπου $y_\varepsilon = ax + b$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας κυρτής ή κοίλης συνάρτησης στο σημείο της με τετμημένη x_0 . Σε τέτοιες περιπτώσεις η εύρεση του προσήμου του παρονομαστή είναι άμεση. Αν ο παρονομαστής $B(x)$ δεν διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 , τότε εργαζόμαστε με πλευρικά όρια.

Αξίζει ακόμα να αναφέρουμε ότι αν το κ είναι συνάρτηση κάποιας παραμέτρου λ , δηλαδή $\kappa = \kappa(\lambda)$ τότε πρέπει να εξετάσουμε για την παράσταση $\kappa(\lambda)$ όλες τις δυνατές περιπτώσεις, αν δηλαδή είναι $\kappa(\lambda) > 0$ ή $\kappa(\lambda) < 0$ ή $\kappa(\lambda) = 0$.

- Οι κυριότερες απροσδιόριστες μορφές είναι οι εξής:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, (+\infty) - (+\infty), (-\infty) - (-\infty), 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

Για τις τελευταίες μορφές είναι σχεδόν πάντα αναγκαίο να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση:

$$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}, \quad f(x) > 0$$

Η. Η ΔΥΝΑΜΗ ΤΗΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ

Η μονοτονία είναι μια ιδιότητα των συναρτήσεων που κάθε μαθητής θα συναντήσει με απόλυτη βεβαιότητα στις εξετάσεις. Για το λόγο αυτό θα προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε τις πιο σημαντικές εφαρμογές σε όλες τις κατηγορίες ασκήσεων, όπου η αξιοποίηση της μονοτονίας παίζει καθοριστικό ρόλο.

A. Σύγκριση τιμών.

B. Απόδειξη ανισοτήτων.

Γ. Λύση εξισώσεων.

Δ. Εύρεση συνόλου τιμών.

Ε. Εύρεση προσήμου συνάρτησης ή παράστασης.

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη και εντοπίσουμε ρίζα της, τότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική και μπορούμε με τον ορισμό της μονοτονίας να βρούμε το πρόσημο της συνάρτησης.

Έτσι:

- Αν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, τότε είναι αρνητική αριστερά και θετική δεξιά της ρίζας.
- Αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, τότε είναι θετική αριστερά και αρνητική δεξιά της ρίζας.

Μονοτονία και 1–1

Εφαρμογή στις εξισώσεις	Εφαρμογή στις ανισώσεις	
Η συνάρτηση f είναι 1–1. 	Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. 	Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. 
Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $f(g(x))=f(h(x))$ και γράφουμε: $f(g(x))=f(h(x)) \Leftrightarrow g(x)=h(x)$	Φέρνουμε την ανίσωση στη μορφή $f(g(x))<f(h(x))$ και γράφουμε: $f(g(x))<f(h(x)) \Leftrightarrow g(x)<h(x)$ Η φορά δεν αλλάζει, διότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.	Φέρνουμε την ανίσωση στη μορφή $f(g(x))<f(h(x))$ και γράφουμε: $f(g(x))<f(h(x)) \Leftrightarrow g(x)>h(x)$ Εδώ η φορά αλλάζει, διότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Χαρακτηριστικά σχόλια

- Από μια ισότητα $A(x) = B(x)$ μπορούμε να πάρουμε πάντα $f(A(x)) = f(B(x))$.
- Από μια ισότητα $f(A(x)) = f(B(x))$ για να πάρουμε την $A(x) = B(x)$ χρειαζόμαστε το 1–1 της f .
- Από μια ανισότητα $A(x) < B(x)$ για να πάρουμε την $f(A(x)) < f(B(x))$ χρειαζόμαστε τη μονοτονία της f και πιο συγκεκριμένα ότι είναι γνησίως αύξουσα.
- Από μια ανισότητα $f(A(x)) < f(B(x))$ για να πάρουμε την $A(x) < B(x)$ χρειαζόμαστε τη μονοτονία της f και πιο συγκεκριμένα ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για την περίπτωση που η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, με τη μόνη διαφορά ότι η φορά αλλάζει.

Ειδικές μεθοδολογίες

1. Δεν παραγωγίζουμε ανισοτική σχέση, ούτε αντιπαραγωγίζουμε (βάζοντας τη σταθερά) μπορούμε όμως να ολοκληρώσουμε τα δύο μέλη μιας ανισότητας, ακόμα κι αν υπάρχει παράγωγος, αρκεί να έχουμε πρώτα διατάξει τα άκρα ολοκλήρωσης. Αν το κάτω άκρο είναι μεγαλύτερο από το πάνω, τότε η φορά αλλάζει. Τα μέλη της ανισότητας πρέπει να είναι συνεχείς συναρτήσεις.
2. Όταν ολοκληρώνουμε μια ανισότητα πρέπει πρώτα να διατάσσουμε τα άκρα, διότι πιθανόν η φορά να πρέπει να αλλάξει (αν το κάτω άκρο είναι μεγαλύτερο από το άνω άκρο).
3. Όταν έχουμε εξισώσεις της μορφής $f(x) = g(x)$ με την f γνησίως μονότονη, τότε ακόμα κι αν εντοπίσουμε ρίζα με παρατήρηση, δεν σημαίνει ότι αυτή είναι μοναδική. Αυτό ισχύει μόνο αν η g είναι σταθερή, δηλαδή μόνο σε εξισώσεις της μορφής $f(x) = c$.
4. Αν σε κάποιο όριο που εμφανίζονται δύο μεταβλητές εφαρμόζουμε τον κανόνα De L'Hospital, τότε μεταβλητή παραγωγίσης είναι αυτή που βρίσκεται κάτω από το σύμβολο $\lim_{h \rightarrow a}$ (δηλαδή στην περίπτωσή μας μεταβλητή παραγωγίσης είναι το h και όχι ίσως το x που εμφανίζεται επίσης στο όριο).
5. Αν έχουμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x(t))$ και θέλουμε την κλίση της f στο τυχαίο σημείο, τότε αυτή είναι ίση με $f'(x(t))$ και όχι ίση με $(f(x(t)))' = f'(x(t)) \cdot x'(t)$. Αν $\omega(t)$ είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x(t)$, τότε θα ισχύει $\varepsilon\phi(\omega(t)) = f'(x(t))$ και όχι $\varepsilon\phi(\omega(t)) = (f(x(t)))'$.
6. Αν έχουμε μια συνάρτηση $E(x) = f(x)$ και το x είναι συνάρτηση του χρόνου t , τότε για να βρούμε τον ρυθμό μεταβολής του E ως προς t , γράφουμε $E(t) = f(x(t))$ και μετά βρίσκουμε τον ζητούμενο ρυθμό από τον τύπο $E'(t) = f'(x(t)) \cdot x'(t)$ και όχι παραγωγίζοντας τη σχέση $E(x(t)) = f(x(t))$.
7. Όταν σε ένα όριο με $h \rightarrow 0$ που περιέχει π.χ. τον όρο $f(x - 5h)$ θέλουμε να ελέγξουμε συνέχεια ή παράγωγο, τότε είναι καλύτερα να θέσουμε $-5h = u$ με $u \rightarrow 0$ και όχι $x - 5h = u$.
8. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα) και παραγωγίσιμη, τότε γράφουμε $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) και όχι $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$). Έχει σημασία να γράψουμε και το "ίσον" και όχι γνήσια διάταξη.
9. Όταν έχουμε ένα όριο, όπως π.χ. το $\lim_{h \rightarrow 0} f(x + 2h)$, τότε δεν επιτρέπεται πάντα να θέτουμε $h = 0$ και να βρίσκουμε ότι τον όριο αυτό είναι ίσο με $f(x)$. Αυτό είναι δυνατόν μόνο όταν η f είναι συνεχής στο x και μάλιστα για να είναι πλήρης η παρουσίαση, είναι καλύτερα να θέσουμε $2h = u$, οπότε:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x + 2h) = \lim_{u \rightarrow 0} f(x + u) = f(x)$$
10. Αν έχουμε συναρτησιακή σχέση με δύο μεταβλητές με παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε κρατάμε τη μία μεταβλητή σταθερή και παραγωγίζουμε ως προς την άλλη. Αυτό το κάνουμε ίσως και στις δύο μεταβλητές, αν η σχέση δεν είναι συμμετρική. Στη συνέχεια θέτουμε στη μία μεταβλητή ειδικές τιμές μέχρι να φτάσουμε σε μια πιο απλή σχέση με τη συνάρτηση και την παράγωγό της, η οποία τελικά μας οδηγεί στη ζητούμενη συνάρτηση.

11. Αν μας ζητήσουν ή χρειαστούμε αρχική μιας συνεχούς συνάρτησης με κλάδους, τότε βρίσκουμε μια αρχική για τον κάθε κλάδο και βάζοντας σταθερές προσπαθούμε να καταστήσουμε τη νέα συνάρτηση συνεχή (και παραγωγίσιμη).

$$\text{Έτσι, αν } f(x) = \begin{cases} g(x), & x < a \\ h(x), & x \geq a \end{cases}, \text{ τότε αναζητούμε την αρχική στη μορφή: } F(x) = \begin{cases} G(x) + c_1, & x < a \\ c, & x = a \\ H(x) + c_2, & x > a \end{cases}, \text{ όπου } G,$$

Η είναι αρχικές των f, g αντίστοιχα, απαιτώντας αυτή να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο a . Αν θέλουμε, στην τελική σχέση επιλέγουμε μια μικρή τιμή για τη μία σταθερά.

12. Αν θέλουμε την τιμή της παραγώγου σε ένα σημείο, δηλαδή κάποιο $f'(x_0)$, τότε προσπαθούμε να εργαστούμε είτε με τον ορισμό της παραγώγου στο σημείο αυτό, είτε με τη συνέχεια της παραγώγου παίρνοντας όριο (αν η συνέχεια της παραγώγου δίνεται ή αν προκύπτει από τα δεδομένα) είτε σχηματίζοντας σε κάποιο όριο την παράγωγο στο x_0 (με πρόσθεση – αφαίρεση στον αριθμητή του $f(x_0)$) είτε με χρήση του θεωρήματος Fermat (από ανισότητα σε ισότητα) με ακρότατο το $f(x_0)$.
13. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι $A(x) = B(x)$, αρκεί η $h(x) = A(x) - B(x)$, $x \in \Delta$, να είναι σταθερή. Για τον σκοπό αυτό αρκεί να είναι $h'(x) = 0$ στο εσωτερικό του Δ και η h να είναι συνεχής στο Δ .
14. Όταν μια συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη στο διάστημα Δ , δε σημαίνει ότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Το μόνο που είναι εξασφαλισμένο είναι ότι η f' είναι γνησίως μονότονη στο εσωτερικό του Δ .
15. Στην εφαρμογή του κανόνα De L'Hospital φροντίζουμε να μην υπερβούμε τα δεδομένα και κυρίως να μη φτάσουμε π.χ. σε $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f''(x)$ χωρίς να έχουμε τη συνέχεια της f' ή της f'' αντίστοιχα στο x_0 .

Παράδειγμα

Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$. Να αποδείξετε ότι $f'(1) = 0$.

Υπόδειξη

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0 &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(1+5h) - f(1)] - [f(1-h) - f(1)]}{h} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(1+5h) - f(1)}{h} - \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Το πρώτο όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{h}$ με την αντικατάσταση $5h = u$ είναι ίσο με $5f'(1)$, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο 1. Το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h}$ με την αντικατάσταση $-h = u$ είναι ίσο με $-f'(1)$. Επομένως η σχέση (1) δίνει:

$$5f'(1) + f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$$

Αν προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα De L'Hospital θα διαπιστώσουμε ότι στο τελευταίο βήμα χρειαζόμαστε τη συνέχεια της f' , η οποία όμως δε δίνεται. Η πορεία λοιπόν με τον ορισμό είναι μονόδρομος.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

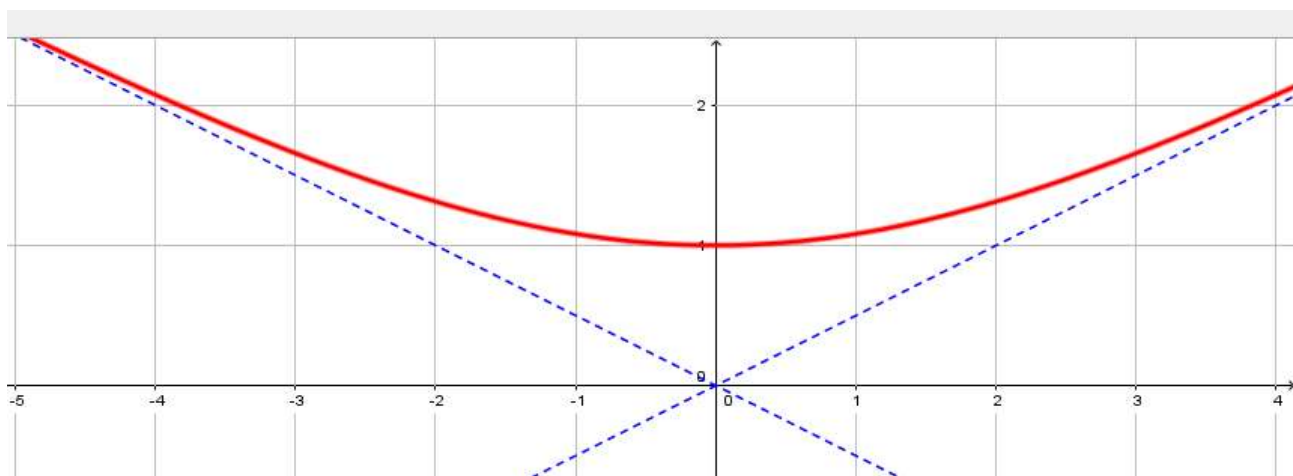
ΓΕΝΙΚΟ ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

- (Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και άρτια. Είναι η f παραγωγίσιμη ;
- (Β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- (Γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sin x$.
- (Δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f . Να γίνει στη συνέχεια η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής με την επιπλέον πληροφορία ότι η f είναι κυρτή.
- (Ε) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx > 1$.

Μπάμπης Στεργίου - Απρίλιος 2023

Υπόδειξη



Το σημαντικό για έναν υποψήφιο δεν είναι να κάνει πολλά θέματα στο μάθημα, αλλά να λύσει μόνος του τουλάχιστον δύο φορές τα καλύτερα από αυτά τα θέματα, αφήνοντας ανάμεσα στις λύσεις χρονικό διάστημα 2 εβδομάδων !!!

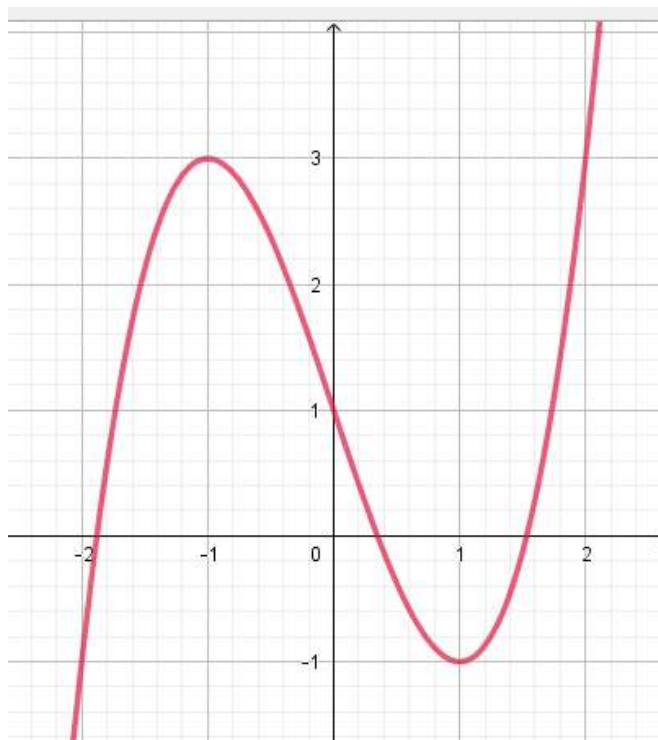
Θέματα για την Επανάληψη-Σταχυολογήματα !

ΘΕΜΑ 1^ο (Β)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + 1$, με $a, b \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x = -1$ τοπικό ακρότατο και η κλίση της στο σημείο με τετμημένη 2 είναι ίση με 9.

- (α) Να αποδείξετε ότι $a = 1$ και $b = 0$.
- (β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- (γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 = 3x - 1$ έχει δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.
- (δ) Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το σημείο $M(2, 3)$.
- (ε) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, τα σημεία καμπής και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Θέμα 1- Υπόδειξη (στ)



ΘΕΜΑ 2° (B)

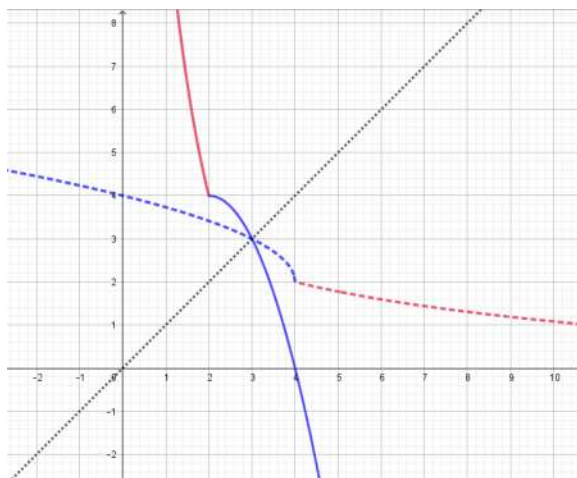
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x^2 - 2x|$, $x \in \mathbb{R}$.

- B1.** Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια και να αποδείξετε ότι (η f) δεν παραγωγίζεται στα σημεία $x = 0$ και $x = 2$.
- B2.** Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- B3.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να εξετάσετε αν έχει ολικά ακρότατα. Στη συνέχεια να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .
- B4.** Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f που διέρχονται από το σημείο $P(1, \frac{5}{4})$ είναι κάθετες μεταξύ τους. Ποιες είναι οι εξισώσεις αυτών των εφαπτομένων ;
- B5.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

ΘΕΜΑ 3°(B)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 4e^{2-x}, & x < 2 \\ 4x - x^2, & x \geq 2 \end{cases}$

- (α)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .
- (β)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- (γ)** Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- (δ)** Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές τους παραστάσεις των f και f^{-1} . Σε ποια σημεία τέμνονται οι δύο αυτές γραφικές παραστάσεις ;



ΘΕΜΑ 4°(Δ)

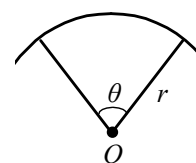
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 10x - x^2$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τα κοίλα. Να χαράξετε στη συνέχεια τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(β) Να βρείτε τις εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f που διέρχονται από το σημείο $A(6, 40)$

(γ) Να αποδείξετε ότι από κάθε σημείο της ευθείας $(\varepsilon): y = \frac{101}{4}$ μπορούμε να φέρουμε ακριβώς δύο εφαπτομένες προς τη C_f , οι οποίες μάλιστα είναι κάθετες μεταξύ τους.

(δ) Ένα σύρμα μήκους 20m διατίθεται για την περίφραξη ενός ανθόκηπου σχήματος κυκλικού τομέα. Να βρείτε την ακτίνα r του κύκλου, αν επιθυμούμε να έχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια του κήπου.

**ΘΕΜΑ 5°(Γ)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x < 1 \\ 3x^2 - 6x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f , το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$ και να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη από αυτές τις ρίζες βρίσκεται στο διάστημα $(1, 2)$.

(δ) Να εξετάσετε, αν για την f εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο διάστημα $[-1, 3]$ και αν ναι, να βρείτε τη θετική τιμή του ξ , το οποίο επαληθεύει το συμπέρασμα του ΘΜΤ στο διάστημα αυτό.

(ε) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

ΘΕΜΑ 6°(Β)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - ax^2 + 2, a \in \mathbb{R}$. Στο σημείο 2 η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

(α) Να αποδείξετε ότι $a = 3$.

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^3 + 1 = 3x^2$

(δ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

ΘΕΜΑ 7°(Β)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 + \alpha x^2 + \beta}{x^2 - 1}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Για τη συνάρτηση f ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\frac{1}{2}$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1, \beta = 0$

(β) Να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$, στο οποίο οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες, όπου

$$g(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

(γ) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(δ) Να λύσετε την εξίσωση $(3x^2 + 7)^2(x^4 + 2) = 3(x^2 + 2)(x^4 + 3)^2$

(ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_g και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση, καθώς και την C_f .

ΘΕΜΑ 8°(Γ-Δ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 6(\eta\mu x - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = 6(1 - \frac{\eta\mu x}{x})$ είναι αδύνατη.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(2^x) + f(4^x) = f(5^x) + f(3^x)$

(δ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Υπόδειξη ((α),(γ),(ε))

(α) Είναι $f''(x) = 6(x - \eta\mu x)$, η οποία έχει μοναδική λύση την $x = 0$ και έτσι εφαρμόζουμε τη μέθοδο της επιλεγμένης τιμής (πχ $x = \pi$, $x = -\pi$)

(γ) Για $x = 0$ επαληθεύεται. Για $x < 0$ είναι $2^x > 3^x \Leftrightarrow f(2^x) > f(3^x)$, $f(4^x) > f(5^x)$ και

προσθέτουμε κατά μέλη. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη για $x < 0$. Όμοια για $x > 0$. Ερώτημα που αν κάποιος δεν γνωρίζει τη διαδικασία δεν μπορεί εύκολα να απαντηθεί (είναι δύσκολο).

(δ) Είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 9^ο(Γ-Δ)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = \sqrt{2}$ και $f'(x)f(x) = x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(γ) Να αποδείξετε ότι από το σημείο $N(-1, 0)$ δεν άγονται εφαπτομένες προς την C_f .

(δ) Να βρείτε το όριο :

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + f(-x) - f(2x))$$

(ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f , να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Υπόδειξη ((α),(β,γ), (δ), (ε))

(α) Γράφεται

$$\begin{aligned} f'(x)f(x) &= x+1 \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2x+2 \Leftrightarrow \\ (f^2(x))' &= (x^2+2x)' \Leftrightarrow f^2(x) = x^2+2x+c \end{aligned}$$

Όμως $f(0) = \sqrt{2}$, οπότε $c = 2$. Άρα $|f(x)| = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

Επιπλέον είναι $f(x) \neq 0$ και έτσι η συνάρτηση ως συνεχής διατηρεί πρόσημο και μάλιστα θετικό αφού $f(0) = \sqrt{2} > 0$

(γ) Έστω $M(a, f(a))$ το σημείο επαφής μιας τέτοιας εφαπτομένης. Γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης. Αυτή πρέπει να περνάει και από το $N(-1, 0)$ και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

(δ) Γράφουμε :

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + f(-x) - f(2x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(f(x) + x) + (f(-x) + x) - (f(2x) + 2x)]$$

και εργαζόμαστε με συζυγείς παραστάσεις.

(ε) Είναι $f'(x) = \frac{x+1}{f(x)}$ και $f''(x) = \left(\frac{x+1}{f(x)} \right)' = \frac{1}{f^3(x)}$. Η συνάρτηση είναι κυρτή.

ΘΕΜΑ 10°(Γ)**(Πρόβλημα)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 + 5x}{x - 2}$, $x \neq 2$.

A. Να μελετήσετε την f (i) ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (ii) ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

B. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Δ. Μια τράπεζα θέλει να τυπώσει πιστωτικές κάρτες σχήματος ορθογωνίου (ΑΒΓΔ). Η εκτυπώσιμη επιφάνεια της κάρτας που στο σχήμα περικλείεται από το εσωτερικό (μπλε στο αρχείο) ορθογώνιο πρέπει να έχει εμβαδόν 18 cm^2 . Τα περιθώρια εκτύπωσης αριστερά –δεξιά είναι 2 cm και πάνω κάτω είναι 1 cm .



(α) Να εκφράσετε τη συνολική επιφάνεια της κάρτας ως συνάρτηση της μικρής πλευράς της.

(β) Ποιες είναι οι διαστάσεις της πιο οικονομικής κάρτας που μπορεί να εκδώσει η τράπεζα ;

Θέμα 10 - Υπόδειξη ((A),(B) ,(Γ) , (Δ))

A. Είναι $f'(x) = \frac{2(x^2 - 4x - 5)}{(x - 2)^2}$

♦ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 4x - 5)}{(x - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 5.$

Τοπικά ακρότατα είναι τα $f(-1) = 1 \text{ T.M.}$, $f(5) = 25 \text{ T.E.}$

B. Σύνολο τιμών είναι το $f(A) = (-\infty, 1] \cup [25, +\infty).$

Γ. Είναι $f''(x) = \frac{36}{(x-2)^3}$. Η συνάρτηση αλλάζει κοίλα στο 2 (δεξιά του 2 είναι κυρτή).

Δ. (α) Πρέπει

$$(x-2)(y-4) = 18 \Leftrightarrow y = \frac{4x+10}{x-2}.$$

Επομένως

$$E(x) = \frac{4x^2 + 10x}{x-2} = 2f(x), \quad x > 2$$

(β) Με βάση προηγούμενο ερώτημα θα είναι $x = 5, y = 10$

ΘΕΜΑ 11^ο(Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-a)e^{2-\frac{x}{a}}$, $a > 0$.

(α) Να μελετήσετε τις f και f' ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(β) Να αποδείξετε ότι καθώς το a μεταβάλλεται, το σημείο $M(x_0, f(x_0))$, όπου x_0 είναι η θέση του τοπικού ακροτάτου της f κινείται σε μια ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

(γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο τομής της με τον άξονα των τετμημένων έχει σταθερή κλίση.

(δ) Για $a = 1$ να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, να βρείτε τις ασύμπτωτες και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Υπόδειξη

(α)

b) Monotonieverhalten und Extrema

$$f'_a(x) = e^{2-\frac{x}{a}} + (x-a) \cdot e^{2-\frac{x}{a}} \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)$$

$$= e^{2-\frac{x}{a}} \cdot \left(1 - \frac{x-a}{a}\right) = \frac{2a-x}{a} \cdot e^{2-\frac{x}{a}}$$

$$f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2a; f_a(2a) = (2a-a) \cdot e^{2-\frac{2a}{a}} = a$$

	$x < 2a$	$x = 2a$	$x > 2a$
$f'_a(x)$	+	0	-
G_a	streng monoton steigend	HP(2a a)	streng monoton fallend

c) Krümmungsverhalten und Wendepunkte

$$f_a''(x) = -\frac{1}{a} \cdot e^{2-\frac{x}{a}} + \frac{2a-x}{a} \cdot e^{2-\frac{x}{a}} \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)$$

$$= \frac{e^{2-\frac{x}{a}}}{a} \cdot \left(-1 + \frac{x-2a}{a}\right) = \frac{x-3a}{a^2} \cdot e^{2-\frac{x}{a}}$$

$$f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3a; f_a(3a)$$

$$= (3a - a) \cdot e^{2-\frac{3a}{a}} = 2a \cdot e^{-1} = \frac{2a}{e}$$

	$x < 3a$	$x = 3a$	$x > 3a$
$f_a''(x)$	-	0	+
G_a	rechtsgekrümmt	Wendepunkt $(3a \frac{2a}{e})$	linksgekrümmt

(β)

2. a) Bestimme die Gleichung der Ortslinie der Extrempunkte der G_a !

$$x = 2a \wedge y = a \Rightarrow y = \frac{x}{2} \text{ (mit } D = \mathbb{R}^+)$$

(γ)

2. b) Zeige, dass alle G_a die x-Achse unter dem gleichen Winkel schneiden und berechne diesen!

$$f_a'(a) = \frac{2a-a}{a} \cdot e^{2-\frac{a}{a}} = e \text{ für alle } a \in \mathbb{R}^+,$$

ΘΕΜΑ 12°(Γ-Δ)

Πρόβλημα με βάση το σχολικό

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\eta\mu x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.

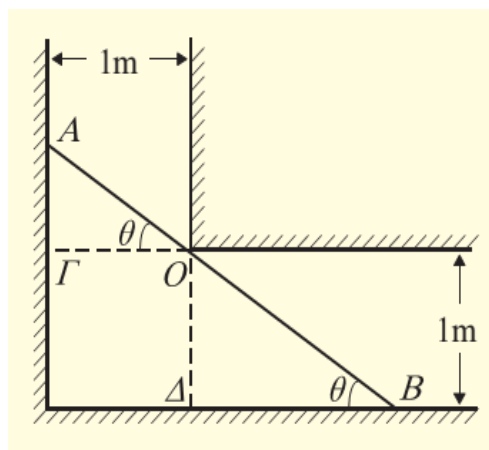
(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βγάτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης. Στη συνέχεια να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .

(δ) Δύο διάδρομοι πλάτους 1m τέμνονται κάθετα.

(Δείτε το Σχήμα).

Να βρείτε το μεγαλύτερο δυνατό μήκος μιας σκάλας που μπορεί, αν μεταφερθεί οριζόντια, να στρίψει στη γωνία.



Υπόδειξη

(α) Είναι

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{\eta\mu^2 x} + \frac{\eta\mu x}{\sin^2 x} = \frac{\eta\mu^3 x - \sin^3 x}{\eta\mu^2 x \cdot \sin^3 x}$$

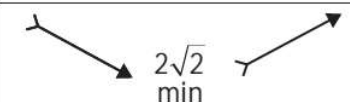
Είναι επίσης :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3 x - \sin^3 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ με τιμή } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}.$$

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$	-	0	+
$f(\theta)$			

(γ) Η συνάρτηση είναι κυρτή. Ασύμπτωτες είναι οι ευθείες στα άκρα του πεδίου ορισμού.

(δ) Θα εκφράσουμε το μήκος AB ως συνάρτηση της γωνίας $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Αλλά από τα ορθογώνια τρίγωνα OAG και OBD παίρνουμε ότι :

$$OA = \frac{OG}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \text{ και } OB = \frac{OD}{\eta\mu \theta} = \frac{1}{\eta\mu \theta}$$

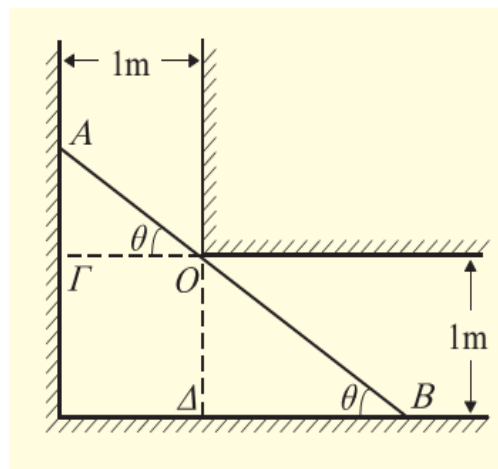
Επομένως :

$$AB = OA + OB = \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\eta\mu \theta}, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Είναι λοιπόν

$$AB = f(\theta) = \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\eta\mu \theta}, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Το μικρότερο άνοιγμα στο διάδρομο είναι λοιπόν το $AB = 2\sqrt{2}$ και έτσι η μεγαλύτερη σκάλα που μπορεί να περάσει έχει μήκος $\ell = 2\sqrt{2}$.



ΘΕΜΑ 13°(Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + x + \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(-x)} = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{1 + \eta \mu^2 x} - \eta \mu x = x + \sqrt{1 + x^2}$.

(δ) Να βρείτε, αν ορίζεται, την αντίστροφη της f .

(ε) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, να βρείτε τις ασύμπτωτες και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

(στ) Να αποδείξετε ότι $f(3) + f(11) > 2f(7)$.

Υπόδειξη

(α) Είναι $f(x) = 1 + x + \sqrt{x^2 + 1} > 1 + x + \sqrt{x^2} = 1 + x + |x| \geq 1 + x + (-x) = 1 > 0$, διότι $|x| \geq -x$.

Επίσης είναι :

$$\begin{aligned} f(x)f(-x) &= ((1 + \sqrt{x^2 + 1}) + x)((1 + \sqrt{x^2 + 1}) - x) = \\ &= [1 + (x^2 + 1) + 2\sqrt{x^2 + 1}] - x^2 = 2(1 + \sqrt{x^2 + 1}) \end{aligned}$$

και

$$f(x) + f(-x) = (1 + \sqrt{x^2 + 1} + x) + (1 + \sqrt{x^2 + 1} - x) = 2(1 + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Επομένως :

$$\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(-x)} = \frac{f(x) + f(-x)}{f(x)f(-x)} = \frac{2(1 + \sqrt{x^2 + 1})}{2(1 + \sqrt{x^2 + 1})} = 1, x \in \mathbb{R}.$$

(β) Είναι $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}} > 0$,

αφού $x + \sqrt{x^2 + 1} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq x + (-x) = 0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Είναι ακόμα :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x + \sqrt{x^2 + 1}) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 1.$$

Επομένως, αφού η f είναι και συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι το $f(\mathbb{R}) = (1, +\infty)$.

(γ) Η εξίσωση γράφεται στη μορφή :

$$1 + \sqrt{1 + \eta \mu^2 x} - \eta \mu x = 1 + x + \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow f(-\eta \mu x) = f(x) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} x = -\eta \mu x \Leftrightarrow x = 0$$

αφού η ισότητα $|\eta \mu x| = |x|$ ισχύει μόνο για $x = 0$.

ΘΕΜΑ 14° (B)

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, γνησίως μονότονη στο διάστημα $(-\infty, 0]$, γνησίως μονότονη στο διάστημα $[0, +\infty)$, $f(0) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -5$.

A. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

B. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων :

(α) $f(x) = -2020$

(β) $f(x) = -2$

(γ) $f(x) = 2$

(δ) $f(x) = 3$

(ε) $f(x) = 2019$

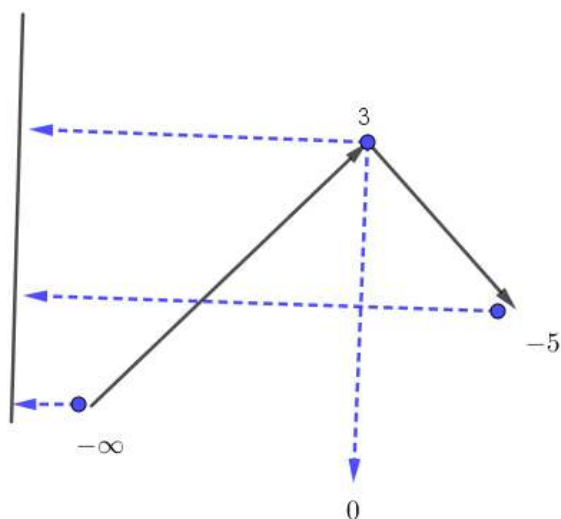
Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\gamma \in (-\infty, 0)$, ώστε $f(\gamma) = -1940$

Δ. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f έχει ακρότατα.

Ε. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3 + \eta\mu^4 x + \eta\mu^2 x$

Υπόδειξη

Μπορεί να βοηθήσει το επόμενο σχήμα:



ΘΕΜΑ 15°(Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \leq 1 \\ 2e^{x-1}, & x > 1 \end{cases}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, γνησίως μονότονη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 (β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} και να την βρείτε. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} .
 (γ) Να βρείτε τα όρια :

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - 3^x + 2}{f(x+1) + 3^x + 1}, \quad B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x+2) - 3^x + 2}{f(x+2) + 3^x + 1}, \quad \Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x) - f(x+1) + 2}{f(2x) + f(x+1) + 1}$$

- (δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 4 - x$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.
 (ε) Να λύσετε στο $(0, +\infty)$ την εξίσωση $f(x) + f(x^3) = f(x^2) + f(x^4)$.

ΘΕΜΑ 16°(Γ-Δ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4} - \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$.

- (α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -2$.
 (β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη και να βρείτε το πρόσημό της.
 (γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 2021$.
 (δ) Να βρείτε τα όρια $\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\mu = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x)$ καθώς και τις ασύμπτωτες της C_f .
 (ε) Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x αυξάνει.
 (στ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(4x) = f(5x) + f(3x)$
 (ζ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .

ΘΕΜΑ 17° (Γ)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(x) = 2xe^{-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)} - x^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον τύπο της f .

Έστω ότι $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

(β) Να γράψετε την f ως σύνθεση δύο συναρτήσεων G, H , καμία από τις οποίες δεν είναι η συνάρτηση $I(x) = x, x \in \mathbb{R}$.

(γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f . Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να χαράξετε την C_f .

(δ) Να βρείτε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - f(x))$.

(ε) Να αποδείξετε ότι στο σύνολο των σημείων $N = \{M(x, f(x)) \mid 0 \leq x \leq 2\}$ υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M_0(x_0, f(x_0))$, του οποίου η απόσταση από το σημείο $P(1, 0)$ είναι ελάχιστη.

ΘΕΜΑ 18° (Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\mu-1)x^3 + \lambda x^2}{x-1}$, με $x \neq 1$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Για την συνάρτηση f

γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

(α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = \mu = 1$.

(β) Να μελετήσετε τις f και f' ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(δ) Να αποδείξετε ότι από το σημείο $P(1, 2)$ δεν μπορούμε να φέρουμε εφαπτομένη προς τη γραφική παράσταση της f .

(ε) Να λύσετε την εξίσωση $(e^x + 2)^2(x^2 + 2) = (e^x + 1)(x^2 + 3)^2$

(στ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Υπόδειξη

(β) Είναι $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

(ε) Παίρνει τη μορφή $f(e^x + 2) = f(x^2 + 3)$. Στο διάστημα $[2, +\infty)$ η f είναι γνησίως μονότονη.

ΘΕΜΑ 19° (Δ)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(-1) = f(1) = 1$ και $xf'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, με $x \neq 0$ είναι σταθερή και $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

(β) Να βρείτε τη θέση του σημείου P της C_f , για την οποία η απόσταση PN είναι η ελάχιστη, όπου $N(0, \frac{9}{2})$.

(γ) Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το σημείο $K(-1, -8)$.

Δίνεται ένα μεταβλητό σημείο $M(x, f(x))$ της γραφικής παράστασης της f με θετική τετμημένη. Η προβολή T του M στον άξονα $x'x$ πλησιάζει τον άξονα των τεταγμένων με ρυθμό 2 m/min .

(δ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής τη στιγμή t_0 που η τετμημένη του M είναι ίση με $\sqrt{3} \text{ m}$:

(i) Της τεταγμένης του σημείου M.

(ii) Της απόστασης του M από την αρχή των αξόνων.

(iii) Της γωνίας $\theta = \widehat{MOT}$ και της γωνίας ω που σχηματίζει η εφαπτομένης της C_f στο M με τον άξονα $x'x$.

(ε) Δίνεται το σημείο $N(-4, 8)$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου MON, τη χρονική στιγμή που η τετμημένη του M είναι ίση με 2.

ΘΕΜΑ 20° (Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2(x + \frac{100}{x})$, $x \neq 0$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f , να την μελετήσετε ως προς τα κοίλα, να βρείτε τις ασύμπτωτες και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

(γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = -6x + 80$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(δ) Ένα τυπογραφείο θέλει να τυπώσει ορθογώνιες κάρτες με επιφάνεια 100 cm^2 , θέλει όμως οι κάρτες να έχουν την ελάχιστη περίμετρο. Ποιες πρέπει να οι διαστάσεις της κάρτας για να το πετύχει αυτό και πόση θα είναι η ελάχιστη περίμετρος;

ΘΕΜΑ 21° (Β)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+2}$ και $g(x) = \frac{x+4}{3}$.

A. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g .

B. Να ορίσετε την αντίστροφη της f καθώς και την σύνθεση $f \circ g$.

Γ. Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα τη γραφική παράσταση των $C_f, C_{f^{-1}}$.

Δ. Δίνεται το σημείο $A(\frac{3}{2}, 0)$ και το σημείο $M(x, f(x))$ της C_f . Να εκφράσετε το μήκος του

τμήματος AM ως συνάρτηση του x και να βρείτε την τιμή του x , για την οποία η απόσταση AM είναι η ελάχιστη.

Ε. Δίνεται το σημείο $N(-a-4, 0)$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $M(a, f(a))$ και $N(-a-4, 0)$ εφάπτεται στη C_f .

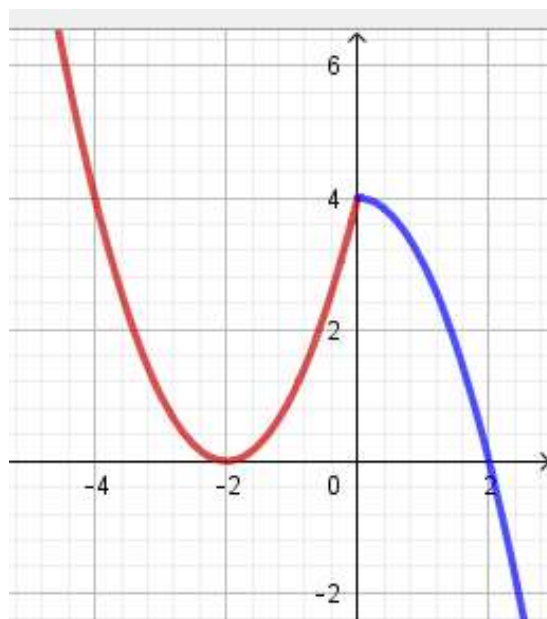
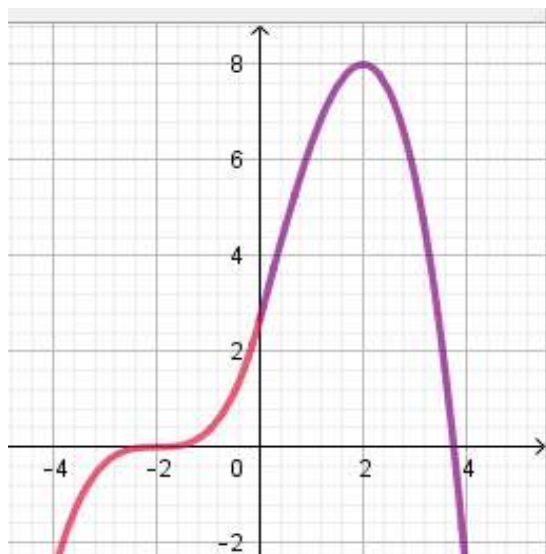
Υπόδειξη

(ε) Είναι $\lambda_{MN} = \frac{\sqrt{a+2}}{2a+4} = \frac{\sqrt{a+2}}{2(a+2)} = \frac{1}{2\sqrt{a+2}} = f'(a)$. Επομένως η ευθεία MN εφάπτεται με την C_f .

ΘΕΜΑ 22° (Γ)

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και της παραγώγου της, όχι αναγκαστικά με αυτή τη σειρά.

Θεωρείστε ότι $f(0) = \frac{8}{3}$



(α) Να αιτιολογήσετε με δύο τουλάχιστον επιχειρήματα ότι το πρώτο διάγραμμα αντιστοιχεί στη συνάρτηση f .

(β) (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f παρουσιάζει στο -2 τοπικό ελάχιστο και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 0..

(γ) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f .

(δ) Να βρείτε με αιτιολόγηση τα κρίσιμα σημεία της f και το όριο:

$$K = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) - 2f(x) + \eta \mu x}{f^2(x) + 3f(x) + \sigma \nu \eta x + 4}.$$

(ε) Να υπολογίσετε τα όρια $A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x)}{x+2}$ και $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - f^2(0)}{x}$

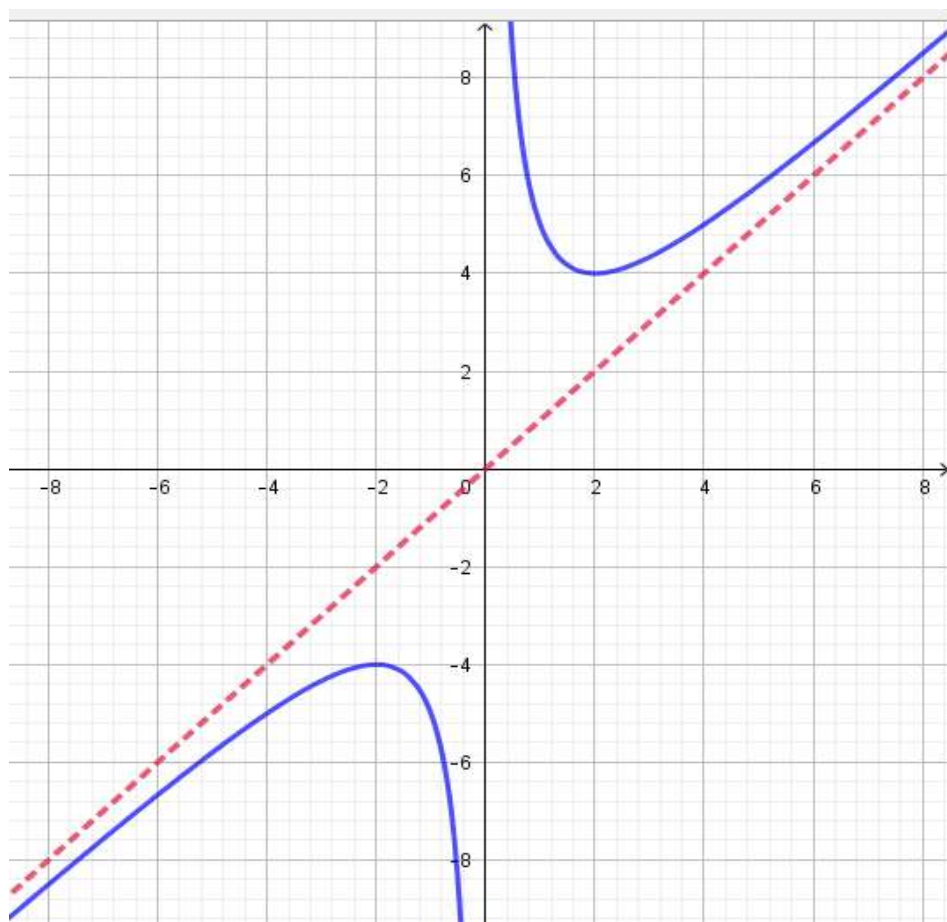
(στ) Θα μπορούσαν οι παραπάνω γραφικές παραστάσεις να αφορούν τη συνάρτηση;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x+2)^3, & x < 0 \\ \frac{1}{3}(12x - x^3 + 8), & x \geq 0 \end{cases}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή της .

ΘΕΜΑ 23^ο (B)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.



Με βάση αυτό το σχήμα :

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A και να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

B2. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα και το σύνολο τιμών της f .

B3. Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο της f στο 0 και να αιτιολογήσετε την απάντησή της.

B4. Να υπολογίσετε τα όρια : $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$, $\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) + 2f(x) + 3}{f^2(x) - 3f(x) + 4}$

B5. Μια συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D = [-2, 0) \cup (0, 2]$ και είναι $g = f$ στο σύνολο D . Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1 και στο διάγραμμα του σχήματος, που θα μεταφέρετε στην κόλλα της, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g^{-1} . Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της g^{-1} ;

ΘΕΜΑ 24° (Β)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\lambda-1)x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Για την f γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε την τιμή του λ και την τιμή του $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι $\lambda = 2$.

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να ορίσετε την αντίστροφη f^{-1} της f .

(δ) Να υπολογίσετε τα όρια

$$A = \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \quad B = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(e^x - 3^x), \quad \Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} f(x \ln \frac{2}{x}), \quad \Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x^2 \ln \frac{3}{x})$$

(ε) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, να βρείτε τις ασύμπτωτες και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

ΘΕΜΑ 25° (Γ)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2|x|}$ και $g(x) = 1 - \frac{2}{|x|}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $f = g$ και να γράψετε την g στη μορφή $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1$, έτσι ώστε :

$$g_3(2) = -1, g_2(1) = 2, g_1(-1) = 1$$

(β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = g \circ g$

(γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(δ) Αν η εφαπτομένη της C_g στο τυχαίο σημείο της $M(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha > 0$ τέμνει τις ευθείες $y = 1, x = 0$ στα σημεία A και B , να αποδείξετε ότι $MA = MB$ και ότι το τρίγωνο NAB με $N(0,1)$ έχει σταθερό εμβαδόν, αν το M μεταβάλλεται.

Υπόδειξη

(α) Είναι $g_3(x) = 1 - x, g_2(x) = \frac{2}{x}, g_1(x) = |x|$.

(γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$y - 1 + \frac{2}{\alpha} = \frac{2}{\alpha^2}(x - \alpha)$$

Από αυτή με $y=1$, $x=0$ βρίσκουμε αντίστοιχα $A(2\alpha,1)$ και $B(0,1-\frac{4}{\alpha})$. Το τμήμα AB έχει όμως μέσο το M (Με τον τύπο από τη Β' Λυκείου).

ΘΕΜΑ 26° (Β)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{8}{x}$ και $g(x) = x^2 - 6x + 12$.

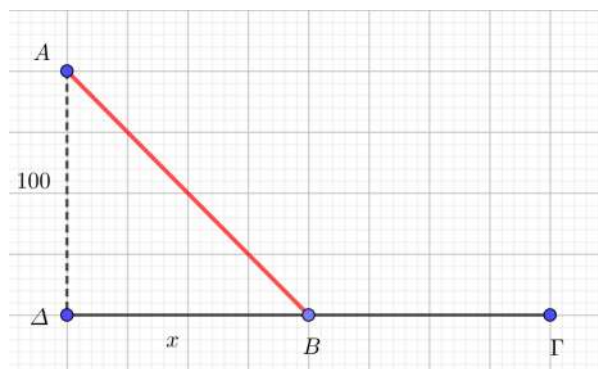
- (α) Να αποδείξετε ότι το $A(2,4)$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο των C_f και C_g .
- (β) Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο.
- (γ) Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g .
- (δ) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h = g - f$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- (ε) Η εφαπτομένη της C_f σε τυχαίο σημείο της M τέμνει τους άξονες στα σημεία N και P . Να αποδείξετε ότι $MN = MP$ και ότι το τρίγωνο ONP έχει σταθερό εμβαδόν.

ΘΕΜΑ 27° (Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5\sqrt{100^2 + x^2} + 3(300 - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- (α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- (β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f , να εξετάσετε αν η f έχει ολικά ακρότατα και αν ναι, να βρεθούν.
- (γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $P(75,1300)$, $N(240,1480)$ και να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$.

- (δ) Μια εταιρεία θέλει να περάσει ένα καλώδιο από τη διαδρομή $AB\Gamma$. Το σημείο A απέχει από τον ευθύγραμμο δρόμο $\Gamma B\Delta$ 100 m. Το μήκος της διαδρομής $\Gamma\Delta$ είναι 300 m. Το κόστος εγκατάστασης του καλωδίου που περνάει μέσα από άγονη περιοχή, όπως το AB , είναι 5 εκατοντάδες ευρώ ανά μέτρο, ενώ το κόστος εγκατάστασης του καλωδίου κατά μήκος του δρόμου $\Gamma\Delta$ είναι 3 εκατοντάδες ανά μέτρο.



Σε ποιο σημείο της διαδρομής ΓΔ πρέπει να βρεθεί το σημείο Β, ώστε το συνολικό κόστος εγκατάστασης του καλωδίου να είναι το ελάχιστο και πόσο είναι αυτό το κόστος;

Υπόδειξη

(α) Η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 75$.

(γ) Είναι $f(75) = 5\sqrt{4^2 \cdot 25^2 + 3^2 \cdot 25^2} + 3(300 - 75) = 125\sqrt{16 + 9} + 675 = 625 + 675 = 1300$

(δ) Το κόστος δίνεται από τη συνάρτηση f και το ελάχιστο είναι $f(75) = 1300$ εκατοντάδες ευρώ.

ΘΕΜΑ 28° (Γ)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+\alpha}{x} \cdot \ln x$ και $g(x) = \ln x + x - 1$, με $x > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Το $f(1)$ είναι

τοπικό ακρότατο της f .

(α) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης g .

(β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.

(γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

(δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

(ε) Αφού αποδείξετε ότι ορίζεται η g^{-1} , να βρείτε το πεδίο ορισμού της g^{-1} και να λύσετε την ανίσωση $g^{-1}(x) > x$.

(στ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής $M(\beta, f(\beta))$

και ότι ισχύει $f(\beta) = \frac{(\beta-1)(3-\beta)}{2\beta}$.

Υπόδειξη

(ε) Είναι αιχμηρό ερώτημα :

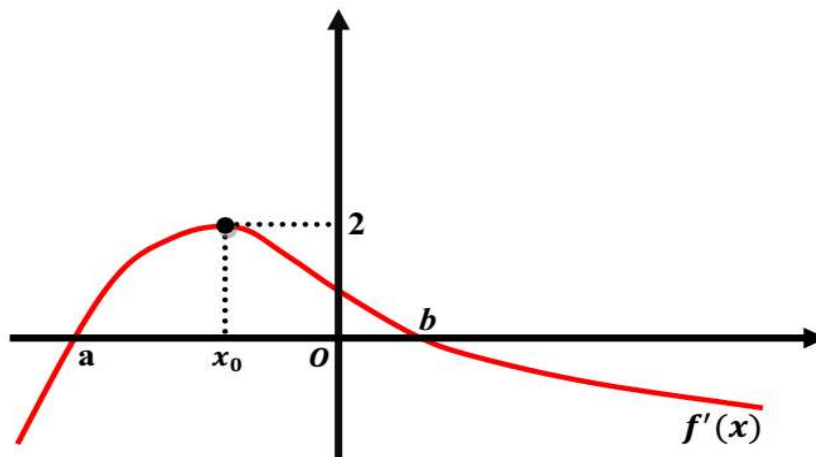
Για $x \leq 0$ ισχύει, διότι $g^{-1}(x) \in D_g = (0, +\infty)$. Για $x > 0$ συνθέτουμε με την g . Τελικά παίρνουμε $x \leq e$

(στ) Είναι $f''(x) = \frac{3-x-2\ln x}{x^3}$. Η συνάρτηση του αριθμητή είναι γνησίως φθίνουσα και έχει

σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Επομένως η f'' έχει μοναδική ρίζα, στην οποία αλλάζει πρόσημο.

ΘΕΜΑ 29° (Γ)

Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η παράγωγός της έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Δίνεται ακόμα ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $f(a) < 0$, $f''(a) = 3$, $f(x_0) = \frac{1}{2}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα, να βρείτε το σύνολο τιμών της και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ακριβώς ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 και ας είναι $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

(β) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .

(γ) Να υπολογίσετε τα όρια :

$$A = \lim_{x \rightarrow b} \frac{\ln(x-b)}{(f'(x))^3} \quad \text{και} \quad B = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\eta\mu(f'(x))}{x-a}$$

(δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x+1) \leq 2 + f(x)$

(ε) Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) + f(x) = f^2(x) + \frac{9}{4}$.

(Το θέμα οφείλω στο συνάδελφο Σωτήρη Σκοτίδα. Τον ευχαριστώ).

Υπόδειξη

(γ) Είναι :

$$(i) A = \lim_{x \rightarrow b} \frac{\ln(x-b)}{(f'(x))^3} = \lim_{x \rightarrow b} (\ln(x-b)) \cdot \frac{1}{(f'(x))^3} = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

διότι η παράγωγος είναι αρνητική δεξιά του a .

$$(ii) B = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\eta\mu(f'(x))}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\eta\mu(f'(x))}{f'(x)} \cdot \frac{f'(x)}{x-a} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\eta\mu(f'(x))}{f'(x)} \right) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} = 1 \cdot f''(a)$$

(δ) Εφαρμόζουμε ΘΜΤ στο διάστημα $[x, x+1]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f(x+1) - f(x)$$

Όμως $f'(\xi) \leq 2$, διότι από το γράφημα παίρνουμε ότι $f'(x) \leq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ε) Τη γράφουμε στην ισοδύναμη μορφή : $f'(x) = f^2(x) - f(x) + \frac{9}{4}$.

Το x_0 είναι ρίζα. Αλλά $f'(x_0) \leq 2$ και $f^2(x_0) - f(x_0) + \frac{9}{4} \geq 2$, διότι

$$g(x) = x^2 - x + \frac{9}{4} \geq g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 . \text{ Προφανώς μπορούμε να γράψουμε :}$$

$$f^2(x_0) - f(x_0) + \frac{9}{4} = \left(f(x_0) - \frac{1}{2}\right)^2 + 2 \geq 2$$

ΘΕΜΑ 30° (Γ)

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases} .$$

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, όχι όμως και παραγωγίσιμη στο 0.

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

(δ) Δίνονται τα μεταβλητά σημεία $M(x, f(x))$ και $N(f(x), x)$, με $x \in \mathbb{R}$. Ονομάζουμε d τη συνάρτηση που εκφράσει την απόσταση MN των σημείων M και N .

(i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d έχει ολικό ελάχιστο και δύο θέσεις τοπικού μεγίστου. Πώς ερμηνεύεται γεωμετρικά το παραπάνω συμπέρασμα ;

(ii) Να αποδείξετε ότι αν σε κάποια θέση η d παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, τότε οι εφαπτομένες στις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} στα αντίστοιχα σημεία τους M, N είναι παράλληλες.

ΘΕΜΑ 31° (Β)

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)e^{-x}, \text{ με } x \neq 0.$$

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

- (γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $1 + \frac{2}{x} = \lambda e^x$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.
- (ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες .

ΘΕΜΑ 32° (Β)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ και $g(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right)$.

- (α) Να εξετάσετε αν $f = g$. Αν όχι, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο Γ του $\mathbb{R}$, στο οποίο είναι $f = g$.
- (β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- (γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$ και να βρείτε την f^{-1} .
- (δ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = -2x - 1$ εφάπτεται με τη C_f .
- (ε) Η εφαπτομένη (ε) της C_f σε ένα μεταβλητό της σημείο $M(a, f(a))$ τέμνει τις ευθείες με εξισώσεις $y = 1, x = 1$ στα σημεία A και B . Να αποδείξετε ότι $MA = MB$ και ότι το εμβαδόν του τριγώνου NAB , όπου $N(1,1)$ είναι σταθερό.

ΘΕΜΑ 33° (Γ)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = -2$, $f(2) = 4$, $f(x) \neq 1$ και

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(f(x)-1)^2 \text{ για κάθε } x \neq 1.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)-1} - \frac{x}{3}$, με $x \neq 1$ είναι σταθερή.
- (β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, $x \neq 1$.
- (γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- (δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- (ε) Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ h$, όπου $h(x) = x - \ln x$, $x > 0$.
- (ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες και χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .

ΘΕΜΑ 34° (Δ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{1+e^{2-x}}$.

- (α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και τα σημεία καμψής.
 (β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f , τις ασύμπτωτες της C_f και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .
 (γ) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f και να βρείτε την f^{-1} . Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} .

Η συνάρτηση $N(t)$ που δίνει σε κάποια περιοχή τον αριθμό των ατόμων (σε χιλιάδες μονάδες) που έχουν προσβληθεί από κάποιον ιό 1 μήνες μετά το ξέσπασμα μιας πανδημίας έχει εκτιμηθεί από τους ειδικούς επιδημιολόγους ότι υπακούει στη σχέση $N'(t) = \frac{1}{4}N(t)(4 - N(t))$, με $N(2) = 2$.
 Επιπλέον ισχύει ότι $0 < N(t) < 4$ για κάθε $t > 0$.

- (δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $K(t) = \ln \frac{N(t)}{4 - N(t)} - t + 2$ με $t > 0$ είναι σταθερή.
 (ε) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $N(t)$ και αφού διαπιστώσετε ότι $N = f$ στο διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$, να βρείτε τη χρονική στιγμή που ο ρυθμός εξάπλωσης της πανδημίας είναι μέγιστος.
 Αν δεν ληφθούν μέτρα, πόσα περίπου άτομα θα μολυνθούν σε βάθος χρόνου;

Υπόδειξη

(α) Είναι $f'(x) = 4 \cdot \frac{e^{2-x}}{(1+e^{2-x})^2}$ και $f''(x) = 4e^{2-x} \cdot \frac{e^{2-x}-1}{(1+e^{2-x})^3}$

ΘΕΜΑ 35° (Γ)

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \ln x + ax$, $h(x) = e^{1-x} - \beta x^2$ και $f = g - h$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$. Στο σημείο με τετμημένη 1 οι C_g, C_h έχουν κοινή εφαπτομένη.

- (α) Να αποδείξετε ότι $a = 4$, $\beta = -3$.
 (β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f και στη συνέχεια να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμψής.
 (γ) Να βρείτε το πρόσημο, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

(δ) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η g^{-1} , να βρείτε το πεδίο ορισμού της g^{-1} και να λύσετε την ανίσωση $g^{-1}(x) > \frac{x}{4}$.

(ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h έχει ένα ακριβώς τοπικό ακρότατο, που είναι και ολικό, στη θέση x_0 , με $x_0 \in (0,1)$.

(στ) Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(10) < 2f(6)$.

ΘΕΜΑ 36° (B)

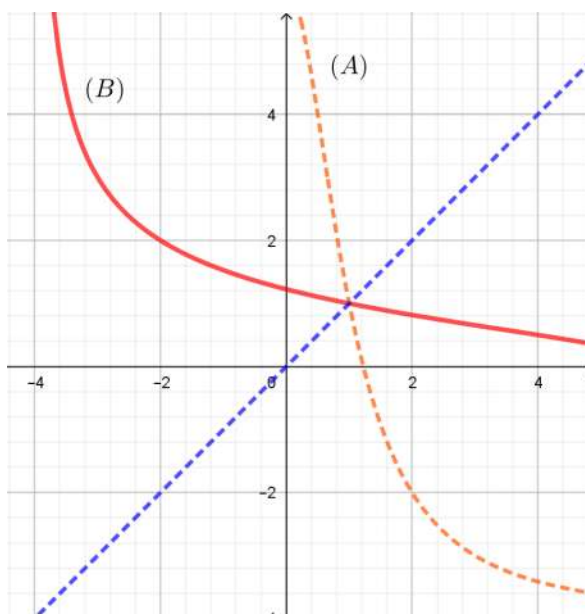
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\frac{6-x}{x+4}}$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της f . Επίσης, να γράψετε την f ως σύνθεση δύο συναρτήσεων, από τις οποίες καμία δεν είναι η συνάρτηση $y = x$.

(β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} όπως επίσης και την τιμή $f^{-1}(3)$.

(γ) Να βρείτε σε ποια διαστήματα η $C_{f^{-1}}$ είναι πάνω από την ευθεία με εξίσωση $y = x$.

(δ) Τα παρακάτω διαγράμματα δύο συναρτήσεων είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$. Στο ένα από αυτά απεικονίζεται η γραφική παράσταση της f^{-1} . Να βρείτε με αιτιολόγηση ποιο από τα διαγράμματα (A), (B) αντιστοιχεί στην f^{-1} . Σε ποια σημεία τέμνουν οι γραφικές αυτές παραστάσεις την ευθεία $y = x$ και τους άξονες;



(Την ιδέα για το θέμα οφείλω στο συνάδελφο Φάνη Μαργαρόνη. Τον ευχαριστώ.)

Υπόδειξη

(α) $D_f = (-4, 6]$, $f(D_f) = (-4, 6]$. Αν γράψουμε $f(x) = \sqrt{-1 + \frac{10}{x+4}}$, η μονοτονία προκύπτει και με τον ορισμό. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

(β) Είναι $f(D_{f^{-1}}) = (-4, 6]$. Επίσης :

$$f^{-1}(3) = y \Leftrightarrow 3 = f(y) \Leftrightarrow f(-3) = f(y) \Leftrightarrow y = -3$$

(γ) Βρίσκουμε $f^{-1}(x) = \frac{6-4x^2}{1+x^2}$, $x \geq 0$. Η ανίσωση οδηγεί στην

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x+3) < 0$$

και τελικά, με πίνακα ή αλλιώς, βρίσκουμε ότι $x \in (0, 1)$, αφού $x \geq 0$.

(δ) Στο διάγραμμα (Α), αφού η αντίστροφη έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$. Το (Β) αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

ΘΕΜΑ 37°(Γ)

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f(x) = \alpha(e^x - x) - (x+1)\ln(x+1) + x, \alpha \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

(β) Να μελετήσετε την f και την f' ως προς τη μονοτονία.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\gamma \in (0,1)$, τέτοιο ώστε

$$f(\gamma) = 2 - 2\gamma.$$

(δ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, τα σημεία καμπής, να βρείτε τις ασύμπτωτες και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

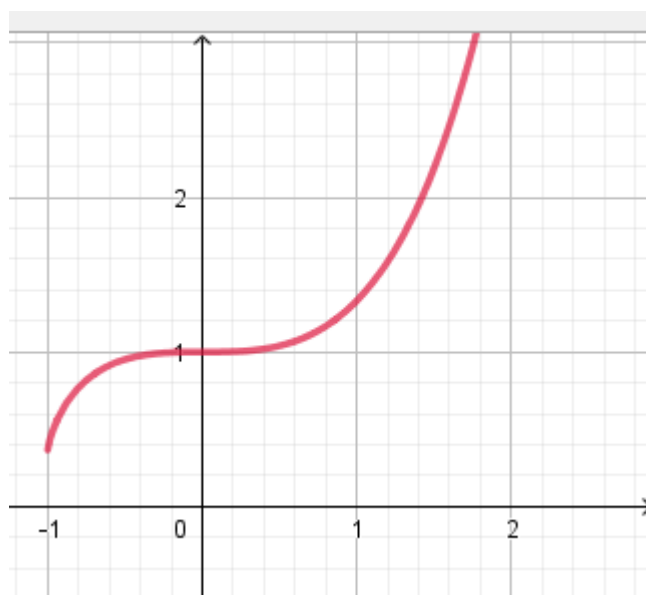
Υπόδειξη

(α) Αν για παράδειγμα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, τότε $f'(x) \geq 0 = f'(0)$ για κάθε $x > -1$. Από το θεώρημα Fermat, πρέπει $f''(0) = 0$. Αλλά:

$$f'(x) = \alpha(e^x - 1) - \ln(x+1) \quad \text{και} \quad f''(x) = \alpha e^x - \frac{1}{x+1} \quad \text{κλπ.}$$

(γ) Είναι : $e - 2 \ln 2 = (e - 2) + 2(1 - \ln 2) > 0$).

(δ) Η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα



ΘΕΜΑ 38°(Γ)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $2xf(x) = (x^2 + 1)(f(x) - f'(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$
- (β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι η C_f έχει μία ακριβώς οριζόντια εφαπτομένη.
- (γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $e^x = 2020(x^2 + 1)$ και γιατί.
- (δ) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-x^2}(x^4 + 1) = x^2 + 1$.
- (ε) Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu^2 f(x)}{\sqrt{f^2(x) + 1} - 1}$

ΘΕΜΑ 39°(Γ)

Μια συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f(x^2) = xe^{x^2}$ για κάθε $x \geq 0$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται στο $x = 0$.
- (β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x}e^x$, $x \geq 0$.
- (γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- (δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^x = \frac{2020}{\sqrt{x}}$
- (ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x^3) = f(x^4) + f(x^2)$
- (στ) Αν $a > 0$ και $f(a^x) \geq f(x^a)$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $a = e$.

ΘΕΜΑ 40°(Γ)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x - x$, $g(x) = \frac{x^2 + 2}{2}$ και $h = f - g$.

- (α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, να βρείτε το σύνολο τιμών της και να εξετάσετε αν η f έχει ολικά ακρότατα.
- (β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν παράλληλες ευθείες που εφάπτονται με την C_f .
- (γ) Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο. Ποια είναι τα κοινά σημεία των C_f, C_g ;

(δ) Να μελετήσετε την h' ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση:

$$h(x^4 + 1) + h(x^2) = h(x^4) + h(x^2 + 1)$$

(ε) Να αποδείξετε ότι:

(i) Η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

(ii) $h(1) + h(5) > 2h(3)$

ΘΕΜΑ 41°(Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - (\lambda + 1)x$, $\lambda > -1$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(β) Να βρείτε τον σύνολο τιμών της f και να λύσετε την εξίσωση $e^{x-1} = (\lambda + 1)(x - \ln(\lambda + 1))$.

(γ) Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του λ , ώστε $e^{x-1} \geq (\lambda + 1)x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(δ) Να αποδείξετε ότι για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (γ), η ευθεία με εξίσωση

(ε): $y = (\lambda + 1)x$ εφάπτεται με την C_g , όπου $g(x) = e^{x-1}$ και συγχρόνως η C_f εφάπτεται με τον άξονα $x'x$.

(ε) Αν $f'(a^x + \beta^x) \geq f'(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = 1$.

Υπόδειξη

(α) Ολικό ελάχιστο είναι το $f(1 + \ln(\lambda + 1)) = -(\lambda + 1)\ln(\lambda + 1)$

(β) Η εξίσωση παίρνει τη μορφή $f(x) = f(1 + \ln(\lambda + 1))$ και με τον ορισμό της μονοτονίας προκύπτει ότι $f(x) > f(1 + \ln(\lambda + 1))$ για κάθε $x \neq 1 + \ln(\lambda + 1)$. Μοναδική ρίζα είναι επομένως η $x = 1 + \ln(\lambda + 1)$

(γ) Πρέπει το ελάχιστο να είναι μη αρνητικό. Έτσι βρίσκουμε $-1 < \lambda \leq 0$, οπότε $\lambda = 0$.

(δ) Σημείο επαφής, στις δύο περιπτώσεις αντίστοιχα, είναι το $A(1, 1)$ και το $A(1, 0)$.

(ε) Η παράγωγος είναι γνησίως αύξουσα και έτσι παίρνουμε την $\alpha^x + \beta^x \geq 2$. Εργαζόμεστε στη συνέχεια με το θεώρημα Fermat (χαρακτηριστική περίπτωση) στη συνάρτηση $h(x) = \alpha^x + \beta^x - 2$. Ας σημειώσουμε ότι $h(x) = \alpha^x + \beta^x - 2 \geq 0 = h(0)$ και έτσι πρέπει τελικά $h'(0) = 0$.

ΘΕΜΑ 42°(Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2(x - \ln x) + \frac{\ln^2 x}{2}$, $x > 0$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$4(\ln x - x) = \ln^2 x - 4040.$$

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $4(x - \ln x) = (2 - \ln x)(2 + \ln x)$

(δ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

(ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

**Προτείνουμε να συζητήσετε με τους καθηγητές σας όσο
περισσότερα γίνεται από τα παραπάνω θέματα.**

Καλή Επιτυχία !!!

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ : Συμπληρωματικές προτάσεις στη θεωρία

Με παραδείγματα !

Μπάμπης Στεργίου -2023

Οι παρακάτω προσθήκες είναι βασικές προτάσεις που μπορούν να χρησιμοποιούνται χωρίς καμία απόδειξη ή άλλη αναφορά, για τη λύση σχετικών ασκήσεων στις εξετάσεις. Επειδή δεν αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο, είναι όμως επίσημες οδηγίες, πρέπει να προσεχθούν ιδιαίτερα. Καλό είναι οι μαθητές να γνωρίζουν και τη διατύπωσή τους για κάθε είδους αξιολόγηση και όχι μόνο για τη λύση ασκήσεων.

Πρόταση 1.

i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2.$$

ii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2.$$

Εφαρμογή 1^η

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και περιττή, να λύσετε την ανίσωση

$$f^2(x) < f^2(2)$$

Υπόδειξη

Στην επίλυση μιας ανίσωσης είναι σημαντικό τα βήματα να είναι αντιστρεπτά (να μπορούμε να εργαζόμαστε δηλαδή με ισοδυναμίες) και αυτό ακριβώς εξασφαλίζεται από την παραπάνω πρόταση. Εργαζόμαστε λοιπόν με ισοδυναμίες :

Επειδή η f είναι περιττή και ορίζεται στο 0, είναι $f(0) = 0$ και αφού είναι γνησίως φθίνουσα, παίρνουμε ότι :

$$2 > 0 \Leftrightarrow f(2) < f(0) \Leftrightarrow f(2) < 0$$

Έχουμε επομένως :

$$f^2(x) < f^2(2) \Leftrightarrow |f(x)| < |f(2)| \Leftrightarrow |f(x)| < -f(2) \Leftrightarrow |f(x)| < f(-2)$$

$$\Leftrightarrow -f(-2) < f(x) < f(-2) \Leftrightarrow f(2) < f(x) < f(-2) \Leftrightarrow 2 > x > -2$$

Άρα $x \in (-2, 2)$.

[Μπορούμε να φέρουμε τους όρους στο πρώτο μέλος, να παραγοντοποιήσουμε και να βρούμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα.]

Πρόταση 2.

Έστω f, g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

i) Αν ισχύουν:

$$\alpha) f(x) \leq g(x) \text{ κοντά στο } x_0 \text{ και } \beta) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty,$$

τότε θα ισχύει και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

ii) Αν ισχύουν:

$$\alpha) f(x) \leq g(x) \text{ κοντά στο } x_0 \text{ και } \beta) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty,$$

τότε θα ισχύει και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Εφαρμογή 2^η

Να βρείτε τα όρια $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2\eta\mu x^2)$ και $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2\sigma\upsilon\nu x)$

Υπόδειξη

Είναι :

$$\blacklozenge x^3 - 2 \leq x^3 + 2\eta\mu x^2 \text{ και επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2) = +\infty, \text{ θα είναι } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2\eta\mu x^2) = +\infty.$$

$$\blacklozenge x^3 - 2\sigma\upsilon\nu x \leq x^3 + 2 \text{ και αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2) = -\infty, \text{ θα είναι } B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2\sigma\upsilon\nu x) = -\infty$$

Προφανώς τα παραπάνω όρια μπορούν να υπολογιστούν και με άλλον τρόπο, γράφοντας πχ :

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2\eta\mu x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 (1 + \frac{2\eta\mu x^2}{x^3}))$$

και να εργαστούμε το κριτήριο παρεμβολής για να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x^2}{x^3} = 0$.

Πρόταση 3

Έστω f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, b]$.

- Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε θα ισχύει: $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
- Αν, επιπλέον, οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο $[a, b]$ (δηλαδή, αν υπάρχει $\xi \in [a, b]$, με $f(\xi) \neq g(\xi)$), τότε θα ισχύει: $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$.

Εφαρμογή 3^η - Παράδειγμα

*** Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \ln(x+1)dx < \frac{1}{2}$

Υπόδειξη

Ισχύει ότι $\ln x \leq x - 1$ (οι μαθητές να την γνωρίζουν ως θεωρία, χωρίς απόδειξη) , οπότε

$$\ln(x+1) \leq x \text{ για κάθε } x > -1.$$

Η ισότητα στην τελευταία ισχύει μόνο για $x = 0$, οπότε η σχέση $\ln(x+1) \leq x$ δίνει :

$$\int_0^1 \ln(x+1)dx < \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

*** Είναι φανερό ότι υπάρχει πλήθος εφαρμογών στην παραπάνω πρόταση, ανάμεσα στις οποίες μπορούμε να βρούμε και ερωτήματα από τις πανελλαδικές εξετάσεις, ειδικά όταν έχουμε τη θέση της γραφικής παράστασης μιας κυρτής ή κοίλης συνάρτησης με την εφαπτομένη της σε ένα σημείο.

Πρόταση 4.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x \geq x+1$ και το ίσον (=) ισχύει μόνο για $x = 0$.

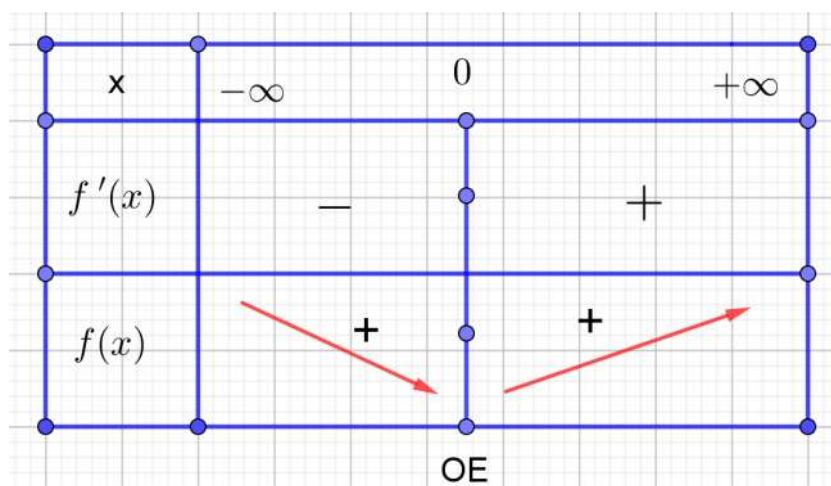
Εφαρμογή 4^η

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = 2e^{x^2} - x^4 - 2x^2 - 2$ και να βρείτε το πρόσημό της

Υπόδειξη

Είναι $f'(x) = 4x(e^{x^2} - x^2 - 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Όμως $e^{x^2} \geq x^2 + 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$.

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και έτσι το πρόσημο της f' φαίνεται στον πίνακα.



Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Επειδή $f(0) = 0$, η f είναι θετική στο $\mathbb{R}^*$.

Πρόταση 5.

Το γινόμενο δύο συναρτήσεων μπορεί να είναι η σταθερή συνάρτηση μηδέν χωρίς καμία από τις δύο να είναι ίση με την συνάρτηση μηδέν.

Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x) = x + |x|$ και $g(x) = x - |x|$ έχουν γινόμενο μηδέν, αλλά καμία από τις δύο δεν είναι η μηδενική συνάρτηση. Συνίσταται να γίνει η γραφική τους παράσταση.

Εφαρμογή 5^η

Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x)(f(x) - 2e^x) = 0$ και $f(0) = 2$

Υπόδειξη

Όπως αναφέρεται στο παραπάνω σχόλιο δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι θα είναι :

$$f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ή } f(x) = 2e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Εργαζόμαστε λοιπόν ως εξής :

Η δοσμένη σχέση παίρνει τη μορφή

$$f(x)(f(x) - 2e^x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 2e^x f(x) + e^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow |f(x) - e^x| = e^x$$

Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^x$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, αφού $|g(x)| = e^x \neq 0$. Όμως $g(0) = 2 - 1 = 1 > 0$, οπότε η g είναι θετική. Συνεπώς :

$$|g(x)| = e^x \Leftrightarrow g(x) = e^x \Leftrightarrow f(x) - e^x = e^x \Leftrightarrow f(x) = 2e^x, x \in \mathbb{R}$$

Πρόταση 6.

Αν μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα (σ_1, σ_2) έχει την ιδιότητα

$$\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow \sigma_2} f(x) = +\infty \text{ (ή } \lim_{x \rightarrow \sigma_1} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow \sigma_2} f(x) = -\infty),$$

τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

Εφαρμογή 6^η

Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in \Delta = (-1, 1)$.

Υπόδειξη

Δεν θα βρούμε τη μονοτονία της f , αφού με την πρώτη ματιά βλέπουμε ότι η f έχει άπειρα όρια στα άκρα του διαστήματος Δ .

Η συνάρτηση f είναι λοιπόν συνεχής στο Δ και επιπλέον :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(x^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = +\infty$$

Σύμφωνα με την πρόταση 6, είναι $f(\Delta) = \mathbb{R}$.

Και μια ακόμα εφαρμογή:

Εφαρμογή 7^η

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^3 + \eta\mu(x^2 - 4)}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Υπόδειξη

Εργαζόμαστε όπως ακριβώς στην προηγούμενη εφαρμογή και βρίσκουμε ότι η συνάρτηση έχει σύνολο το $\mathbb{R}$.

Σχόλιο

Στην παραπάνω εφαρμογή είναι τελείως αποτρεπτική κάθε προσπάθεια εύρεσης της μονοτονίας της συνάρτησης.

*** Είναι πολύ απλό να κατασκευαστεί ένα ερώτημα πάνω σε αυτή τη μορφή, ακόμα και αν η συνάρτηση στον κορμό ενός θέματος στις εξετάσεις είναι διαφορετική. Η συνάρτηση του κορμού μπορεί να εμφανιστεί σε οποιονδήποτε όρο ενός πηλίκου και μάλιστα με τρόπο που μόνο η παραπάνω εφαρμογή να μπορεί να δώσει απάντηση.

Γενικά Θέματα

Δίνουμε ως εφαρμογή ακόμα μερικά γενικά θέματα που για τη λύση τους κάνουμε χρήση των παραπάνω προτάσεων

Θέμα 1°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x + x, x > 0$

(α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

(β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη 1.

(γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποια θέση x_0 και είναι

$f(x_0) \geq \frac{1}{x_0}$. Να βρείτε διάστημα με μήκος 1, στο οποίο παρουσιάζεται το ολικό ελάχιστο της f και

να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(δ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f .

(ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζει η γραφική παράσταση της f , ο άξονας $x'x$ και οι ευθείες $x = 1, x = 2$

Υπόδειξη

(α) Είναι $\ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow -\ln x \geq 1 - x$ και ακόμα $e^{x-1} \geq (x-1) + 1 = x$. Επομένως

$$f(x) = e^{x-1} - \ln x + x \geq x + 1 - x + x = x + 1 > 0$$

Ας σημειώσουμε, χωρίς να είναι απαραίτητο, ότι η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$. Αυτό θα επαληθευθεί από την κυρτότητα και την εφαπτομένη στο σημείο $A(1,2)$ σε παρακάτω ερώτημα.

Είναι φανερό ότι θα αρκούσε και η σχέση :

$$f(x) = e^{x-1} - \ln x + x \geq e^{x-1} + (1-x) + x = e^{x-1} + 1 > 1 > 0$$

(β) $y = x + 1$

(γ) Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f' . Επειδή αυτό είναι το $\mathbb{R}$ και επειδή $f''(x) > 0$, η f' έχει

μοναδική ρίζα x_0 . Είναι $e^{x_0-1} = \frac{1}{x_0} - 1$ και έτσι :

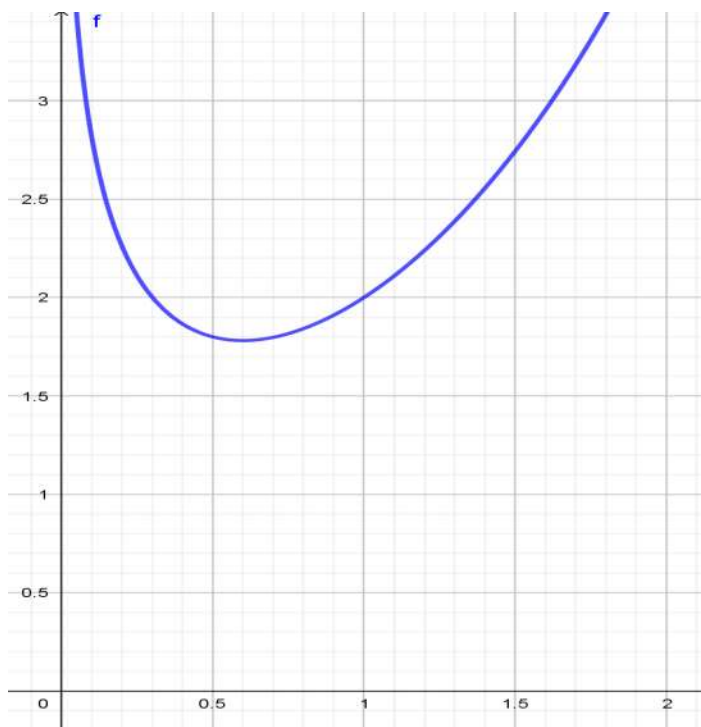
$$f(x_0) = \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) - \ln x_0 + x_0 = \frac{1}{x_0} - (\ln x_0 - x_0 + 1) \geq \frac{1}{x_0}$$

διότι $\ln x_0 - x_0 + 1 \leq 0$.

Με χρήση του θεωρήματος Bolzano μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ρίζα x_0 της f' βρίσκεται στο

διάστημα $(0,1)$ και έτσι $f(x_0) \geq \frac{1}{x_0} > 1$

(δ) Η συνάρτηση f είναι κυρτή και τα όρια στα άκρα είναι ίσα με $+\infty$. Ασύμπτωτη είναι μόνο η $x=0$. Η γραφική παράσταση έχει τη διπλανή μορφή.



***(ε) Είναι

$$E = \int_1^2 f(x) dx = \left[e^{x-1} - x \ln x + x + \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = e - 2 \ln 2 + \frac{3}{2}$$

Για την εύρεση του ολοκληρώματος $E = \int_1^2 \ln x dx$ εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

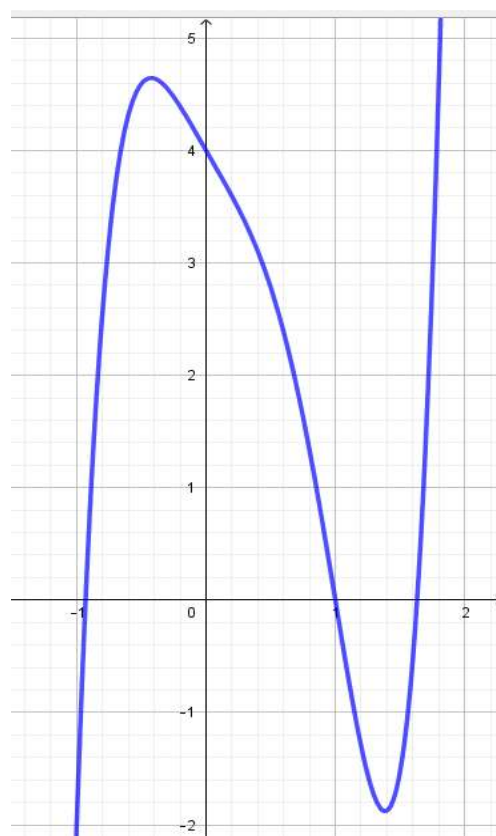
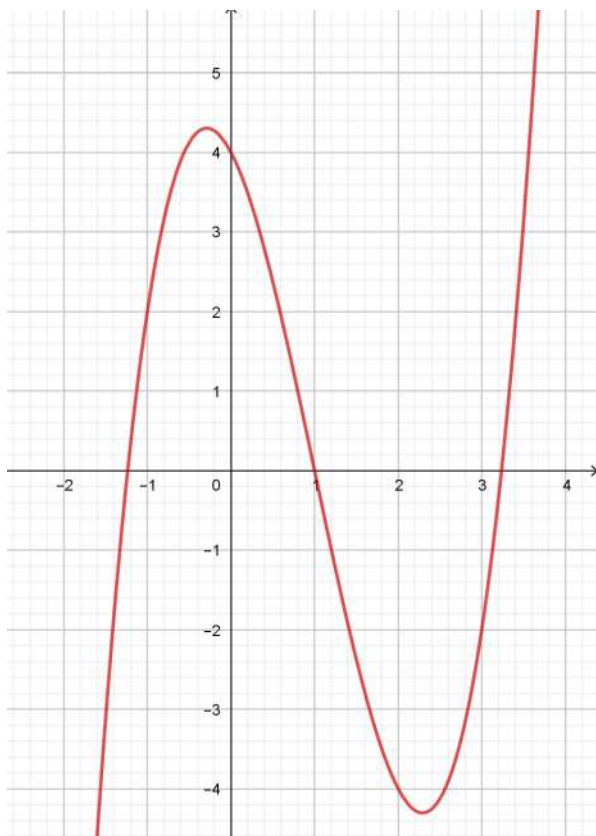
Θέμα 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 4$

(α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής

(γ) Ποια από τις παρακάτω καμπύλες μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Υπόδειξη

(α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

Επομένως $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(β) Είναι $f''(x) = 6(x-1)$ και έτσι το $A(1,0)$ είναι σημείο καμπής της C_f . Δεξιά του 1 η συνάρτηση είναι κυρτή και αριστερά κοίλη.

(γ) Η γραφική παράσταση αντιστοιχεί στο 1^ο σχήμα, διότι από τις σχέσεις ριζών συντελεστών το άθροισμα των θέσεων των ακροτάτων της f (ρίζες της f') είναι 2 ενώ στο δεύτερο σχήμα το άθροισμα των θέσεων είναι μικρότερο από το 1.

Θέμα 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

(α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(γ) Να βρεθεί το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x f(x) - 2f(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x))$

Υπόδειξη

(α) Η συνάρτηση f αυξάνει στο $[-1, 1]$ και φθίνει γνήσια στα δύο άλλα διαστήματα.

(β) Η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-1, 1]$.

(γ) Είναι $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x f(x)) = +\infty$, με τον κανόνα de L'Hospital και $-2 \leq -2f(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \leq 2$.

Επομένως:

$$e^x f(x) - 2 \leq e^x f(x) - 2f(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \leq e^x f(x) + 2$$

Αλλά ή από το κριτήριο παρεμβολής ή από το γεγονός ότι

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x f(x) - 2) = +\infty,$$

συμπεραίνουμε ότι $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x f(x) - 2f(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)) = +\infty$

Θέμα 4°

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα εξής :

♦ Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

♦ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{x} = 0$

♦ $f'(x)f''(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. (α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

F3. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα, στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

F4. Να αποδείξετε ότι η f είναι $\ll 1-1 \gg$ και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} .

2022- Επαναληπτικές

Υπόδειξη

F1. (α) θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) - \eta\mu x}{x}$. Είναι τότε :

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

$$\diamond f(x) = xg(x) + \eta\mu x, \quad x \neq 0$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (xg(x) + \eta\mu x) = 0 + 0 = 0$$

Αφού όμως η f είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη, θα είναι

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Ας βρούμε τώρα το $f'(0)$. Θα βασιστούμε στον ορισμό της παραγώγου στο $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x) + \eta\mu x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xg(x)}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(g(x) + \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Επομένως $f'(0) = 1$

Σχόλια για το (α)

(i) Επειδή γνωρίζουμε ότι η f παραγωγίζεται, ξέρουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ και είναι

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$. Θέλουμε απλά την τιμή του. Αλλά από την υπόθεση παίρνουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$$

(ii) Θα μπορούσαμε να ...παίζουμε και λίγο διαφορετικά, αλλά αυτό δεν είναι κάτι σπουδαίο, ούτε αναγκαίο :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x) - \eta \mu x) + \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - \eta \mu x}{x} + \frac{\eta \mu x}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta \mu x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0 + 1 = 1\end{aligned}$$

Να προσέχουμε όμως πάντα ότι για να διασπάσουμε ένα όριο, πρέπει να έχουμε εξασφαλίσει ότι τα επιμέρους όρια είναι πραγματικοί αριθμοί ή γενικότερα ότι δεν θα πάρουμε απροσδιό-ριστη μορφή.

(β) Για την εξίσωση της εφαπτομένης παίρνουμε τον τύπο :

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = 1 \cdot x \Leftrightarrow y = x$$

Γ2. Από την υπόθεση έχουμε $f'(x)f''(x) = x$.

Τι θυμίζει όμως αυτή η σχέση ; Με λίγη προσπάθεια βλέπουμε ότι:

$$f'(x)f''(x) = x \Leftrightarrow 2f'(x)f''(x) = 2x \Leftrightarrow ((f')^2(x))' = (x^2)', x \in \mathbb{R}.$$

Αφού έχουμε διάστημα, παίρνουμε

$$((f')^2(x))' = (x^2)' \Leftrightarrow (f')^2(x) = x^2 + c$$

Βρίσκουμε $c = 1$ και έτσι

$$(f')^2(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow |f'(x)| = \sqrt{x^2 + 1} \quad (1)$$

Ας σημειώσουμε ότι θα μπορούσαμε να γράφουμε

$$f'(x)f''(x) = x \Leftrightarrow 2f'(x)f''(x) = 2x \Leftrightarrow ((f'(x))^2)' = (x^2)', x \in \mathbb{R}$$

κλπ. Ας διαλέξει ο καθένας ό,τι θεωρεί πιο κατανοητό .

Η σχέση (1) εξασφαλίζει ότι $f'(x) \neq 0$ και αφού η f' είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη), θα διατηρεί πρόσημο. Αλλά $f'(0) = 1 > 0$ και έτσι $f'(x) > 0$. Επομένως η (1) δίνει ότι

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Σχόλιο

Σε σχέσεις όπως $f'(x)f''(x) = x$, χρειαζόμαστε κυρίως μια παράγουσα της $f'(x)f''(x)$.

Αν θέσουμε $f'(x) = u$, τότε $f''(x) = u' = 1$.Έτσι

$$f'(x)f''(x) = u \cdot 1 = u = \left(\frac{u^2}{2}\right)' = \left(\frac{(f'(x))^2}{2}\right)',$$

Αυτή η μέθοδος δουλεύει πάντα και μας δείχνει πώς θα βρούμε την παράγουσα που ζητάμε.

Γ3. Εν συντομία :

Είναι $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, οπότε

$$f''(x) = \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

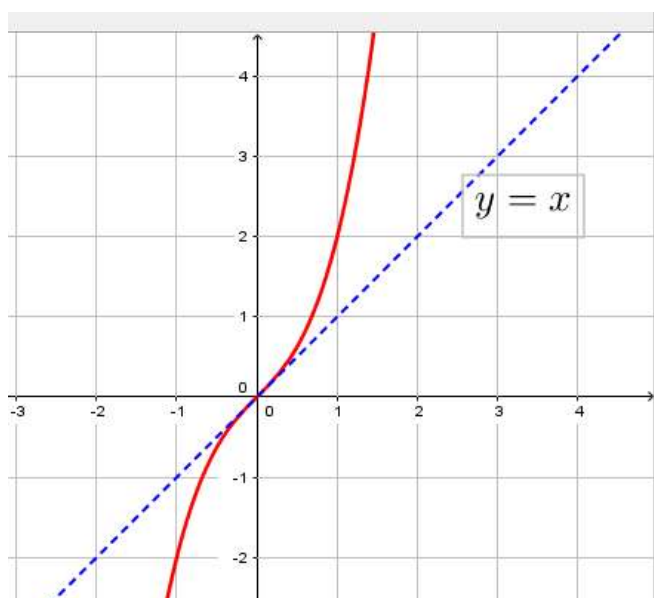
Εύκολα πια βρίσκουμε ότι το $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής .Η f είναι κοίλη αριστερά και κυρτή δεξιά του $x_0 = 0$.

Γ4. Μπορούμε να εργαστούμε με τον ορισμό ; ΟΧΙ ! Είναι όμως

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως είναι και 1-1 .

Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f . Πώς όμως θα το βρούμε το σύνολο , αφού με μια πρώτη προσπάθεια θα δούμε ότι δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο της f ;



Πάμε πίσω στην κυρτότητα και στο σημείο καμπής. Η $y = x$ είναι εφαπτομένη στο $O(0,0)$ και διαπερνάει τη γραφική παράσταση . Από την βασική ιδιότητα της εφαπτομένης σε σημείο μιας κυρτής ή κοίλης συνάρτησης σε ένα διάστημα παίρνουμε ότι :

♦ Για $x < 0$ είναι. Αλλά $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

♦ Για $x > 0$ είναι $x < f(x)$. Αλλά $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Αφού όμως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα είναι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και έτσι η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$.

Θέμα 5°

Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = x$, $A\Gamma = x + 2$ και $\hat{A} = 60^\circ$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το μήκος y της πλευράς $B\Gamma$ δίνεται από τη σχέση

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}, \quad x > 0.$$

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ3. Να μελετήσετε την f ως τα κοίλα, να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

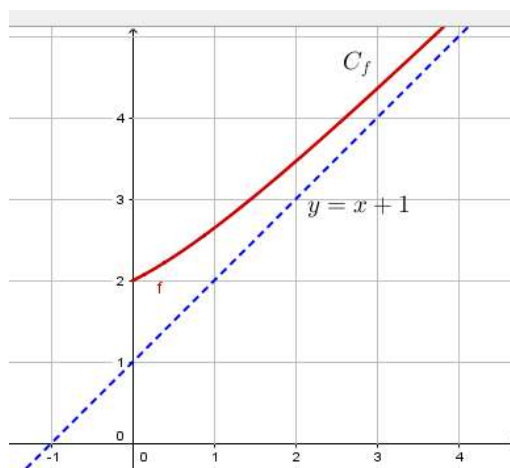
Γ4. Η πλευρά AB αυξάνεται με ρυθμό $\sqrt{3} \text{ cm/min}$. Να βρείτε το ρυθμό, με τον οποίο αυξάνει το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ τη χρονική στιγμή, κατά την οποία αυτό είναι ίσο με $\frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$.

Υπόδειξη

Γ1. Με τον νόμο συνημιτόνων.

Γ2. Είναι γνησίως αύξουσα, αφού $f'(x) = \frac{x+1}{f(x)}$

Γ3. Είναι κυρτή, διότι $f''(x) = \frac{3}{f^3(x)}$. Ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι η ευθεία $y = x + 1$.



Θέμα 6°

Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι

$$f(0) = 0 \text{ και } f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

(α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

(β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα, στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

(γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι $\ll 1-1 \gg$ και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} .

Πανελλαδικές 2022 – Επαναληπτικές, Τροποποίηση

Υπόδειξη

(α) Για την εξίσωση της εφαπτομένης παίρνουμε τον τύπο :

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = 1 \cdot x \Leftrightarrow y = x$$

(β) Εν συντομία :

Είναι $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, οπότε

$$f''(x) = \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Εύκολα πια βρίσκουμε ότι το $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής. Η f είναι κοίλη αριστερά και κυρτή δεξιά του $x_0 = 0$.

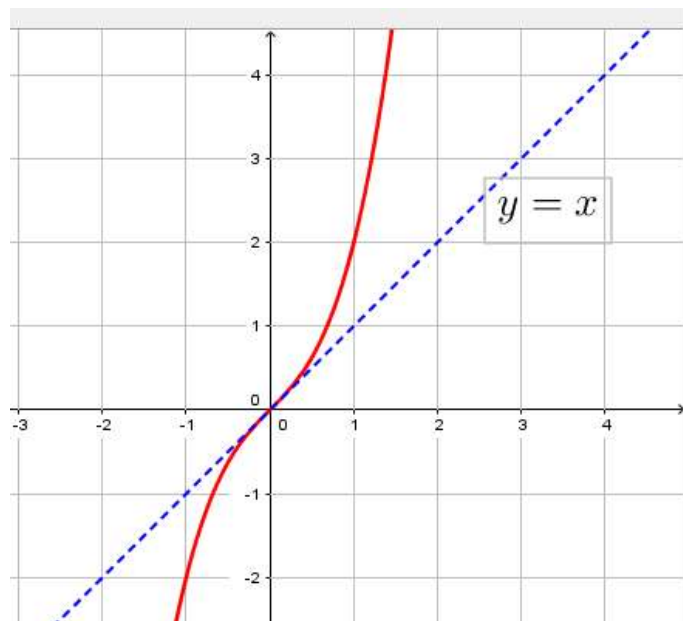
(γ) Μπορούμε να εργαστούμε με τον ορισμό ; ΟΧΙ ! Είναι όμως

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως είναι και $1-1$.

Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f . Πώς όμως θα το βρούμε το σύνολο, αφού με μια πρώτη προσπάθεια θα δούμε ότι δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο της f ;

Πάμε πίσω στην κυρτότητα και στο σημείο καμπής. Η $y = x$ είναι εφαπτομένη στο $O(0,0)$ και διαπερνάει τη γραφική παράσταση.



Από την βασική ιδιότητα της εφαπτομένης σε σημείο μιας κυρτής ή κοίλης συνάρτησης σε ένα διάστημα παίρνουμε ότι :

♦ Για $x < 0$ είναι $f(x) < x$. Αλλά $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

♦ Για $x > 0$ είναι $x < f(x)$. Αλλά $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Αφού όμως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα είναι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και έτσι η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$.

Συμπληρωματικό ερώτημα :

Να αποδείξετε ότι $2 \int_0^{2023} f(x) dx > 2023^2$

Υπόδειξη

Από τη θέση της εφαπτομένης δεξιά από το O παίρνουμε ότι $f(x) \geq x$ για κάθε $x \geq 0$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$. Επομένως :

$$\int_0^{2023} f(x) dx > \int_0^{2023} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2023} = \frac{2023^2}{2}$$

Υποδείξεις - Λύσεις των 42 Θεμάτων

Από τη συνάδελφο Δέσποινα Γκαντόγλου

ΘΕΜΑ 1^ο (B)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + 1 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Τ.Α στο $x = -1$ και κλίση στο 2 ίση με 9.

$$a) \begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f'(2) = 9 \end{cases}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3$$

$$\begin{cases} 3a - 2b - 3 = 0 \\ 12a + 4b - 3 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 3 \\ 12a + 4b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 3 \\ 6a + 2b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

αρα $f(x) = x^3 - 3x + 1$

b) Μονοτονία - ακρότατα

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	↘	↗	
		T.M		T.E	
		$f(-1) = 3$		$f(1) = -1$	

$$γ) A_1 = (-\infty, -1] \quad A_2 = [-1, 1] \quad A_3 = [1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(A_1) \stackrel{f \uparrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] = (-\infty, 3]$$

$$f(A_2) \stackrel{f \downarrow}{=} [f(1), f(-1)] = [-1, 3]$$

$$f(A_3) \stackrel{f \uparrow}{=} [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [-1, +\infty)$$

αρα $f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \mathbb{R}$

$$x^3 = 3x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

$0 \in f(A_1)$ άρα υπάρχει $x_1 \in (-\infty, -1]$ τ.ω

$f(x_1) = 0$ και $f \uparrow$ μοναδική
αρνητική

$0 \in f(A_2)$ άρα υπάρχει $x_2 \in (-1, 1)$ τ.ω

$f(x_2) = 0$ και $f \downarrow$ άρα μοναδική

Όμως $\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(1) = -1 \end{array} \right\}$ από Θ. Βολτανο $x_2 \in (0, 1)$ άρα x_2 θετική

$0 \in f(A_3)$ άρα υπάρχει $x_3 \in [1, +\infty)$ τ.ω

$f(x_3) = 0$ και $f \uparrow$ άρα μοναδική θετική

δ. εφαρμόζουμε π.σ (f) από το $M(2, 3)$.

Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής.

$$\text{τότε } \varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$M \in (\varepsilon) \quad 3 - f(x_0) = f'(x_0)(2 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$3 - (x_0^3 - 3x_0 + 1) = (3x_0^2 - 3)(2 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$3 - x_0^3 + 3x_0 - 1 = 6x_0^2 - 3x_0^3 - 6 + 3x_0 \Leftrightarrow$$

$$2x_0^3 - 6x_0^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x_0 + 1)(x_0^2 - 4x_0 + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_0 = -1 \vee (x_0 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2.$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -3 & 0 & 4 & -1 \\ & -1 & 4 & -4 & \\ \hline 1 & -4 & 4 & 0 & \end{array}$$

άρα $A_1(-1, f(-1))$

$A_2(2, f(2))$

$$\varepsilon_1: y - 3 = 0(x + 1)$$

$$y = 3$$

$$\varepsilon_2: y - 3 = 9(x - 2)$$

$$y = 9x - 15.$$

ε> κυρτώματα - Σ.Κ. Χαραξή. Cf.

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	0
$f''(x)$	- +
$f(x)$	$\curvearrowright$ Σ.Κ. $f(0) = 1$ $\curvearrowleft$ (0, 1)

Τέμνει γ'γ (0, 1)

Τέμνει x'x $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = 0$. 3 ρίζες.

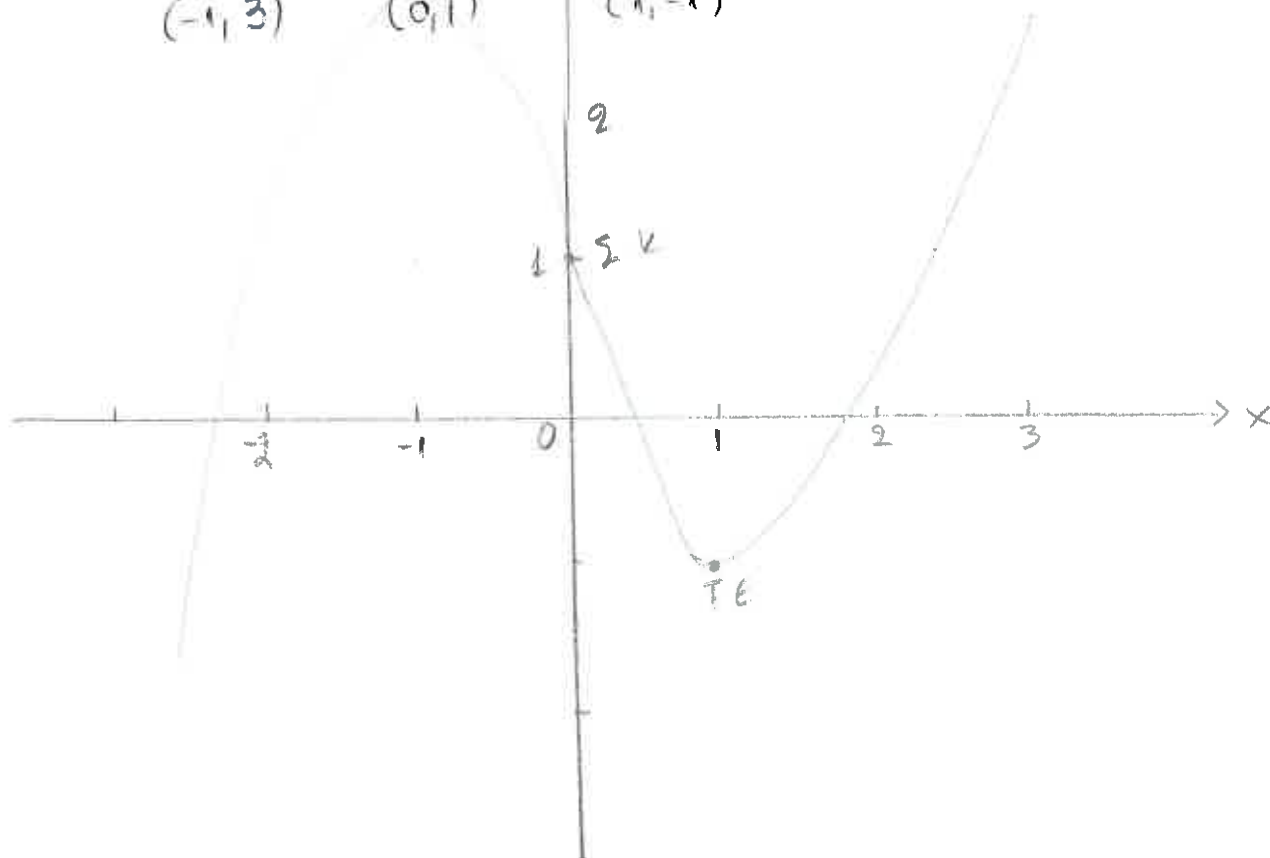
f ποδωυυυυυυυυυυ δειν εχει αουυυυυυυυυυυ

x	-1	0	1
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Τ.Μ.
(-1, 3)

Τ.Μ. Σ.Κ.
(0, 1)

3 Τ.Ε.
(1, -1)



$$f(x) = |x^2 - 2x| \quad x \in \mathbb{R}$$

B1. f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$$f(x) = |x(x-2)| = \begin{cases} x^2 - 2x & x \leq 0 \\ 2x - x^2 & 0 < x < 2 \\ x^2 - 2x & x \geq 2 \end{cases}$$

	0	2
$x^2 - 2x$	+ 0 -	0 +

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-2)}{x} = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(2-x)}{x} = 2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}} \right\} \neq$$

αρα η f δεν ορίζεται στο 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - x^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x(x-2)}{x-2} = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)}{x-2} = 2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}} \right\} \neq$$

αρα η f δεν ορίζεται στο 2.

B2. Μονοτονία - ακρότατα.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x < 0 \\ 2 - 2x & 0 < x < 2 \\ 2x - 2 & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{Για } x < 0 \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Για } 0 < x < 2 \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Για } x > 2 \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$2x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$2-2x$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$2x-2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$					

$T.E \quad T.H \quad T.E$
 $f(0)=0 \quad f(1)=1 \quad f(2)=0$

B3 Συνοδο τύπων — 0. A — Χαραξή.

$$A_1 = (-\infty, 0] \quad A_2 = [0, 1] \quad A_3 = [1, 2] \quad A_4 = [2, +\infty)$$

$$f(A_1) \stackrel{f \downarrow}{=} [f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [0, +\infty)$$

$$f(A_2) \stackrel{f \uparrow}{=} [f(0), f(1)] = [0, 1]$$

$$f(A_3) \stackrel{f \downarrow}{=} [f(2), f(1)] = [0, 1]$$

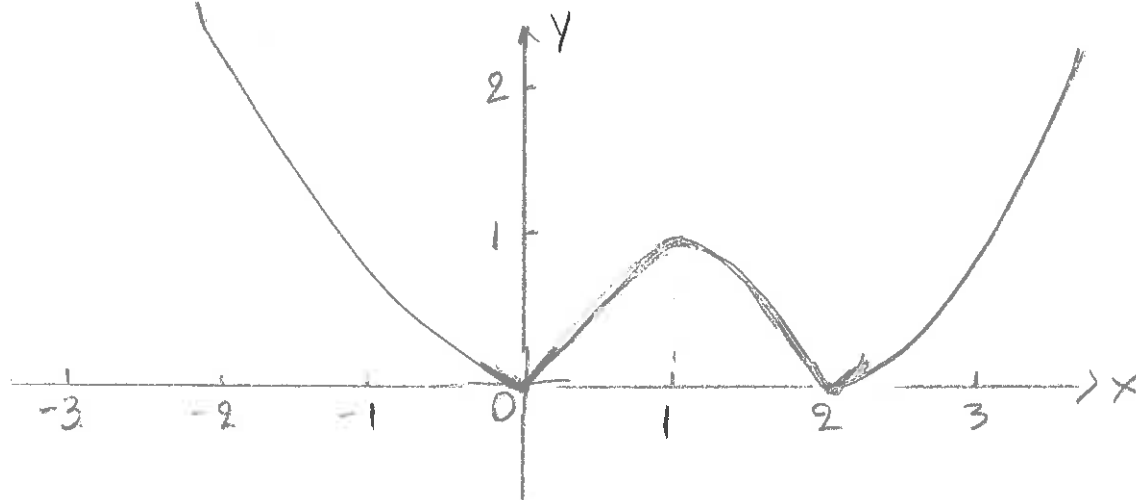
$$f(A_4) \stackrel{f \uparrow}{=} [f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, +\infty)$$

$$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$$

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad 0 \in \text{σ} \text{ } 0 \text{ } \infty \quad f(0)=f(2)=0$$

x	0	1	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$				

$T.E \quad T.H \quad T.E$



B4. Εφαπτομένες από το $P(1, \frac{5}{4})$ καθετες
 Εστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής.

Αν $x_0 \leq 0$ ε: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$P \in (E) \quad \frac{5}{4} - (x_0^2 - 2x_0) = (2x_0 - 2)(1 - x_0) \Leftrightarrow$

$\frac{5}{4} - x_0^2 + 2x_0 = 2x_0 - 2x_0^2 - 2 + 2x_0 \Leftrightarrow$

$5 - 4x_0^2 = -8x_0^2 - 8 + 8x_0 \Leftrightarrow 4x_0^2 - 8x_0 + 13 = 0$

$\Delta = 64 - 208 < 0.$

δεν έχει ρίζες

Αν $0 < x_0 < 2$ ε: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$P \in (E) \quad \frac{5}{4} - f(x_0) = f'(x_0)(1 - x_0) \Leftrightarrow$

$5 - 4(2x_0 - x_0^2) = 4(2 - 2x_0) - (1 - x_0) \Leftrightarrow$

$5 - 8x_0 + 4x_0^2 = 8 - 8x_0 - 8x_0 + 8x_0^2 \Leftrightarrow$

$4x_0^2 - 8x_0 + 3 = 0$

$\Delta = 64 - 48 = 16$

$\frac{8+4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ δεκαί

$\frac{8-4}{8} = \frac{1}{2}$ δεκαί

αρα $M_1(\frac{3}{2}, f(\frac{3}{2}))$

$M_2(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$

$E_1: y - f(\frac{3}{2}) = f'(\frac{3}{2})(x - \frac{3}{2})$

$E_2: y - f(\frac{1}{2}) = f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$

$y - \frac{3}{4} = -(x - \frac{3}{2})$

$y - \frac{3}{4} = (x - \frac{1}{2})$

$y = -x + \frac{9}{4}$

$y = x + \frac{1}{4}$

αρα $E_1 \perp E_2$

Αν $\chi_0 > 2$ δέν έχει εφαιρμομένης

156/351

Β5. Κρίσιμα σημεία ως f

Κρίσιμα σημεία έχουμε στα σημεία
που η f δέν παραγωγίζεται και στα
σημεία που η f μηδενίζεται.

Άρα κρίσιμα σημεία είναι

0, 2, και 1.

ΘΕΜΑ 3^ο (B)

$$f(x) = \begin{cases} 4e^{2-x} & x < 2 \\ 4x - x^2 & x \geq 2. \end{cases}$$

$$f(2) = 4$$

α. Μονοτονία.

$$f'(x) = \begin{cases} -4e^{2-x} & x < 2 \\ 4 - 2x & x \geq 2. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x - x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)^2}{x-2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4e^{2-x} - 4}{x - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-4e^{2-x}}{1} = -4$$

αρα η f δεν είναι παράγου στο 2.

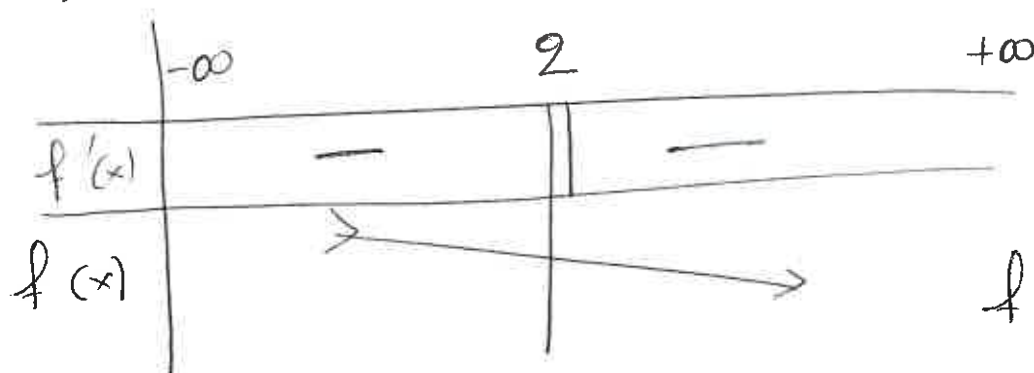
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 4e^{2-x} = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (4x - x^2) = 4 \end{aligned} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \left\{ \begin{array}{l} \text{αρα} \\ f(2) = 4 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{συνεχώς} \\ \text{στο 2} \end{array} \right.$$

αρα f συνεχώς στο $\mathbb{R}$.

Για $x < 2$ $f'(x) = -4e^{2-x} < 0$.

Για $x \geq 2$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

$$\frac{2}{+|-}$$



f συνεχώς στο 2

$$b) A_1 = (-\infty, 2] \quad A_2 = (2, +\infty).$$

$$f(A_1) \stackrel{f \downarrow}{\text{συνέχης}} [f(2), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [4, +\infty)$$

$$f(A_2) \stackrel{f \downarrow}{\text{συνέχης}} (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)) = (-\infty, 4).$$

$$\text{αρα } f(\mathbb{R}) = (-\infty, 4) \cup [4, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$γ) f^{-1}$$

$$H \quad f \text{ 1-1 στο } (-\infty, 2] \quad \text{και στο } (2, +\infty).$$

$$f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset$$

$$\text{αρα η } f \text{ 1-1 στο } \mathbb{R} \text{ αρα αντιστρέφεται}$$

$$\text{Για } x < 2 \text{ και } y \geq 4 \text{ έχουμε.}$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 4e^{2-x} = y \Leftrightarrow e^{2-x} = \frac{y}{4} \Leftrightarrow 2-x = \ln \frac{y}{4} \Leftrightarrow$$

$$x = 2 - \ln \frac{y}{4} \Rightarrow f^{-1}(y) = 2 - \ln \frac{y}{4} \quad y \geq 4.$$

$$\text{αρα } f^{-1}(x) = 2 - \ln \frac{x}{4} \quad x \geq 4.$$

$$\text{Για } x \geq 2 \text{ και } y < 4$$

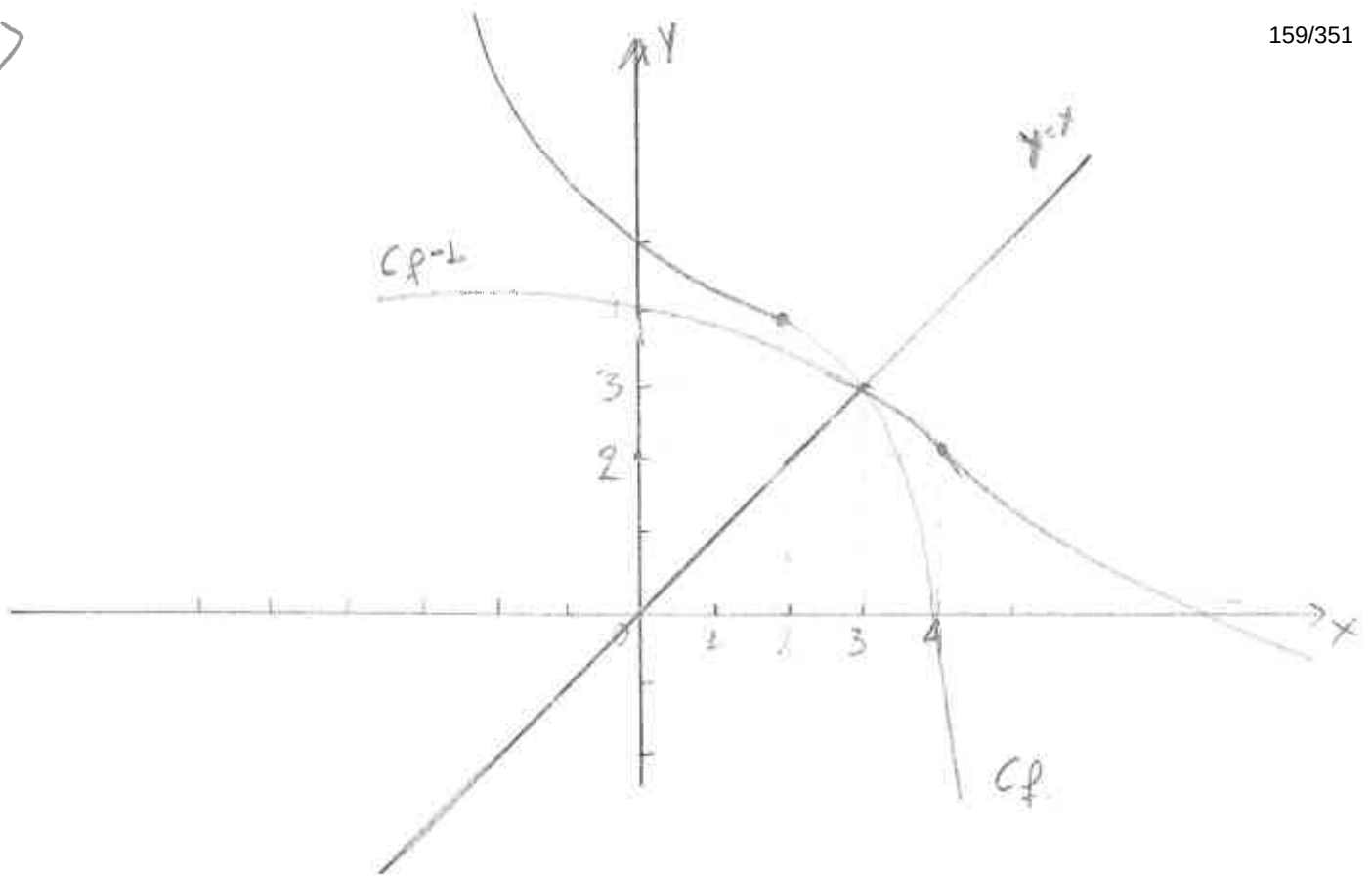
$$f(x) = y \Leftrightarrow 4x - x^2 = y \Leftrightarrow x^2 - 4x = -y \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 4 - y \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 = 4-y \Leftrightarrow |x-2| = \sqrt{4-y} \stackrel{x \geq 2}{\Leftrightarrow} x-2 = \sqrt{4-y} \Leftrightarrow$$

$$x = 2 + \sqrt{4-y} \Rightarrow f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{4-y} \quad y < 4.$$

$$\text{αρα } f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{4-x} \quad x < 4.$$

$$\text{Οηοτε } f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - \ln \frac{x}{4} & x \geq 4 \\ 2 + \sqrt{4-x} & x < 4. \end{cases}$$



$x > 2$

$$f(x) = x \Leftrightarrow 4x - x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } \boxed{x = 3}$$

από

από (3, 3).

$x < 4$

$$f'(x) = x \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4-x} = x \Leftrightarrow \sqrt{4-x} = x-2 \Leftrightarrow 4-x = (x-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$4-x = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } \boxed{x = 3}$$

από

ΘΕΜΑ 4^ο (Δ)

160/351

$$f(x) = 10x - x^2$$

α. $A_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 10 - 2x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 10 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$		0.Μ	

$f(5) = 25$

$$f''(x) = (10 - 2x)' = -2 < 0 \quad \text{άρα η } f \text{ κοίτη.}$$

Η f πολωνυμική 2^{ου} βαθμού δεν έχει ασυμπτωτές.

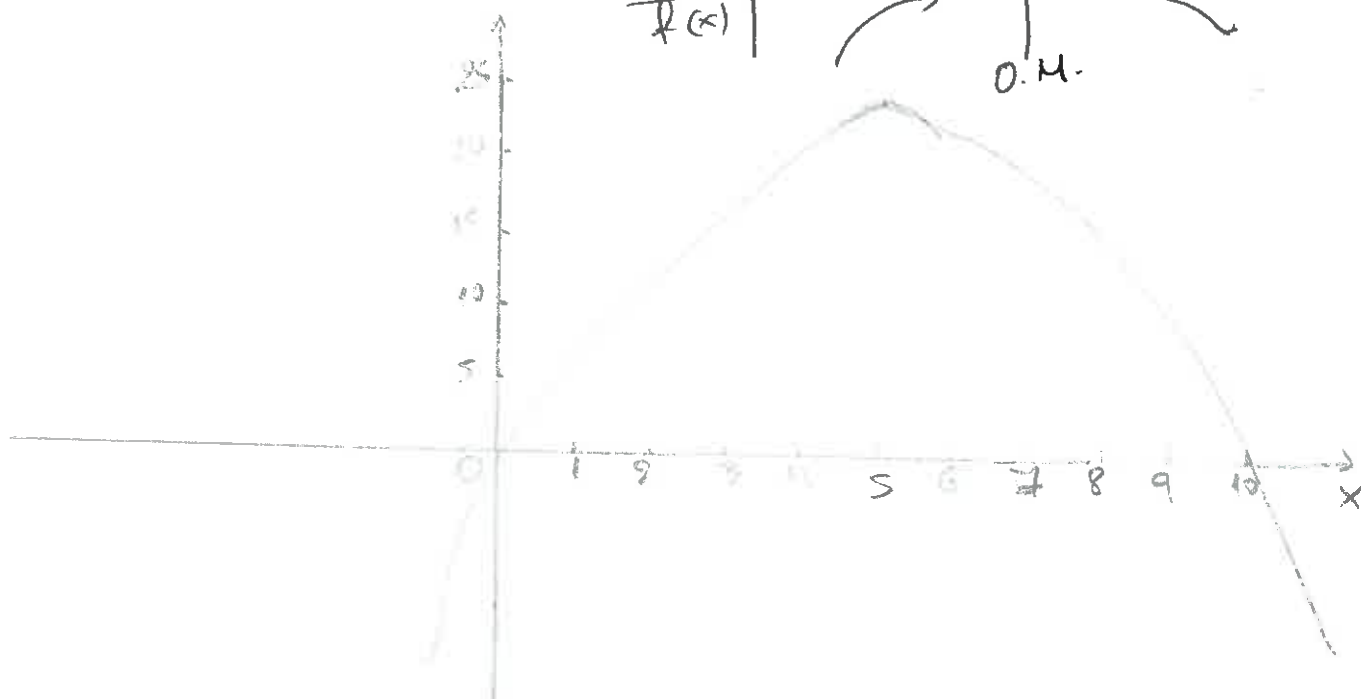
Τέμνει γ'γ $(0, 0)$.

Τέμνει x'x $f(x) = 0 \Leftrightarrow 10x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 10$
 άρα $(0, 0)$ και $(10, 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty$$

x	5
$f''(x)$	-
$f'(x)$	+
$f(x)$	0.Μ.



β. Εφαπτομένες από $A(6, 40)$.

Εστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$A \in (\varepsilon) \quad 40 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (6 - x_0).$$

$$40 - (10x_0 - x_0^2) = (10 - 2x_0)(6 - x_0).$$

$$40 - 10x_0 + x_0^2 = 60 - 10x_0 - 12x_0 + 2x_0^2.$$

$$x_0^2 - 12x_0 + 20 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2 \quad \text{ή} \quad x_0 = 10.$$

$$\alpha\rho\alpha \quad M_1(2, f(2))$$

$$M_2(10, f(10)).$$

$$\varepsilon_1: y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

$$\varepsilon_2: y - f(10) = f'(10)(x - 10)$$

$$y - 16 = 6(x - 2)$$

$$y - 0 = -10(x - 10)$$

$$y = 6x + 4$$

$$y = -10x + 100.$$

γ. Εστω $B(x_1, f(x_1))$ το σημείο επαφής.

$$\varepsilon: y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

$$y = \frac{101}{4} \quad K(\alpha, \frac{101}{4})$$

$$K \in (\varepsilon) \quad \frac{101}{4} - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (\alpha - x_1) \Leftrightarrow$$

$$101 - 40x_1 + 4x_1^2 = 40\alpha - 40x_1 - 8\alpha x_1 + 8x_1^2 \Leftrightarrow$$

$$4x_1^2 - 8\alpha x_1 + 40\alpha - 101 = 0$$

$$\Delta = 64\alpha^2 - 16 \cdot (40\alpha - 101) = 16(4\alpha^2 - 40\alpha + 101)$$

$$\Delta\alpha = 1600 - 1616 = -16 < 0$$

$$\alpha\rho\alpha \quad 16(4\alpha^2 - 40\alpha + 101) > 0 \quad \text{για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\alpha\rho\alpha \quad \text{η εξίσωση } 4x_1^2 - 8\alpha x_1 + 40\alpha - 101 \text{ έχει}$$

$$2 \text{ πραγματικές ρίζες άυιστες. Εστω } p_1 \text{ και } p_2.$$

$$\alpha\rho\alpha \quad 2 \text{ εξισώσεις εφαπτομένων.}$$

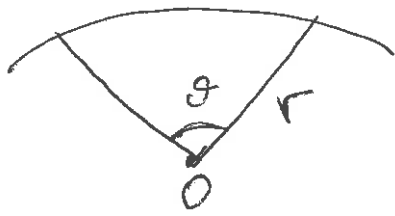
$$\text{και } f'(p_1) = 10 - 2p_1 \quad f'(p_2) = 10 - 2p_2.$$

$$\text{Vieta } \begin{aligned} p_1 + p_2 &= -\frac{-8}{4} = 2 \\ p_1 p_2 &= \frac{40\alpha - 101}{4} \end{aligned}$$

$$f'(p_1) \cdot f'(p_2) = (10 - 2p_1) \cdot (10 - 2p_2) = 100 - 20p_1 - 20p_2 + 4p_1 p_2 =$$

$$100 - 20(p_1 + p_2) + 4p_1 p_2 = 100 - 20 \cdot 2 + 40\alpha - 101 = 100 - 101 = -1.$$

8.



$$l = 2\pi r \frac{\theta}{360}$$

$$E = \pi r^2 \frac{\theta}{360}$$

$$\eta \quad l = \alpha \cdot r$$

$$E = \frac{1}{2} \alpha r^2$$

Η περιφέρεια L του κυκλικού τμήμα είναι

$$L = l + 2r \in \quad 20 = 2\pi r \frac{\theta}{360} + 2r \in$$

$$10 = \pi r \frac{\theta}{360} + r \quad 0 < r < 10$$

$$\pi r \frac{\theta}{360} = 10 - r$$

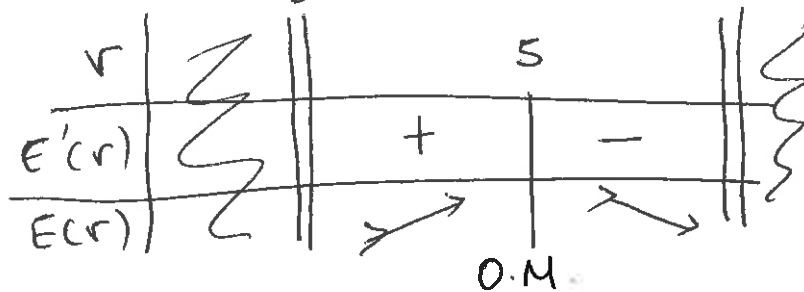
Εμβαδο του κυκλικού τμήμα.

$$E(r) = \pi r^2 \frac{\theta}{360} = \pi \cdot r \frac{\theta}{360} \cdot r = (10 - r) \cdot r \in$$

$$E(r) = 10r - r^2 \quad 0 < r < 10$$

$$E'(r) = 10 - 2r$$

$$E'(r) = 0 \in \quad 10 - 2r = 0 \in \quad r = 5.$$



Αρα ο αυθοκίπος έχει τη μεγαλύτερη επιφάνεια αν $r = 5m$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & x < 1 \\ 3x^2 - 6x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

α. Η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 - 3x) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 - 6x + 1) = -2 \end{aligned} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2 \left. \begin{aligned} &\text{αρα} \\ &n \text{ } f \\ &\text{συνεχής} \end{aligned} \right\} \text{ στο } 1.$$

Επομένως η f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Για $x < 1$ η f παρ/κη με $f'(x) = 3x^2 - 3$

Για $x > 1$ η f παρ/κη με $f'(x) = 6x - 6$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 3}{1} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - 6x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x^2 - 2x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x-1)^2}{x-1} = 0$$

αρα η f παρ/κη στο 1 με $f'(1) = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & x < 1 \\ 6x - 6 & x \geq 1 \end{cases}$$

Η f'
συνεχής
στο $\mathbb{R}$

Για $x < 1$ η f' παρ/κη με $f''(x) = 6x$

Για $x > 1$ η f' παρ/κη με $f''(x) = 6$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 3}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{6x}{1} = 6.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{6x - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{6(x-1)}{x-1} = 6.$$

αρα η f' παρ/κη στο 1 με $f''(1) = 6$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & x < 1 \\ 6 & x \geq 1 \end{cases}$$

β. Μονοτονία - ακρότατα

$$x < 1 \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

$$x \geq 1 \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow 6(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$3x^2 - 3$	+	-	+	
$6x - 6$		-	+	
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$				

$\nearrow$ T.M $f(-1) = 2$ $\searrow$ T.E $f(1) = -2$

$$\gamma. A_1 = (-\infty, -1) \quad A_2 = [-1, 1] \quad A_3 = (1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 2 \quad \text{αφού } f \text{ συνεχής}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = -2 \quad \text{αφού } f \text{ συνεχής}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 6x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = +\infty$$

$$f(A_1) \stackrel{f \uparrow}{\text{συνεχής}} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \right) = (-\infty, 2)$$

$$f(A_2) \stackrel{f \downarrow}{\text{συνεχής}} [f(1), f(-1)] = [-2, 2]$$

$$f(A_3) \stackrel{f \uparrow}{\text{συνεχής}} \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-2, +\infty)$$

Επομένως

$$f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \mathbb{R}.$$

Πάντως λύσεων ως $f(x)=0$.

$0 \in f(A_1)$ άρα υπάρχει $x_1 \in (-\infty, -1)$ τ.ω $f(x_1)=0$
και η $f \uparrow$ άρα μοναδικό

$0 \in f(A_2)$ άρα υπάρχει $x_2 \in [-1, 1]$ τ.ω $f(x_2)=0$
και η $f \downarrow$ άρα μοναδικό

$0 \in f(A_3)$ άρα υπάρχει $x_3 \in (1, +\infty)$ τ.ω $f(x_3)=0$
και η $f \uparrow$ άρα μοναδικό

Στο $[1, 2]$ η f συνεχής.

$f(1) = -2$
 $f(2) = 1$ } $f(1) \cdot f(2) < 0$ άρα από Θ. Bolzano
υπάρχει $x_3 \in (1, 2)$
τ.ω $f(x_3)=0$ και $f \uparrow$
άρα μοναδικό

Οποια η μεγαλύτερη ρίζα ως $f(x)=0$ βρίσκεται
στο $(1, 2)$.

δ. Θ.Μ.Τ. στο $[-1, 3]$.

Η f συνεχής στο $[-1, 3]$

Η f οαρίμη στο $[-1, 3]$

άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (-1, 3)$ τ.ω

$$f'(\xi) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{10 - 2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Για $-1 < \xi < 1$ $f'(\xi) = 2 \Leftrightarrow 3\xi^2 - 3 = 2 \Leftrightarrow 3\xi^2 = 5 \Leftrightarrow \xi^2 = \frac{5}{3} \Leftrightarrow$
 $\xi = \sqrt{\frac{5}{3}}$ ή $\xi = -\sqrt{\frac{5}{3}}$
άπορ.

$\Pi \alpha \quad 1 < j < 3 \quad f'(j) = 2 \Leftrightarrow 6j - 6 = 2 \Leftrightarrow 6j = 8 \Leftrightarrow j = \frac{8}{6}$
 $j = \frac{8}{6} \Leftrightarrow j = \frac{4}{3} \text{ δεχται}$

$\alpha \rho \alpha \quad j = \frac{4}{3}$

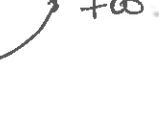
Ε. λοιπα ως f και χαρακτη.

$x < 1 \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x \geq 1 \quad f''(x) = 6 > 0$

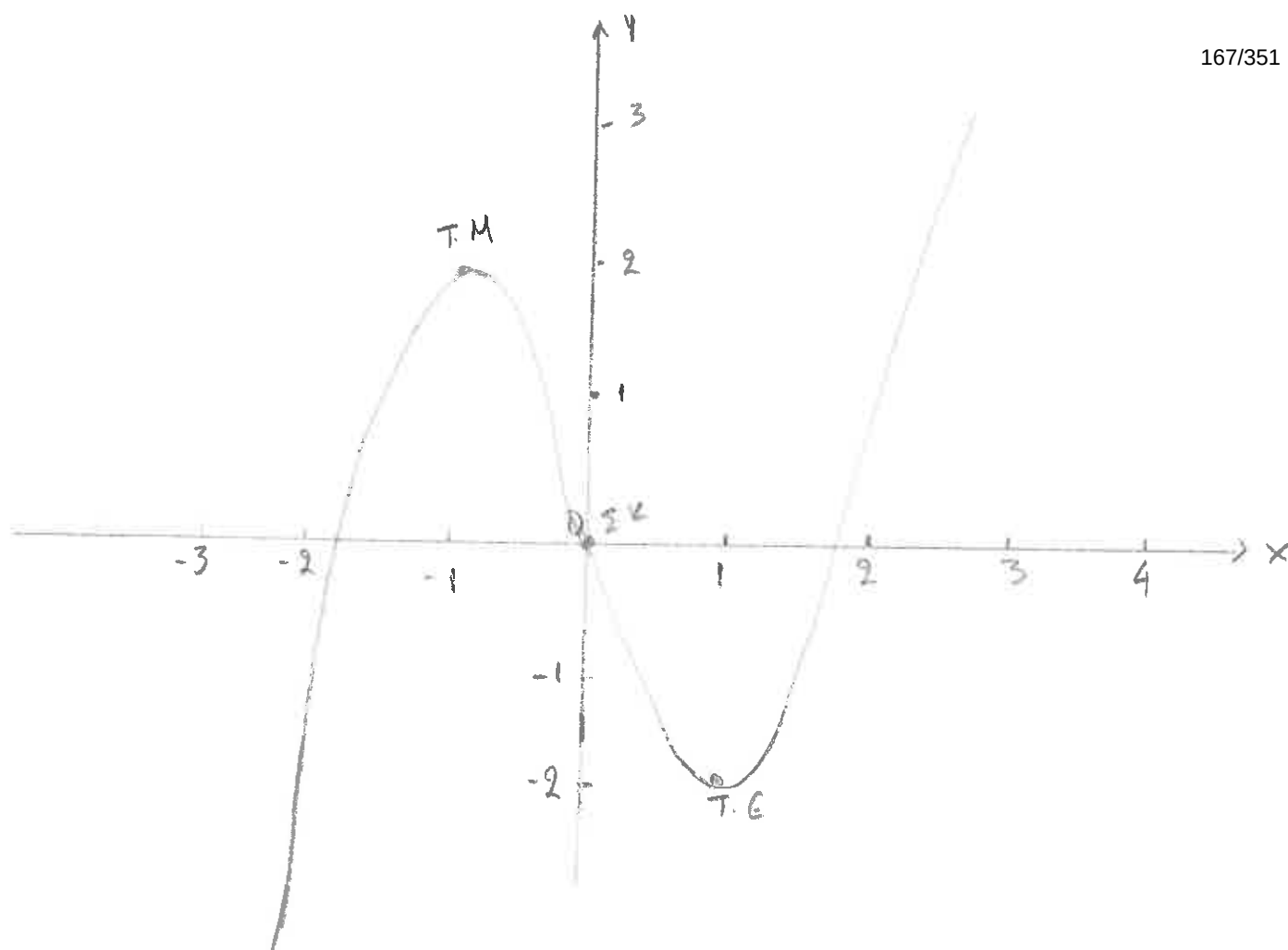
x	0	1
6x	-	+
6	+	+
f'(x)	-	+
f(x)		

I.K.
 $f(0) = 0$

x	-1	0	1
f''(x)	-	-	+
f'(x)	+	-	+
f(x)			

$-\infty$ T.M. $(-1, 2)$ I.K. $(0, 0)$ T.E. $(1, -2)$ $+\infty$

Τελειει $y'y \quad f(0) = 0 \quad (0, 0)$
 Τελειει $x'x \quad x < 1 \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad x = \sqrt{3} \text{ η } x = -\sqrt{3} \text{ απορ.}$
 $x > 1 \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 1 = 0 \quad \rho \iota \gamma \alpha \text{ } \sigma \omega \quad (1, 2)$



ΘΕΜΑ 6^ο (B).

168/351

$$f(x) = x^3 - ax^2 + 2 \quad a \in \mathbb{R} \quad \Sigma_{\tau=0}^2 \text{ ακροατα.}$$

a. $f'(x) = 3x^2 - 2ax$.

$$f'(2) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^2 - 2a \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow 12 - 4a = 0 \Leftrightarrow a = 3.$$

b. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=2.$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					
		T.M	T.E		
		$f(0) = 2$	$f(2) = -2$		

γ $A_1 = (-\infty, 0) \quad A_2 = [0, 2] \quad A_3 = (2, +\infty).$

$$f(A_1) \stackrel{f \uparrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) = (-\infty, 2)$$

$$f(A_2) \stackrel{f \downarrow}{=} [f(2), f(0)] = [-2, 2]$$

$$f(A_3) \stackrel{f \uparrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-2, +\infty).$$

$$f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \mathbb{R}.$$

Παραδοσ: Δύσων ως $x^3 + 1 = 3x^2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1$.

$1 \in f(A_1)$ άρα υπάρχει $x_1 \in (-\infty, 0)$ τ.ω $f(x_1) = 1$
και η $f \uparrow$ άρα μοναδικό

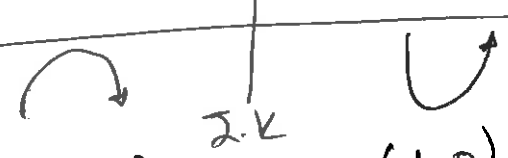
$1 \in f(A_2)$ άρα υπάρχει $x_2 \in [0, 2]$ τ.ω $f(x_2) = 1$
 και $n \neq 1$ άρα μοναδικό

$1 \in f(A_3)$ άρα υπάρχει $x_3 \in (2, +\infty)$ τ.ω $f(x_3) = 1$
 και $n \neq 1$ άρα μοναδικό

Οποότε $n \neq 1$ έχει ακριβώς 3 ρίζες.

δ. $f''(x) = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	1
$f''(x)$	- +
$f(x)$	

$f(1) = 0 \quad (1, 0)$

Η f πολυωνυμική δεν έχει ασυμπτωτες

Τέφνει γ'γ $f(0) = 2 \quad (0, 2)$

Τέφνει x'x $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

$(x-1) \cdot (x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow$

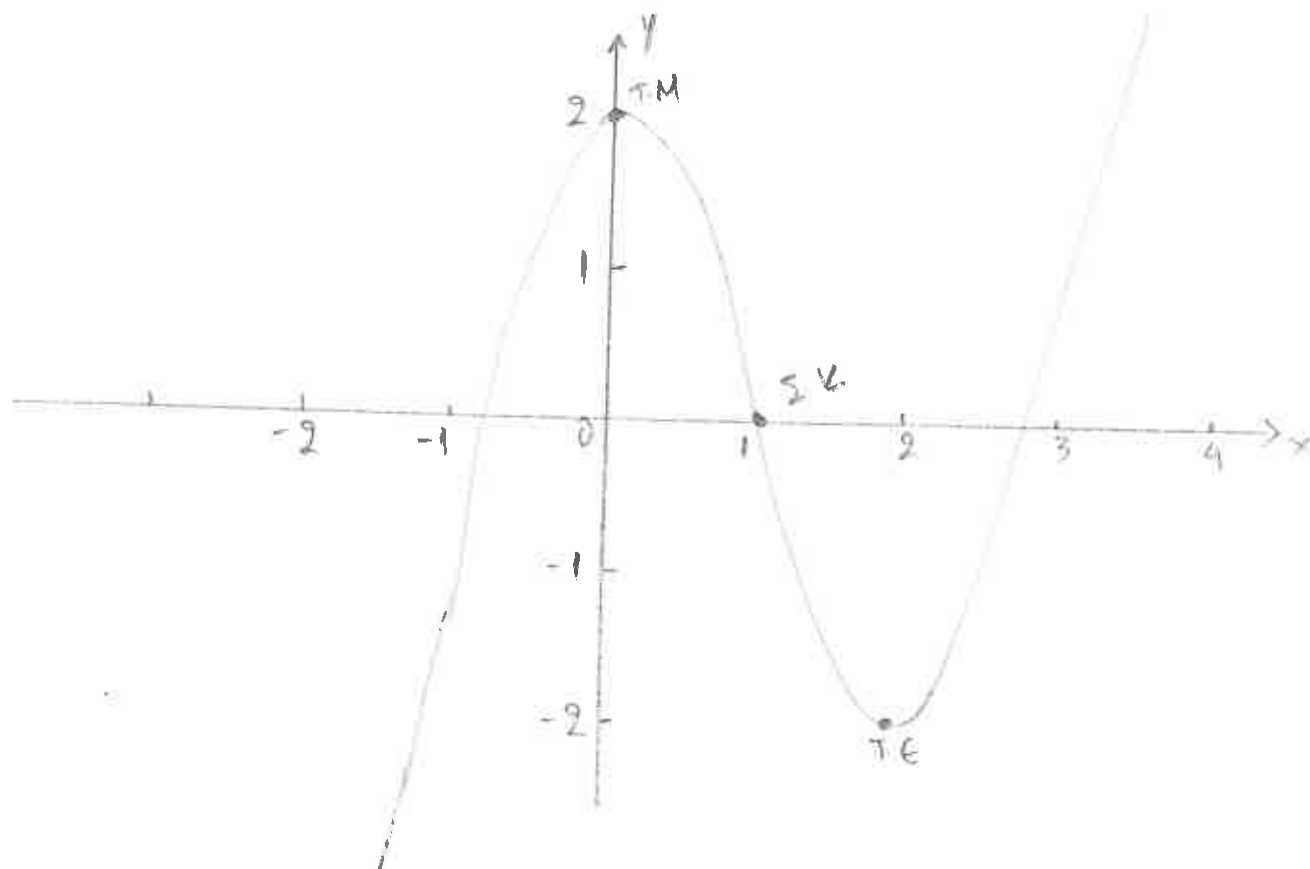
$x = 1 \quad \Delta = 4 + 8 = 12$

$\frac{2 + \sqrt{12}}{2} = 1 + \sqrt{3}$
 $\frac{2 - \sqrt{12}}{2} = 1 - \sqrt{3}$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ & 1 & -2 & -2 & \\ \hline 1 & -2 & -2 & 0 & \end{array}$$

x	0	1	2
$f''(x)$	-	- 0 +	+
$f'(x)$	+	0 -	- 0 +
$f(x)$			

$T.M \quad (0, 2) \quad T.K \quad (1, 0) \quad T.E \quad (2, -2)$



$$f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + b}{x^2 - 1} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

a. $f(x) \cdot (x^2 - 1) = x^3 + ax^2 + b.$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) \cdot (x^2 - 1)) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + ax^2 + b) \in \mathbb{R}$$

$$0 = -1 + a + b \Leftrightarrow b = 1 - a.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + ax^2 + b}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + ax^2 + 1 - a}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2ax}{2x} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(3x + 2a)}{2x} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-3 + 2a}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a - 3 = -1 \Leftrightarrow$$

$$a = 1.$$

$$\text{και } b = 0.$$

b. $f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1}.$

$$g(x) = \frac{x^2}{x - 1}$$

$$A_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$A_g = \mathbb{R} - \{1\}.$$

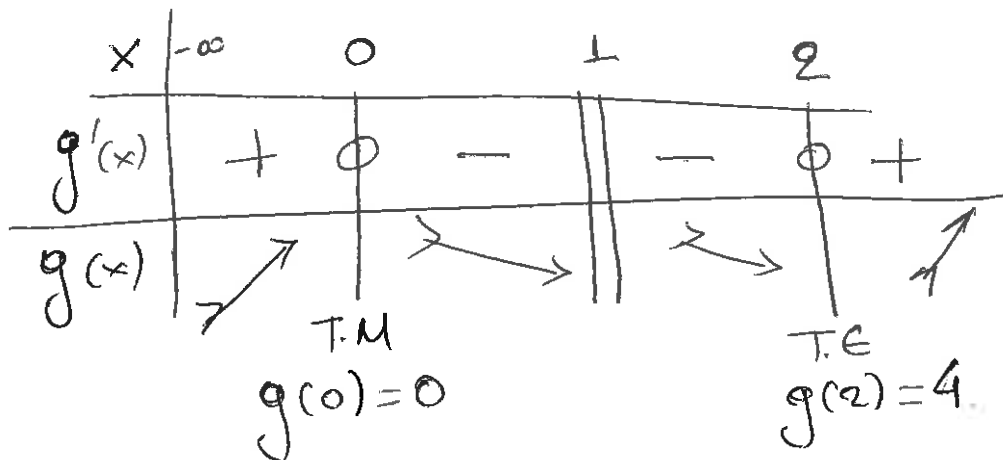
$A_f \neq A_g$ Ομως για $x \in A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2}{x-1} = g(x).$$

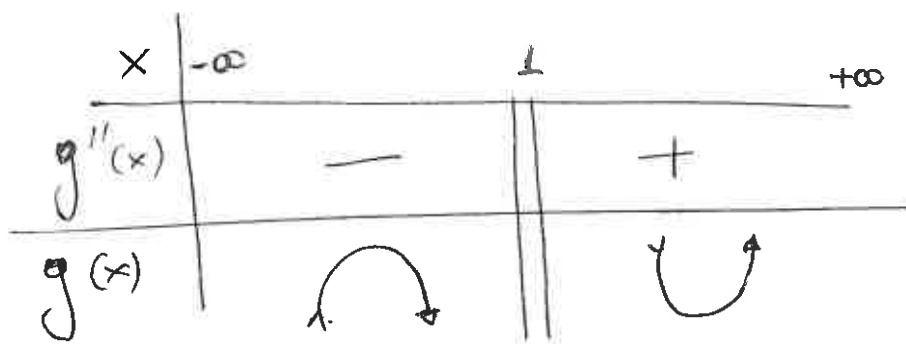
γ. $g(x) = \frac{x^2}{x-1}$

$$g'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$



$$\begin{aligned}
 g''(x) &= \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x^2-2x)(x-1)}{(x-1)^4} = \\
 &= \frac{(x-1) \cdot [(x-1) \cdot (2x-2) - 2(x^2-2x)]}{(x-1)^4} = \frac{2x^2 - 4x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \\
 &= \frac{2}{(x-1)^3}.
 \end{aligned}$$



$$A_1 = (-\infty, 0] \quad A_2 = (0, 1) \quad A_3 = (1, 2) \quad A_4 = [2, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[x^2 \frac{1}{x-1} \right] = 1 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x^2 \frac{1}{x-1} \right) = 1 \cdot (+\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty.$$

$$g(A_1) \stackrel{g \uparrow}{=} (\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), g(0)] = (-\infty, 0]$$

$$g(A_2) \stackrel{g \downarrow}{=} (\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)) = (-\infty, 0)$$

$$g(A_3) \stackrel{g \downarrow}{=} (\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)) = (4, +\infty)$$

$$g(A_4) \stackrel{g \uparrow}{=} [g(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)) = [4, +\infty)$$

Οπότε

$$g(A) = g(A_1) \cup g(A_2) \cup g(A_3) \cup g(A_4) = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$$

δ. Να λύσει η εξίσωση $(3x^2+7)^2 \cdot (x^4+2) = 3(x^2+2) \cdot (x^4+3)^2$

$$\text{Είναι } (3x^2+7)^2 \cdot (x^4+2) = (3x^2+6) \cdot (x^4+3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(3x^2+7)^2}{3x^2+6} = \frac{(x^4+3)^2}{x^4+2} \Leftrightarrow g(3x^2+7) = g(x^4+3)$$

$$\text{Είναι } 3x^2+7 > 2 \quad \text{και} \quad x^4+3 > 2$$

Η g $\uparrow$ στο $[2, +\infty)$ άρα 1-1 οπότε

$$3x^2+7 = x^4+3 \Leftrightarrow x^4-3x^2-4=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2=4 \quad \text{ή} \quad x^2=-1 \quad \text{αδυνατά}$$

$$x=2 \quad \text{ή} \quad x=-2$$

ε. Ασυμπτωτική της g .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$$

άρα η $x=1$ κατακόρυφη ασυμπτωτική.

Πλάγια - οριζοντια.

174/351

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow a=1$$

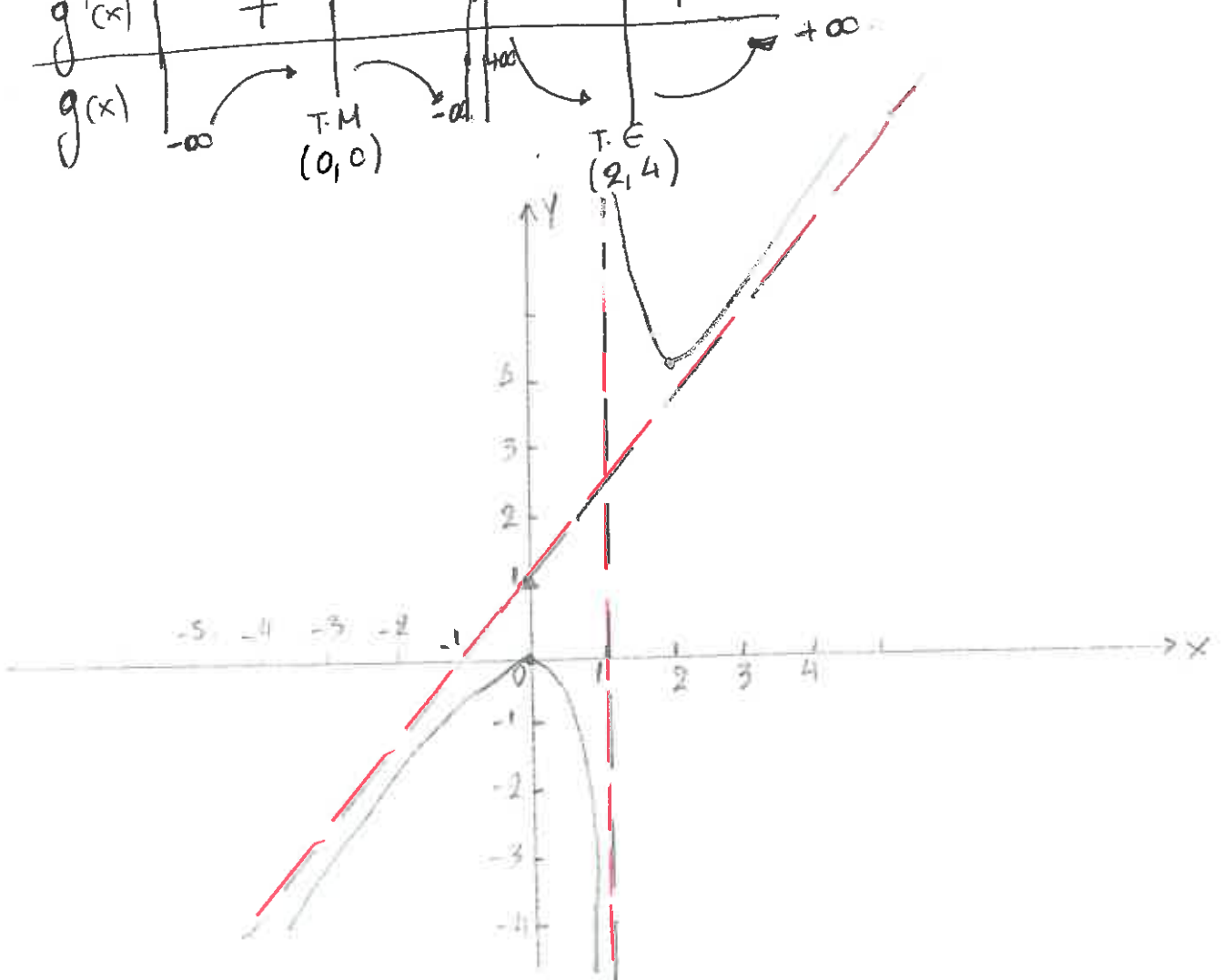
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow b=1$$

Επειδη $y=x+1$ πλαγια ασυμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 + x - x + 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0.$$

δηλ η $y=x+1$ πλαγια ασυμπτωτη στο $-\infty$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$g''(x)$	-	-	+	+	
$g'(x)$	+	-	-	+	
$g(x)$	$-\infty$	T.M (0,0)	$-\infty$	T.E (2,4)	$+\infty$



$$f(x) = x^3 + 6(\mu x - x) \quad x \in \mathbb{R}$$

α. Μονοτονία - Σύνολο τιμών.

$$f'(x) = 3x^2 + 6\mu x - 6$$

$$f''(x) = 6x - 6\mu$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mu \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$			

$$|\mu x| < |x|$$

$$-|x| < \mu x < |x|$$

$$\bullet \text{Av } x > 0$$

$$-x < \mu x < x$$

$$\bullet \text{Av } x < 0$$

$$x < \mu x < -x$$

$$f'(x) \geq f'(0) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \geq 0$$

$$A = (-\infty, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 6\mu x - 6x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(x^2 + 6\frac{\mu x}{x} - 6)] =$$

$$= -\infty \cdot (+\infty + 0 - 6) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mu x}{x} = 0 \quad \text{μυδενική επί γραγμένη αποδειξη.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 6\mu x - 6x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(x^2 + 6\frac{\mu x}{x} - 6)] =$$

$$= +\infty \cdot (+\infty + 0 - 6) = +\infty$$

$$f(A) \stackrel{\text{συνεχώς}}{\uparrow} (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

β. Ν.δ.ο. η εξ. $x^2 = 6(1 - \frac{\mu x}{x})$ είναι αδύνατη.

Η εξίσωση ορίζεται για $x \neq 0$

$$\text{Είναι για } x \neq 0 \quad x^3 = 6x - 6\mu x \Leftrightarrow x^3 + 6\mu x - 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 0 \quad \text{η οποία έχει μοναδική } x = 0$$

$$\text{άρα η εξ. } x^2 = 6(1 - \frac{\mu x}{x}) \text{ είναι αδύνατη}$$

γ. Να δοθεί η εξίσωση:

$$f(2^x) + f(4^x) = f(5^x) + f(3^x)$$

Για $x=0$ η εξίσωση επαληθεύεται.

Για $x < 0$ είναι $2^x > 3^x \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(2^x) > f(3^x)$

$$4^x > 5^x \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(4^x) > f(5^x)$$

$$\textcircled{+} \quad f(2^x) + f(4^x) > f(5^x) + f(3^x)$$

άρα η εξίσωση αδυνατεί για $x < 0$.

Για $x > 0$ είναι $2^x < 3^x \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(2^x) < f(3^x)$

$$4^x < 5^x \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(4^x) < f(5^x)$$

$$\textcircled{+} \quad f(2^x) + f(4^x) < f(5^x) + f(3^x)$$

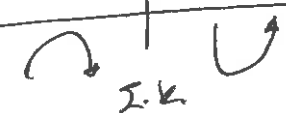
άρα η εξίσωση αδυνατεί για $x > 0$.

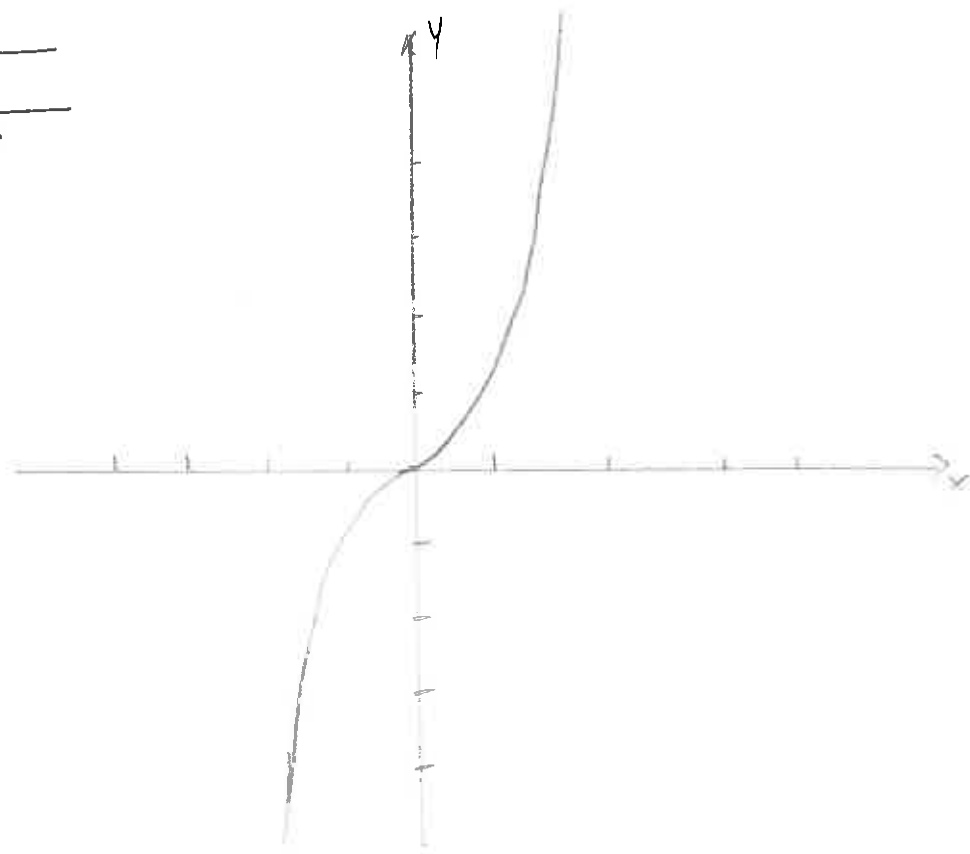
Οποότε η εξίσωση μοναδική ριζά $x=0$

δ. κυρτότητα ψ

$$f''(x) = 6x - 6\psi x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	0	
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$		



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ναρ/μυ} \quad f(0) = \sqrt{2}$$

$$f'(x) f(x) = x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

α. Ν.Σ.α. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} \quad x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) f(x) = x + 1 \Leftrightarrow 2 f'(x) f(x) = 2x + 2 \Leftrightarrow$

$$(f^2(x))' = (x^2 + 2x)' \Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + 2x + C$$

οψως $f(0) = \sqrt{2} \quad f^2(0) = C \Leftrightarrow \sqrt{2}^2 = C \Leftrightarrow C = 2$

αρα $f^2(x) = x^2 + 2x + 2$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0 \quad \Delta = 4 - 8 < 0$

αρα $f(x) \neq 0$ και συνεχής αρα διατηρεί
σταθερό πρόσημο και $f(0) = \sqrt{2} > 0$ αρα

$f(x) > 0$ οηοτε

$$f^2(x) = x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{x^2 + 2x + 2} \Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} \quad x \in \mathbb{R}$$

β. $f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)		O.E	

$$f(-1) = \sqrt{1} = 1$$

γ. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής.

$$\epsilon: y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

$$N \in \epsilon) \quad -f(x_0) = f'(x_0) \cdot (-1 - x_0).$$

$$\sqrt{x_0^2 + 2x_0 + 2} = \frac{x_0 + 1}{\sqrt{x_0^2 + 2x_0 + 2}} \cdot (x_0 + 1) \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 + 2x_0 + 2 = x_0^2 + 2x_0 + 1 \Leftrightarrow 2 = 1 \text{ αδυνατο.}$$

άρα δεν έχουμε εφαπτομένης από το $N(-1, 0)$

$$\delta. A = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + f(-x) - f(2x)) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(f(x) + x) + (f(-x) + x) - (f(2x) + 2x)] = l$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 2 - x^2}{-x\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2 + \frac{2}{x})}{-x(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1)} = \frac{2 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{2}{-2} = -1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(-x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2}{-x\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x(2 - \frac{2}{x})}{-x(\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1)} = \frac{2 - 0}{\sqrt{1 - 0 + 0} + 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(2x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 4x + 2} + 2x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 4x + 2 - 4x^2}{-x\sqrt{4 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(4 + \frac{4}{x})}{-x(\sqrt{4 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}} + 2)} = \frac{4 + 0}{-4} = -1$$

$$\text{άρα } l = -1 + 1 + 1 = 1.$$

Ε. Ασύμπτωτες ως C.f.

179/351

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφη!

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x} \quad \underline{x < 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x} = -1 = \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \beta x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2x+2} + x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x+2} + x) \cdot (\sqrt{x^2+2x+2} - x)}{\sqrt{x^2+2x+2} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2x+2 - x^2}{|x| \sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} - x} \quad \underline{x < 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+2}{-x \sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2+\frac{2}{x})}{x(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} - 1)} = \frac{2+0}{-1-1} = -1 = \beta$$

αρα η $y = -x - 1$ η διαγία ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x} \quad \underline{x > 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x} = 1 = \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \beta x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2x+2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x+2} - x)(\sqrt{x^2+2x+2} + x)}{\sqrt{x^2+2x+2} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x+2 - x^2}{|x| \sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} + x} \quad \underline{x > 0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+2}{x \sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2+\frac{2}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} + 1)} = \frac{2+0}{1+1} = 1 = \beta$$

αρα η $y = x + 1$ η διαγία στο $+\infty$.

Κυρτώμετα.

$$f''(x) = \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \right)' = \frac{\sqrt{x^2+2x+2} - (x+1) \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}}{\left(\sqrt{x^2+2x+2} \right)^2} =$$

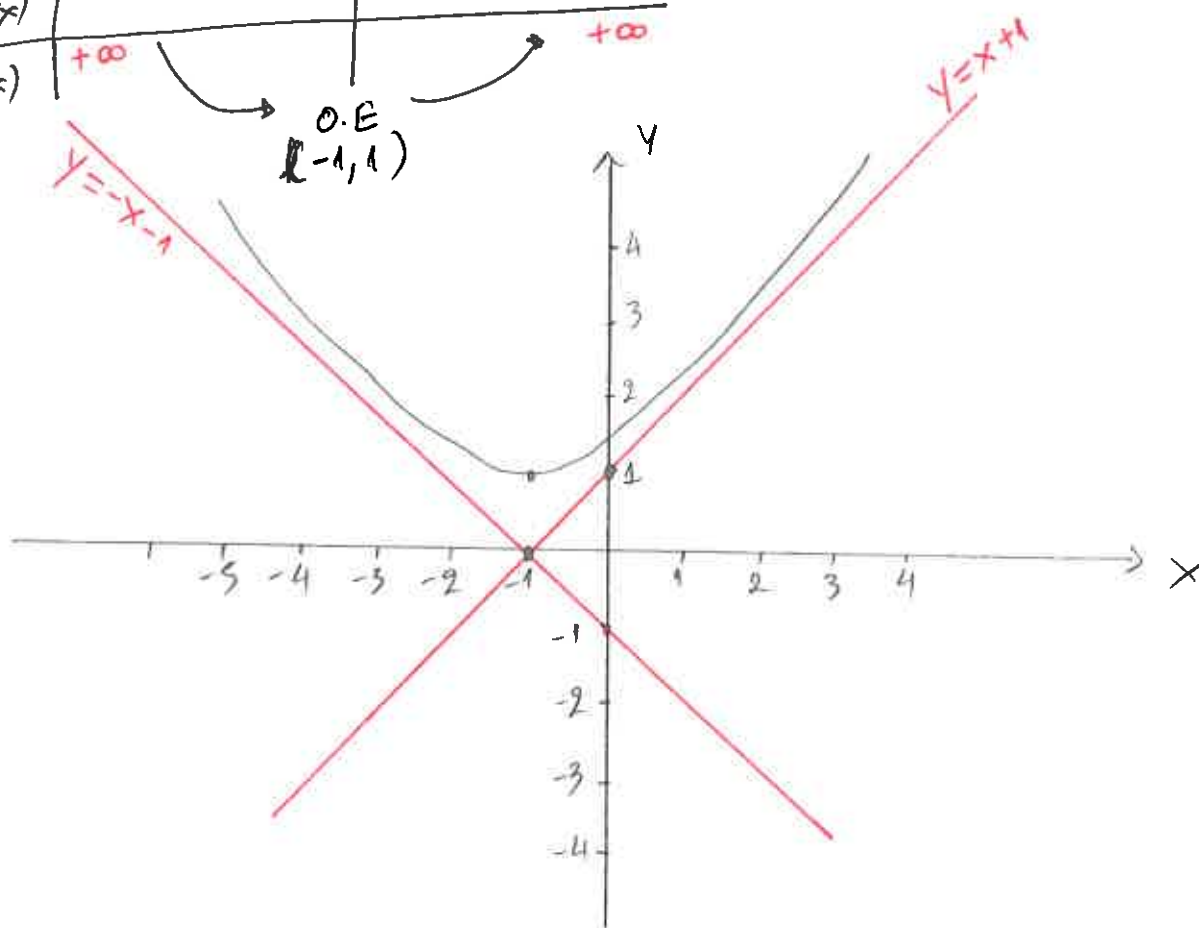
$$= \frac{x^2+2x+2 - (x+1)^2}{\left(\sqrt{x^2+2x+2} \right)^3} = \frac{x^2+2x+2 - x^2 - 2x - 1}{\left(\sqrt{x^2+2x+2} \right)^3} = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+2x+2} \right)^3} > 0$$

Άρα η f κυρτή στο $\mathbb{R}$

Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$		+	+
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

O.E
 $(-1, 1)$



$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x}{x-2} \quad x \neq 2$$

$$\begin{aligned} A. i) f'(x) &= \frac{(4x+5)(x-2) - (2x^2+5x)}{(x-2)^2} = \frac{4x^2 - 8x + 5x - 10 - 2x^2 - 5x}{(x-2)^2} = \\ &= \frac{2x^2 - 8x - 10}{(x-2)^2} = \frac{2(x^2 - 4x - 5)}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ or } x = -1$$

x	-1	2	5
f'(x)	+	-	-
f(x)	↗	↘	↗
	T.M		T.E
	f(-1) = 1		f(5) = 25

$$\begin{aligned} u) f''(x) &= \left(\frac{2(x^2 - 4x - 5)}{(x-2)^2} \right)' = \frac{(4x-8)(x-2)^2 - 4(x^2 - 4x - 5)(x-2)}{(x-2)^4} = \\ &= \frac{4(x-2) \cdot [(x-2)^2 - (x^2 - 4x - 5)]}{(x-2)^4} = \frac{4(x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4x + 5)}{(x-2)^3} = \frac{36}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''(x)	-		+
f(x)	∩		∪

δω έχει στροφή καρπύς.

B ΕΣΤΩ

$$A_1 = (-\infty, -1] \quad A_2 = [-1, 2) \quad A_3 = (2, 5] \quad A_4 = [5, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty.$$

$$f(-1) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 + 5x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[(2x^2 + 5x) \frac{1}{x-2} \right] = 18 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 + 5x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[(2x^2 + 5x) \frac{1}{x-2} \right] = 18 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$f(5) = 25.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = +\infty$$

$$f(A_1) \stackrel{\text{συνεχῆς}}{\uparrow} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right) = (-\infty, 1].$$

$$f(A_2) \stackrel{\text{συνεχῆς}}{\downarrow} \left(\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), f(-1) \right) = (-\infty, 1]$$

$$f(A_3) \stackrel{\text{συνεχῆς}}{\downarrow} \left[f(5), \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \right) = [25, +\infty).$$

$$f(A_4) \stackrel{\text{συνεχῆς}}{\uparrow} \left[f(5), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [25, +\infty).$$

$$\text{οἷοςε} \quad f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) \cup f(A_4) = \\ = (-\infty, 1] \cup [25, +\infty).$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x}{x-2} \quad A = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

Κατακόρυφη

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 + 5x}{x-2} = +\infty.$$

άρα η $x=2$ κατακόρυφη ασυμπτωτή.

Πλάγια - ορίζουσα

$$\text{Έστω } y = 2x + b \text{ στο } +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^2 + 5x}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \Rightarrow a=2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 5x}{x-2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x - 2x^2 + 4x}{x-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x}{x} = 9 \Rightarrow b=9. \end{aligned}$$

άρα η $y = 2x + 9$ πλάγια ασυμπτωτή στο $+\infty$.

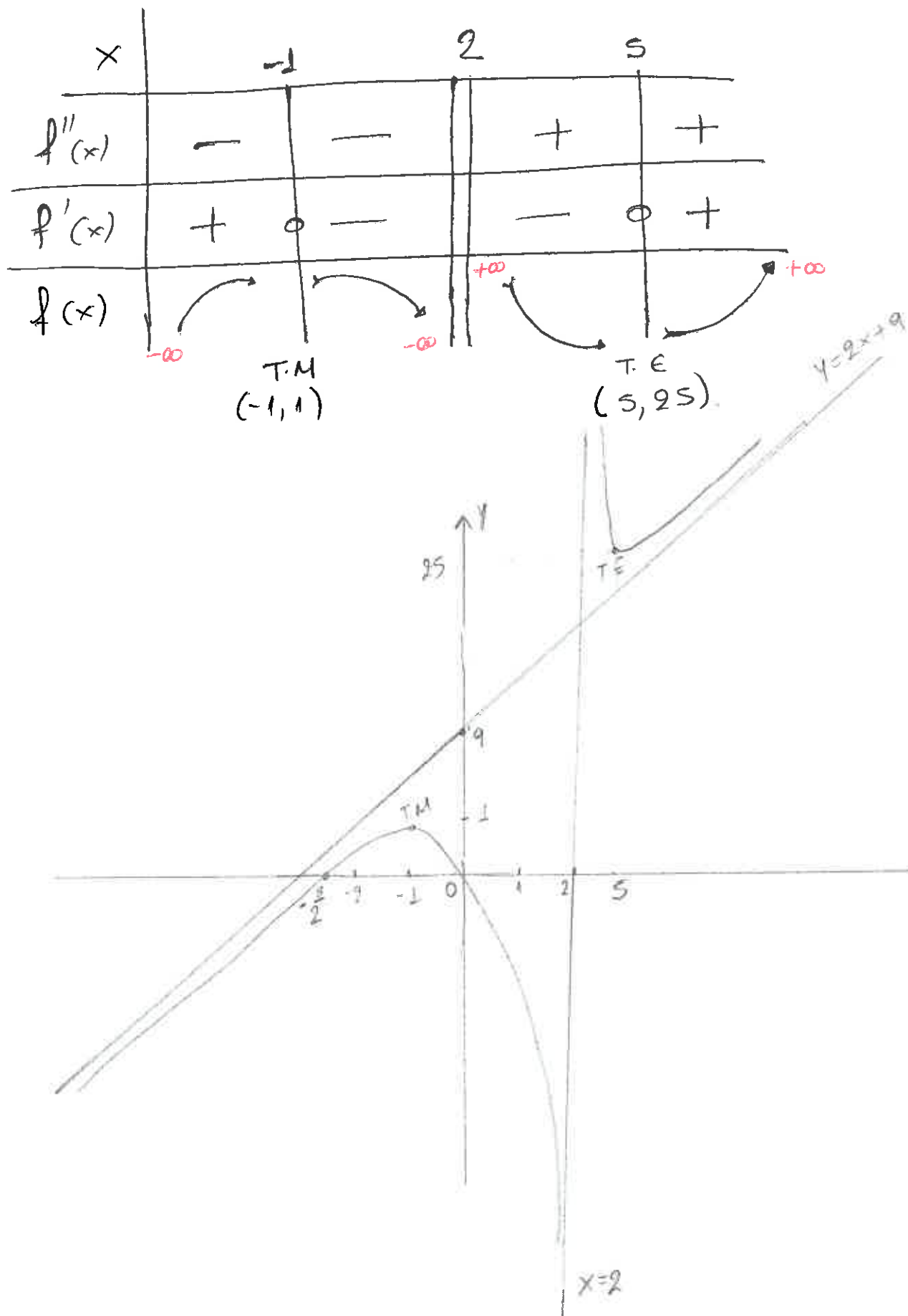
Ομοίως η $y = 2x + 9$ πλάγια ασυμπτωτή στο $-\infty$.

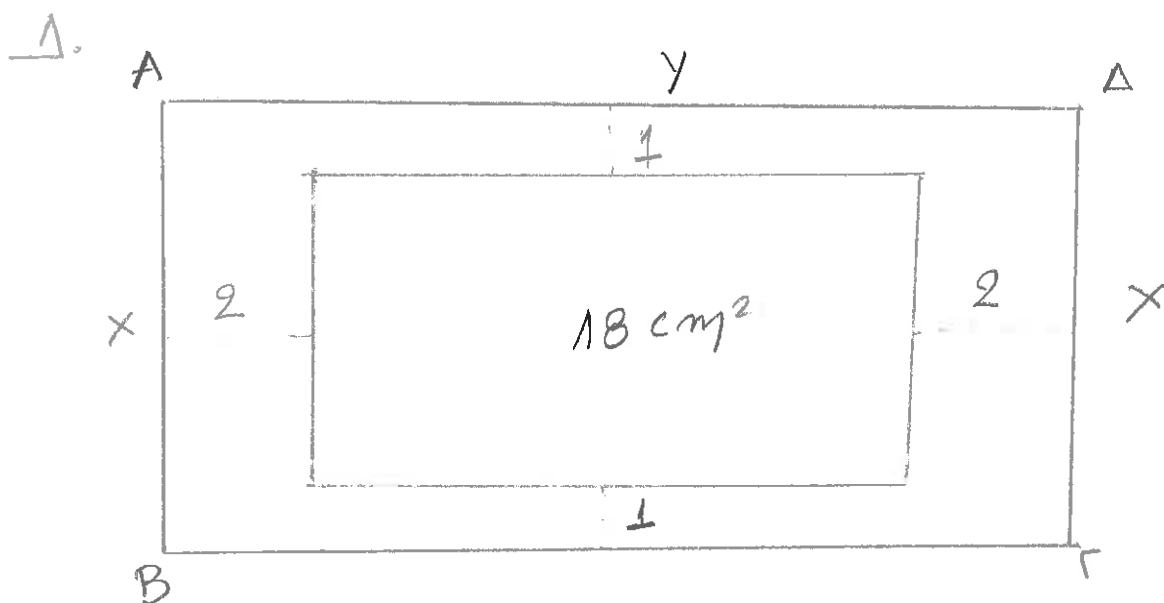
Τιμήια τομής με τους άξονες

γ'γ $f(0) = 0$ τέμνει τον γ'γ στο $(0, 0)$

$$x'x \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 5x}{x-2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x = -\frac{5}{2}$$

τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $(0, 0)$ και $(-\frac{5}{2}, 0)$





α) Είναι $(x-2) \cdot (y-4) = 18 \Leftrightarrow xy - 4x - 2y + 8 = 18 \Leftrightarrow$

$$xy - 2y = 10 + 4x \Leftrightarrow (x-2)y = 10 + 4x \quad x > 2$$

$$y = \frac{10+4x}{x-2} \quad x > 2$$

$$E(x) = x \cdot y = x \cdot \frac{10+4x}{x-2} = \frac{10x+4x^2}{x-2} \quad x > 2$$

β) $E(x) = \frac{10x+4x^2}{x-2} = 2f(x)$

Η οηοια έχει ελαχιστω για $x=5$.

οηοτε $y = \frac{10+20}{5-2} = \frac{30}{3} = 10$

αρα οι διαστάσεις είναι $x=5$ και $y=10$

$$f(x) = (x-a)e^{2-\frac{x}{\alpha}} \quad \alpha > 0$$

α. $A_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = e^{2-\frac{x}{\alpha}} - \frac{1}{\alpha}(x-a)e^{2-\frac{x}{\alpha}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2-\frac{x}{\alpha}} - \frac{1}{\alpha}(x-a)e^{2-\frac{x}{\alpha}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{2-\frac{x}{\alpha}} \left(1 - \frac{1}{\alpha}(x-a)\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\alpha} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 - \frac{x}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\alpha - x}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - x = 0 \Leftrightarrow x = 2\alpha.$$

x	2α		
f'(x)	+	0	-
f(x)	↗		↘

O.M.

$$f(2\alpha) = a$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\alpha - x}{\alpha} > 0 \Leftrightarrow 2\alpha - x > 0 \Leftrightarrow x < 2\alpha$$

$$\begin{aligned} \text{β. } f''(x) &= \left[e^{2-\frac{x}{\alpha}} - \frac{1}{\alpha}(x-a)e^{2-\frac{x}{\alpha}} \right]' = \\ &= -\frac{1}{\alpha}e^{2-\frac{x}{\alpha}} - \frac{1}{\alpha}e^{2-\frac{x}{\alpha}} + \frac{1}{\alpha^2}(x-a)e^{2-\frac{x}{\alpha}} = \\ &= e^{2-\frac{x}{\alpha}} \left(\frac{1}{\alpha^2}(x-a) - \frac{2}{\alpha} \right) = e^{2-\frac{x}{\alpha}} \left(\frac{x}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\alpha} \right) = \\ &= e^{2-\frac{x}{\alpha}} \left(\frac{x}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha} \right) = e^{2-\frac{x}{\alpha}} \left(\frac{x-3\alpha}{\alpha^2} \right). \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2-\frac{x}{\alpha}} \cdot \frac{x-3\alpha}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow x-3\alpha = 0 \Leftrightarrow x = 3\alpha.$$

x	3α		
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$			

$$f'(3\alpha) = e^{-1} \cdot (-1) = -\frac{1}{e}$$

β. Το $M(x_0, f(x_0))$ είναι $M(2\alpha, \alpha)$.

$$\text{Είναι. } \left. \begin{array}{l} 2\alpha = x \\ \alpha = y \end{array} \right\} 2y = x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$$

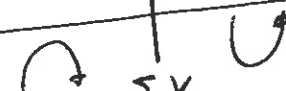
γ. τερνεί $x'x$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-\alpha)(e^{2-\frac{x}{\alpha}}) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$.

εξ. εφαπτομένης στο $A(\alpha, f(\alpha))$ $A(\alpha, 0)$

έχει κλίση $f'(\alpha) = e^{2-\frac{\alpha}{\alpha}} - 0 = e$ σταθερός αριθμός

δ. Για $\alpha = 1$.

$$f(x) = (x-1)e^{2-x}$$

x	3		
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$			

$$f(3) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$$

Κατακόρυφες ασυμπτωτές δεν έχει αφού $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)e^{2-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot e^{2-x} \right] = (1-0) \cdot 0 = 0.$$

αρα ορίζουσα ασυμπτωτή η $y = 0$ στο $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1) \cdot e^{2-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{2-x} \right] = (1-0)(+\infty) = +\infty$$

δεν έχει ασυμπτωτή στο $-\infty$

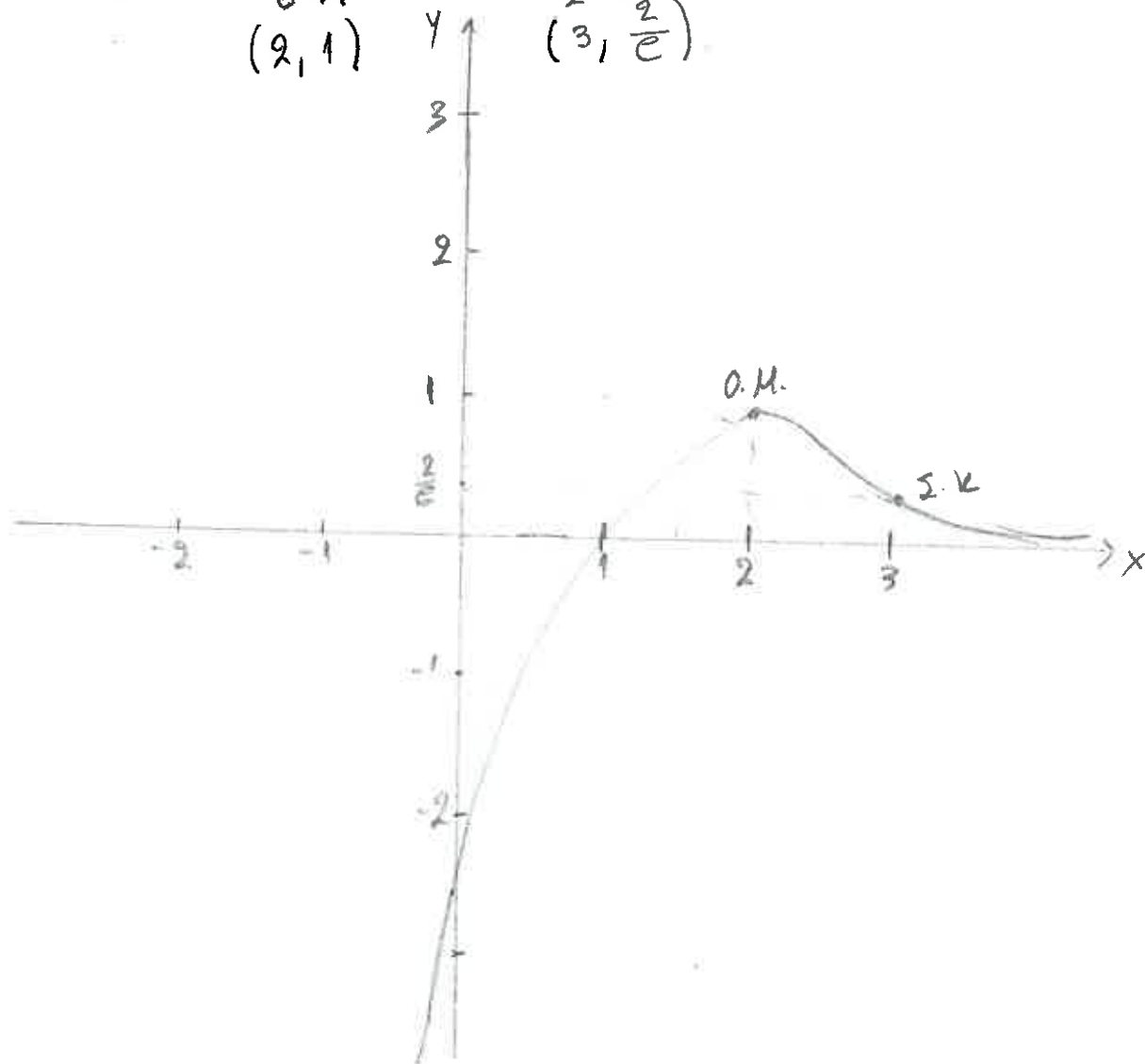
Σημεία τερμίνου με τους αζήτους.

188/351

$$y'y \quad f(0) = -e^2 \quad (0, -e^2)$$

$$x'x \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)e^{2-x} = 0 \Leftrightarrow x=1 \quad (1, 0)$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$f''(x)$	-		0	+
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$	$-\infty$	O.M. (2, 1)	Σ.Κ. (3, $\frac{2}{e}$)	

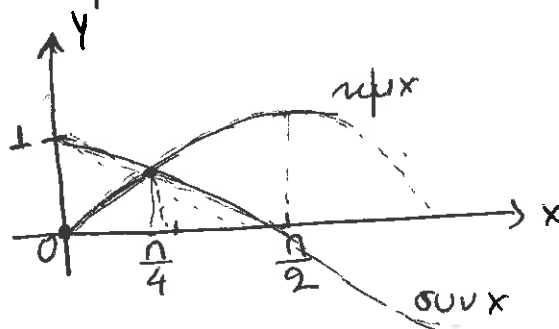
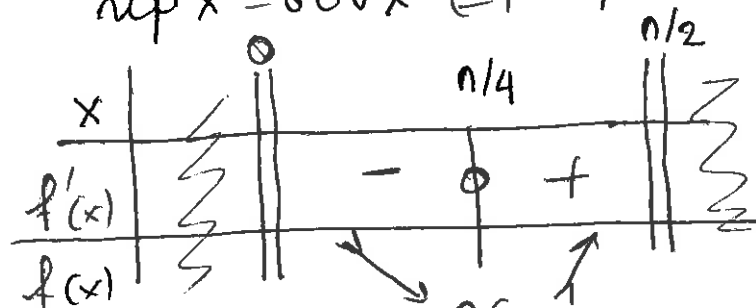


$$f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

α. Ακρότατα της f .

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin^3 x - \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow \sin^3 x = \cos^3 x \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$



$$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

β. Συνοδο τιμών.

$$\text{Εστω } A_1 = (0, \frac{\pi}{4}] \quad A_2 = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right) = +\infty \quad f(\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right) = 1 + (+\infty) = +\infty.$$

$$f(A_1) = f((0, \frac{\pi}{4}]) \xrightarrow{\text{συνεχώς}} [f(\frac{\pi}{4}), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)) = [2\sqrt{2}, +\infty).$$

$$f(A_2) = f([\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})) \xrightarrow{\text{συνεχώς}} [f(\frac{\pi}{4}), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)) = [2\sqrt{2}, +\infty).$$

$$f((0, \frac{\pi}{2})) = f(A_1) \cup f(A_2) = [2\sqrt{2}, +\infty)$$

8. Κυρτότητα.

$$f'(x) = \frac{\eta\psi^3 x - \sigma\psi\psi^3 x}{\eta\psi^2 x \sigma\psi\psi^2 x} = \frac{\eta\psi^3 x}{\eta\psi^2 x \sigma\psi\psi^2 x} - \frac{\sigma\psi\psi^3 x}{\eta\psi^2 x \sigma\psi\psi^2 x} =$$

$$= \frac{\eta\psi x}{\sigma\psi\psi^2 x} - \frac{\sigma\psi\psi x}{\eta\psi^2 x}$$

$$f''(x) = \left(\frac{\eta\psi x}{\sigma\psi\psi^2 x} - \frac{\sigma\psi\psi x}{\eta\psi^2 x} \right)' = \frac{\sigma\psi\psi^3 x + 2\eta\psi^2 x \sigma\psi\psi x}{\sigma\psi\psi^4 x} - \frac{-\eta\psi^3 x - 2\sigma\psi\psi^2 x \eta\psi x}{\eta\psi^4 x} =$$

$$= \frac{\sigma\psi\psi^3 x + 2\eta\psi^2 x \sigma\psi\psi x}{\sigma\psi\psi^4 x} + \frac{\eta\psi^3 x + 2\sigma\psi\psi^2 x \eta\psi x}{\eta\psi^4 x} > 0.$$

άρα η f κυρτή στο $(0, \frac{\eta}{2})$.

Ασυμπτωτες

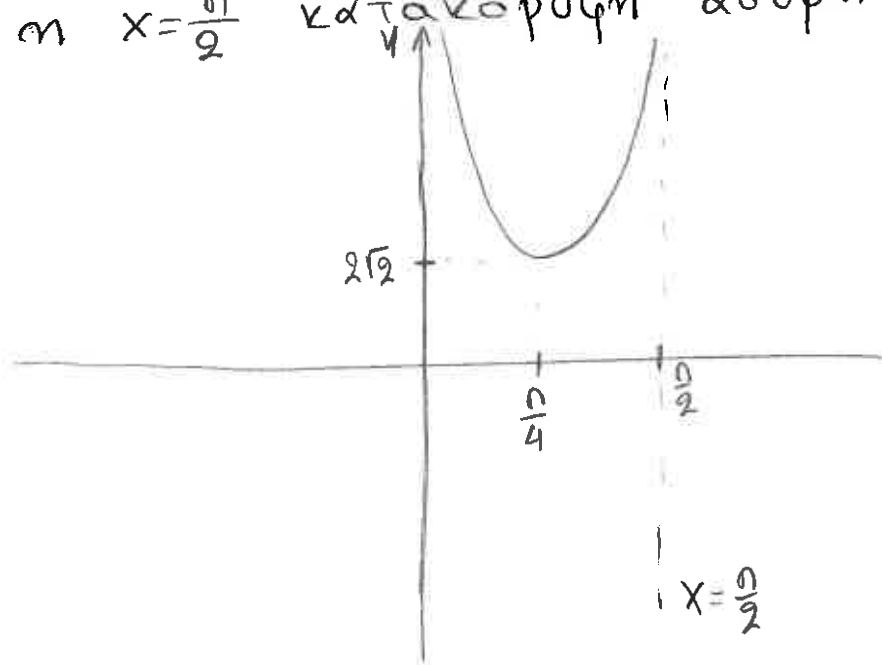
Κατακόρυφες.

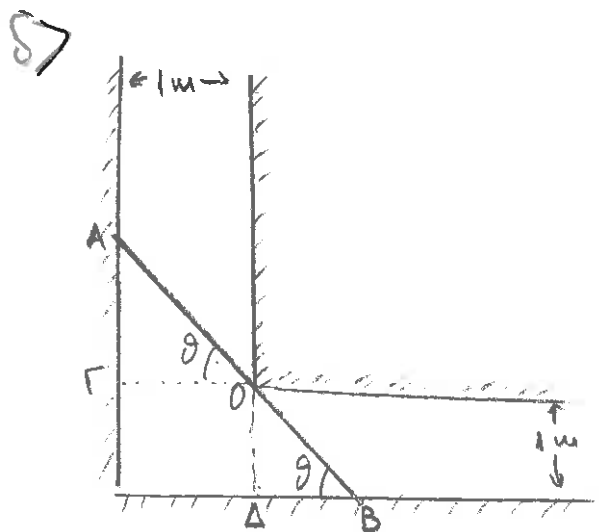
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

άρα η $x=0$ κατακόρυφη ασυμπτωτική.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\eta}{2}^-} f(x) = +\infty$$

άρα η $x=\frac{\eta}{2}$ κατακόρυφη ασυμπτωτική.





Θα εκφράσουμε το μήκος AB ως συνάρτηση της γωνίας $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Από το ορθογώνιο $\triangle AOG$ έχουμε:

$$\cos \theta = \frac{OG}{OA} \Leftrightarrow OA = \frac{OG}{\cos \theta} \Leftrightarrow OA = \frac{1}{\cos \theta}$$

Από το ορθογώνιο $\triangle ODB$ έχουμε:

$$\sin \theta = \frac{OD}{OB} \Leftrightarrow OB = \frac{OD}{\sin \theta} \Leftrightarrow OB = \frac{1}{\sin \theta}$$

Επομένως $AB = OA + OB = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2}).$

Είναι λοιπόν $AB = f(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2}).$

Το μικρότερο άνοιγμα στο διάδρομο είναι το $AB = 2\sqrt{2}$.
και έτσι η μεγαλύτερη σκάλα που μπορεί να περάσει
έχει μήκος $l = 2\sqrt{2}m$

$$f(x) = 1 + x + \sqrt{x^2 + 1} \quad x \in \mathbb{R}$$

α. Ν.Σ.Ο. $f(x) > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και $\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(-x)} = 1 \quad x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f(x) > 1 \Leftrightarrow 1 + x + \sqrt{x^2 + 1} > 1 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

αφού $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > -x$

Αν $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$. Είναι $(\sqrt{x^2 + 1})^2 > (-x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Αν $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(-x)} &= \frac{f(x) + f(-x)}{f(x) \cdot f(-x)} = \frac{1 + x + \sqrt{x^2 + 1} + 1 - x + \sqrt{x^2 + 1}}{(1 + x + \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (1 - x + \sqrt{x^2 + 1})} = \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{x^2 + 1}}{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)^2 - x^2} = \frac{2(1 + \sqrt{x^2 + 1})}{x^2 + 1 + 2\sqrt{x^2 + 1} - x^2} = \frac{2(1 + \sqrt{x^2 + 1})}{2(1 + \sqrt{x^2 + 1})} = 1 \end{aligned}$$

β. Μονοτονία - Συνοδο ταύρων.

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$$

αφα η f γνησίως αυξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x + \sqrt{x^2 + 1}) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x + \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x + 1) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - (x + 1))}{\sqrt{x^2 + 1} - x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 - 2x - 1}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{-x(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x})} = +1.$$

αφα $f(\mathbb{R}) \stackrel{\text{συνεχης}}{\neq} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (1, +\infty)$

γ. Να δοθεί η εξίσωση.

$$\sqrt{1+\arctan^2 x} - \arctan x = x + \sqrt{1+x^2}$$

Είναι $\sqrt{1+\arctan^2 x} - \arctan x + 1 = 1 + x + \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow$

$$f(-\arctan x) = f(x) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} -\arctan x = x \Leftrightarrow x = 0.$$

Διότι $|\arctan x| \leq |x|$ με την ισότητα να ισχύει για $x=0$

δ. Η f $\uparrow$ άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Για $x \in \mathbb{R}$ και $y \in (1, +\infty)$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow 1 + x + \sqrt{x^2 + 1} = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = y - 1 - x \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{x^2 + 1})^2 = (y - 1 - x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = y^2 + 1 + x^2 - 2y - 2yx + 2x \Leftrightarrow$$

$$2yx - 2x = y^2 - 2y \Leftrightarrow (2y - 2)x = y^2 - 2y \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{y^2 - 2y}{2y - 2} \quad \text{άρα} \quad f^{-1}(y) = \frac{y^2 - 2y}{2y - 2} \quad y > 1.$$

οπότε $f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 2x}{2x - 2} \quad x > 1$

ε. Κυρτότητα f .

$$f''(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)' = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{(\sqrt{x^2 + 1})^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 1 - x^2}{(\sqrt{x^2 + 1})^3} = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1})^3} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Ασύμπτωτες.

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x+\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \right) =$$

$$0+1+1=2 \Rightarrow \Delta=2$$

$$\alpha\gamma\omicron\upsilon \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 \times \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{1+0} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \Delta x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x+\sqrt{x^2+1} - 2x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - (x-1))(\sqrt{x^2+1} + (x-1))}{\sqrt{x^2+1} + (x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1 - x^2+2x-1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{1}{x})} = \frac{2}{1+1} = 1 \Rightarrow$$

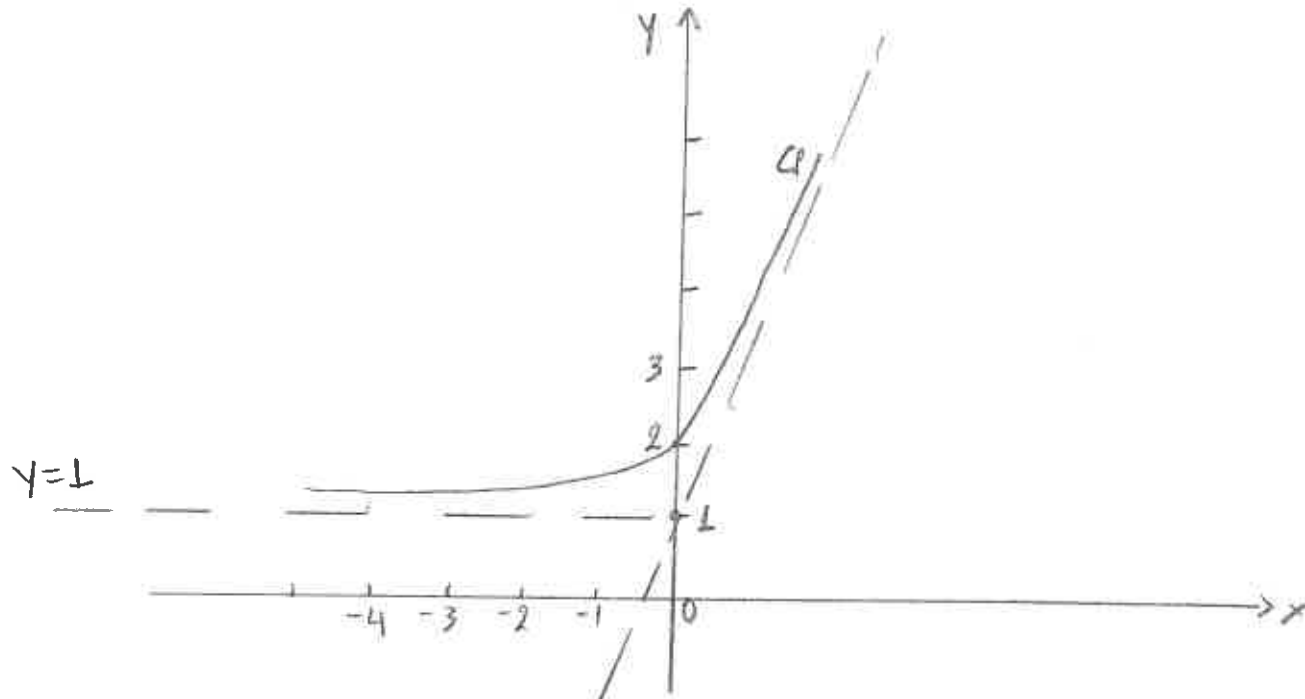
$$\text{β}=1.$$

άρα η $y=2x+1$ η άσυχια ασύμπτωτη στο $+\infty$

και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ άρα η $y=1$ ορίζουσα ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0,2)$
και δεν τέμνει τον $x'x$ αφού $f(\mathbb{R}) = (1, +\infty)$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f''(x)$		+
$f'(x)$		+
$f(x)$		



σζ Ν.δ.ο. $f(3) + f(11) > 2f(7)$.

Θ.Μ.Τ για την f στα $[3, 7]$ και $[7, 11]$.

υπάρχει $\xi_1 \in (3, 7)$ τ.ω $f'(\xi_1) = \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{f(7) - f(3)}{4}$

υπάρχει $\xi_2 \in (7, 11)$ τ.ω $f'(\xi_2) = \frac{f(11) - f(7)}{11 - 7} = \frac{f(11) - f(7)}{4}$.

Όπως $\xi_1 < \xi_2 \xrightarrow[\text{f κυρτή}]{f' \uparrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow$

$$\frac{f(7) - f(3)}{4} < \frac{f(11) - f(7)}{4} \Leftrightarrow f(7) - f(3) < f(11) - f(7) \Leftrightarrow$$

$$2f(7) < f(11) + f(3)$$

ΘΕΜΑ 14^ο (B)

f συνεχής στο $\mathbb{R}$ γνησίως φουζουνη στο $(-\infty, 0]$ γνησίως φουζουνη στο $[0, +\infty)$.
 $f(0) = 3$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -5$

A. Συνοδο τιμών τω f .

$$f((-\infty, 0]) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0)] = (-\infty, 3]$$

$$f([0, +\infty)) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0)] = (-5, 3]$$

$$\alpha \rho \alpha \quad f(\mathbb{R}) = (-\infty, 3] \cup (-5, 3] = (-\infty, 3]$$

B. Πλμδος ριζών τωv εξισώσεων.

a. $f(x) = -2020$.

$-2020 \in (-\infty, 3]$ αρα $x_1 \in (-\infty, 0]$ τ.ω $f(x_1) = -2020$
 και f γνησίως φουζουνη αρα μοναδικό
 $-2020 \notin (-5, 3]$ αρα η $f(x) = -2020$ αδυναται.

Οηοτε η $f(x) = -2020$ 1 ριζα μοναδική

b. $f(x) = -2$.

$$-2 \in (-\infty, 3] \quad -2 \in (-5, 3]$$

αρα η $f(x) = -2$ 2 ριζες

γ. $f(x) = 2$

$$2 \in (-\infty, 3] \quad 2 \in (-5, 3] \quad \alpha \rho \alpha$$

$$f(x) = 2 \quad 2 \text{ ριζες}$$

δ. $f(x) = 3$. 1 ριζα μοναδική

ε. $f(x) = 2019$ αδυναται.

$$\alpha \rho \alpha \quad 2019 \notin (-\infty, 3] \quad \text{και} \quad 2019 \notin (-5, 3]$$

Γ. Νδ.ο. μοναδικό $x \in (-\infty, 0)$ τ.ω $f(x) = -1940$.

$-1940 \in (-\infty, 3]$ άρα υπάρχει $x \in (-\infty, 0)$ τ.ω

$f(x) = -1940$ και η f γνησίως μονοτονική
άρα το x μοναδικό

Δ. Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$
το $f(0) = 3$.

Ε. Να λυθεί η εξίσωση
 $f(x) = 3 + m^4x + m^2x$.

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq m^2x \leq 1 \\ 0 \leq m^4x \leq 1 \end{array} \right\} \text{ άρα } \begin{array}{l} 0 \leq m^4x + m^2x \leq 2 \quad \Leftrightarrow \\ 3 \leq m^4x + m^2x + 3 \leq 5 \end{array}$$

Ενώ $f(x) \leq 3$ άρα η ισότητα ισχύει μόνο
όταν $f(x) = 3 = 3 + m^4x + m^2x$

όπως $f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 0$.

Ετσι μοναδική ρίζα είναι η $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & x \leq 1 \\ 2e^{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

α. Ν.δ.ο. f συνεχής, γνησίως φθίνουσα, Συνοδο τιμών.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (2e^{x-1}) = 2 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \left. \begin{aligned} f(1) &= 2 \end{aligned} \right\} \text{ άρα η } f \text{ συνεχής στο } x_0 = 1$$

Η f συνεχής σε κάθε άνο τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$

άρα η f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Για } x < 1 \quad f'(x) = 3x^2 \geq 0.$$

$$\text{Για } x > 1 \quad f'(x) = 2e^{x-1} > 0.$$

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η f $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

$$A_1 = (-\infty, 1] \quad A_2 = (1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{x-1}) = +\infty$$

$$f(A_1) = f((-\infty, 1]) \stackrel{f \uparrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 2].$$

$$f(A_2) = f((1, +\infty)) \stackrel{f \uparrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (2, +\infty)$$

$$\text{άρα } f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) = \mathbb{R}.$$

β. f^{-1}

Η f 1-1 στο $(-\infty, 1]$ και $(1, +\infty)$

και $f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset$ άρα η f 1-1 στο $\mathbb{R}$

Για $x \leq 1$ και $y \leq 2$ έχουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^3 + 1 = y \Leftrightarrow x^3 = y - 1$$

• Αν $x < 0$ και $y - 1 < 0 \Leftrightarrow y < 1$

τότε $x = -\sqrt[3]{1-y}$

• Αν $0 \leq x \leq 1$ και $y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1$

$$x = \sqrt[3]{y-1}$$

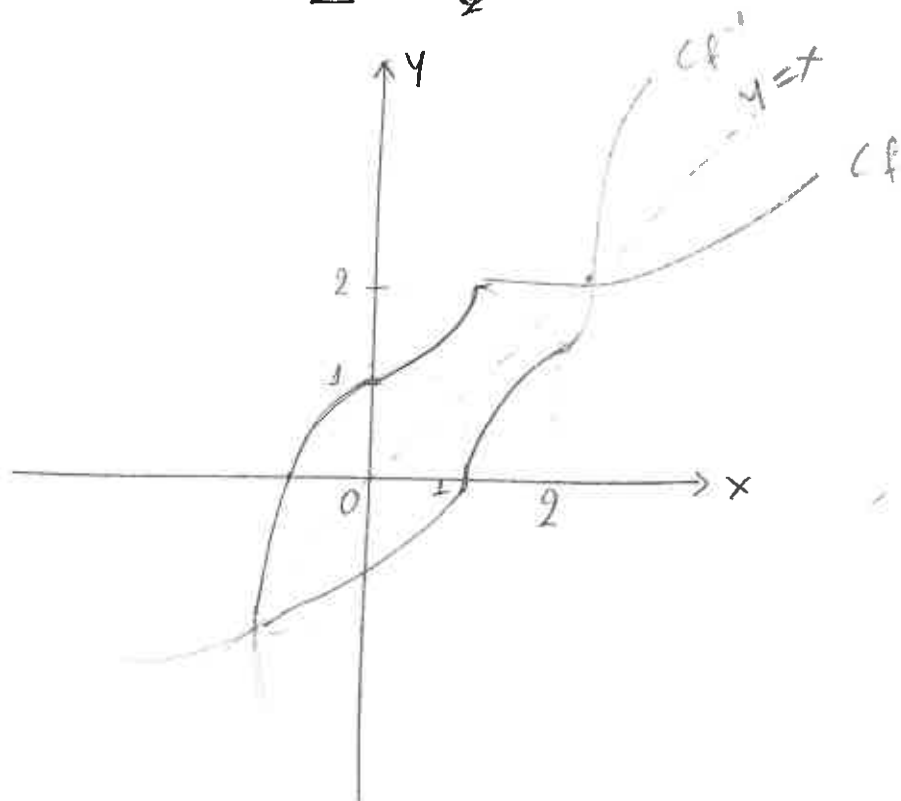
Για $x > 1$ και $y > 2$ έχουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2e^{x-1} = y \Leftrightarrow e^{x-1} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow x-1 = \ln \frac{y}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = \ln \frac{y}{2} + 1$$

επομένως

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{1-x} & x < 1 \\ \sqrt[3]{x-1} & 1 \leq x \leq 2 \\ \ln \frac{x}{2} + 1 & x > 2 \end{cases}$$



$$8. \quad A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - 3^x + 2}{f(x+1) + 3^x + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 3^x + 2}{e^x + 3^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \left(2\left(\frac{e}{3}\right)^x - 1 + \frac{2}{3^x} \right)}{3^x \left(\left(\frac{e}{3}\right)^x + 1 + \frac{1}{3^x} \right)} = \frac{2 \cdot 0 - 1 + 0}{0 + 1 + 0} = -1.$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x+2) - 3^x + 2}{f(x+2) + 3^x + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)^3 + 1 - 3^x + 2}{(x+2)^3 + 1 + 3^x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)^3 - 3^x + 3}{(x+2)^3 + 3^x + 2} \quad \frac{-\infty}{-\infty} \text{ DLH}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3(x+2)^2 - 3^x \ln 3}{3(x+2)^2 + 3^x \ln 3} \quad \frac{+\infty}{+\infty} \text{ DLH} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6(x+2) - 3^x \ln^2 3}{6(x+2) + 3^x \ln^2 3} \quad \frac{-\infty}{-\infty} \text{ DLH}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6 - 3^x \ln^2 3}{6 + 3^x \ln^2 3} = \frac{6}{6} = 1.$$

$$\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x) - f(x+1) + 2}{f(2x) + f(x+1) + 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x-1} - 2e^x + 2}{2e^{2x-1} + 2e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{e} e^{2x} - 2e^x + 2}{\frac{2}{e} e^{2x} + 2e^x + 1} \quad \frac{e^x = y}{y \rightarrow +\infty}$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{e} y^2 - 2y + 2}{\frac{2}{e} y^2 + 2y + 1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{e} y^2}{\frac{2}{e} y^2} = 1.$$

8. N.S.O. η εἴ. $f(x) = 4 - x$ που δίνει ρίζα στο $(1, 2)$

$$\text{Είναι } f(x) = 4 - x \Leftrightarrow 2e^{x-1} = 4 - x \Leftrightarrow 2e^{x-1} + x - 4 = 0$$

$$\text{Θεωρώ } g(x) = 2e^{x-1} + x - 4 \quad x \in [1, 2]$$

• g συνεχής στο $[1, 2]$

• $g(1) = 2e^0 + 1 - 4 = -1$

$g(2) = 2e + 2 - 4 = 2e - 2 = 2(e-1) > 0 \quad \left\{ g(1) \cdot g(2) < 0 \right.$

άρα από το Βολταγέο η εἰς. $g(x) = 0$ έχει
1 το πολύ ρίζα στο $(1, 2)$.

$g'(x) = 2e^{x-1} + 1 > 0$ άρα $g \uparrow$ άρα
η εἰσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς 1 λύση.

ε. Να λύει η εἰς. $f(x) + f(x^3) = f(x^2) + f(x^4)$ στο $(0, +\infty)$

Η εἰσωση έχει προφανείς ρίζες το 0 και το 1
όπως το 0 απορρίπτεται αφού έχουμε $(0, +\infty)$.

Για $0 < x < 1$ είναι $x > x^2 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) > f(x^2)$
και $x^3 > x^4 \xrightarrow{f \uparrow} f(x^3) > f(x^4)$
 $\underline{f(x) + f(x^3) > f(x^2) + f(x^4)}$
άρα η εἰσωση αδυνατεί για $0 < x < 1$

Για $x > 1$ είναι $x < x^2 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) < f(x^2)$
 $x^3 < x^4 \xrightarrow{f \uparrow} f(x^3) < f(x^4) \quad (+)$
 $\underline{f(x) + f(x^3) < f(x^2) + f(x^4)}$

άρα η εἰσωση αδυνατεί στο $(1, +\infty)$

Επομένως μοναδική λύση της εἰσωσης
είναι $x = 1$.

Δίνεται $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4} - ax + b$ $a, b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$$

α. Ν.δ.ο. $a=1$ και $b=-2$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 4} - ax + b) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 \times \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - ax + b \right) \stackrel{x > 0}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - a + \frac{b}{x} \right) \right] =$$

$$= +\infty \cdot (1-a) \begin{cases} +\infty & \text{αν } a < 1 \\ -\infty & \text{αν } a > 1 \\ \text{αόριστο} & \text{αν } a = 1 \end{cases}$$

αρα $a=1$.

$$\text{Οποτε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x + b) = -3 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x)(\sqrt{x^2 - 2x + 4} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x + 4} + x} + b \right] = -3 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 4 - x^2}{1 \times \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} + x} + b \right) = -3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2 \times (1 - \frac{2}{x})}{x \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} + 1 \right)} + b \right) = -3$$

$$\frac{-2}{2} + b = -3 \Leftrightarrow b = -2$$

$$\text{αρα } f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4} - x - 2 \quad x \in \mathbb{R}$$

β. Μονοτονία της f και προσήμο

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+4}} - 1 = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}} - 1 =$$

$$= \frac{x-1-\sqrt{x^2-2x+4}}{\sqrt{x^2-2x+4}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x-1-\sqrt{x^2-2x+4} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+4} = x-1 \stackrel{x \geq 1}{\Leftrightarrow}$$

$$(\sqrt{x^2-2x+4})^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+4 = x^2-2x+1 \Leftrightarrow 4=1$$

αδυναται.

άρα $f'(x) \neq 0$.

και f' συνεχής άρα διατηρεί προσήμο.

$$\text{και } f'(0) = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2} < 0$$

άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

άρα η f γνησίως φθίνουσα.

$$\text{Για } x < 0 \quad f \downarrow$$

$$f(x) > f(0)$$

$$f(x) > 0$$

$$\text{Για } x > 0 \quad f \downarrow$$

$$f(x) < f(0)$$

$$f(x) < 0.$$

γ. $f(x) = \sqrt{x^2-2x+4} - x - 2, \quad x \in \mathbb{R}$ Σύνολο τιμών

$f \downarrow$ συνεχής.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-2x+4} - x - 2) = -3.$$

$$f(\mathbb{R}) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = (-3, +\infty).$$

$2021 \in (-3, +\infty)$ άρα υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ τ.ω $f(x_1) = 2021$
 και η $f \downarrow$ άρα το x_1 μοναδικό

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}{x} - 1 - \frac{2}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}}{x} - 1 - \frac{2}{x} \right) = -\sqrt{1 - 0 + 0} - 1 - 0 = -2.$$

$$f_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x - 2 + 2x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 4} + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(\sqrt{x^2 - 2x + 4} + x)(\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x)}{\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x} - 2 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 4 - x^2}{-x \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - x} - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x(2 - \frac{4}{x})}{-x(\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} + 1)} - 2 \right) =$$

$$\frac{2 - 0}{1 + 1} - 2 = 1 - 2 = -1.$$

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακορυφές
αυξητικές.

Στο $-\infty$ έστω $y = Ax + b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = -2 \Rightarrow A = -2.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + 2x) = -1 \Rightarrow b = -1.$$

άρα η $y = -2x - 1$ ηλαδή στο $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$ άρα η $y = -3$ ορίζουσα στο $+\infty$.

$$ε. \quad f''(x) = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}} - 1 \right)' = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4} - (x-1) \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 4 - (x-1)^2}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}^3} = \frac{x^2 - 2x + 4 - x^2 + 2x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}^3} = \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}^3} > 0$$

άρα ο ρυθμός μεταβολής της f αυξάνει για
 $\forall x \in \mathbb{R}$.

σζ. Να Δοθεί η εξίσωση.

$$f(x) + f(4x) = f(5x) + f(3x).$$

Προφανώς ρίξα το $x=0$.

Είναι για $x < 0$.

$$\begin{aligned} x > 3x &\stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} f(x) < f(3x) \\ 4x > 5x &\stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} f(4x) < f(5x) \quad \oplus \\ \hline f(x) + f(4x) &< f(3x) + f(5x). \end{aligned}$$

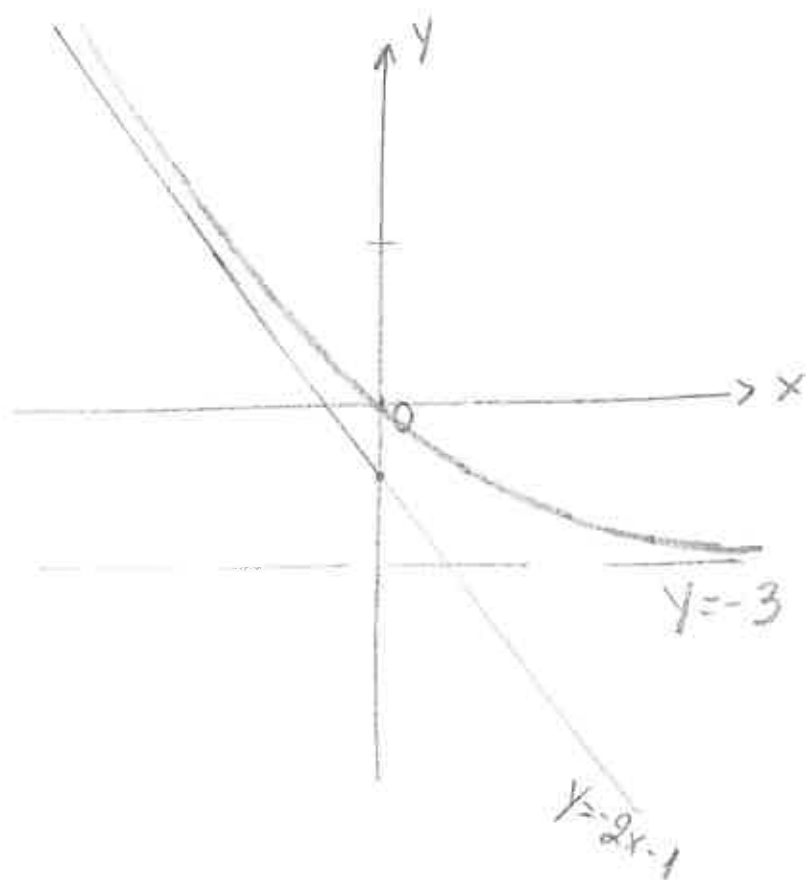
άρα η εξίσωση αδυνατεί για $x < 0$

Για $x > 0$

$$\begin{aligned} x < 3x &\stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} f(x) > f(3x) \\ 4x < 5x &\stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} f(4x) > f(5x) \quad \oplus \\ \hline f(x) + f(4x) &> f(3x) + f(5x) \end{aligned}$$

άρα η εξίσωση αδυνατεί για $x > 0$.

Σ. Χαραίη ως Cf



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οαρίβη με $f(0)=0$ και

$$f'(x) = 2xe^{-f(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

α. Ν.δ.ο. $g(x) = e^{f(x)} - x^2$ σταθερή στο $\mathbb{R}$ και τωηο τωη f .

Είναη g οαρίβη ωη ηράξωη οαρίβωη.

$$g'(x) = e^{f(x)} f'(x) - 2x = e^{f(x)} \cdot 2xe^{-f(x)} - 2x = 2x - 2x = 0$$

αρά η g σταθερή στο $\mathbb{R}$.

$$\text{οηοτε } g(x) = c \Leftrightarrow e^{f(x)} - x^2 = c$$

$$f(0)=0 \quad e^{f(0)} - 0 = c \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{αρά } e^{f(x)} - x^2 = 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} = x^2 + 1 \quad (x^2+1 > 0) \Leftrightarrow f(x) = \ln(x^2+1) \quad x \in \mathbb{R}.$$

β. f συνδεση 2 συναρτισεων G, H .

$$G(x) = \ln x \quad H(x) = x^2 + 1.$$

$$\text{οηοτε } f(x) = G(H(x)) = \ln(x^2+1) \quad x \in \mathbb{R}.$$

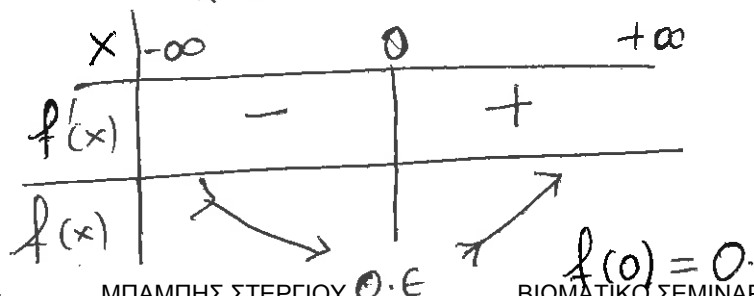
$$A_G = (0, +\infty) \quad A_H = \mathbb{R}.$$

$$A_{G \circ H} = \left\{ x \in A_H \mid H(x) \in A_G \right\} = \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x^2+1 > 0 \end{array} \right\} x \in \mathbb{R}$$

γ. $f(x) = \ln(x^2+1) \quad x \in \mathbb{R}.$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$



$$\text{Εστω } A_1 = (-\infty, 0] \quad A_2 = [0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2+1) \stackrel{x^2+1=y}{y \rightarrow +\infty} \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2+1) \stackrel{x^2+1=u}{u \rightarrow +\infty} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

$$f(A_1) = f((-\infty, 0]) \stackrel{\text{συνεχής}}{\rightarrow} [f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [0, +\infty)$$

$$f(A_2) = f([0, +\infty)) \stackrel{\text{συνεχής}}{\rightarrow} [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, +\infty)$$

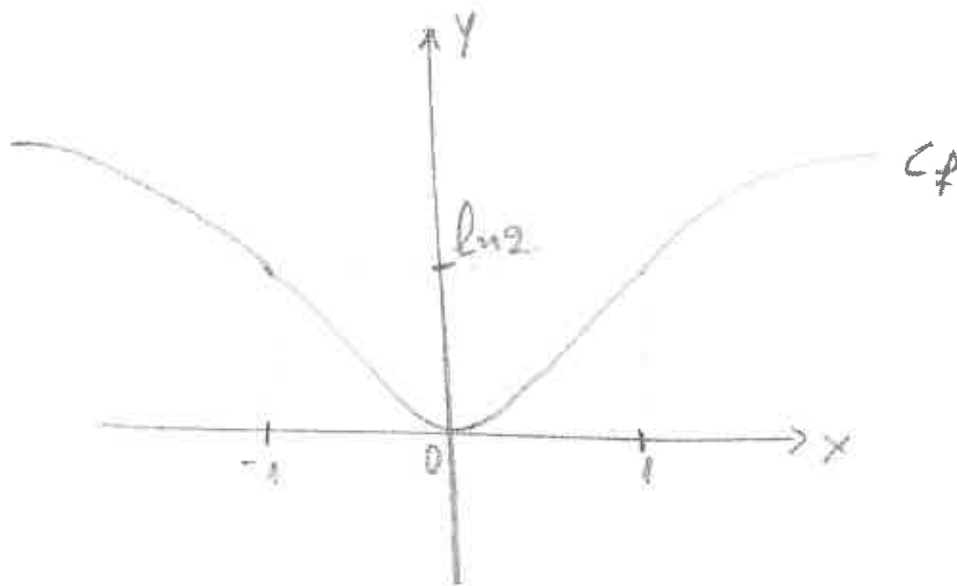
$$\text{αρα } f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) = [0, +\infty)$$

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1} \right)' = \frac{2(x^2+1) - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2+2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nwarrow$	$\nearrow$	$\nwarrow$	
		$\Sigma \cdot \kappa$	$\Sigma \cdot \kappa$		
		$f(-1) = \ln 2$	$f(1) = \ln 2$		

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
		$\Sigma \cdot \kappa$	$0 \in$	$\Sigma \cdot \kappa$	
			$(0,0)$		



$$\delta. A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \ln(x^2 + 1)) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty.$$

$$\text{Θετω } \frac{x}{x^2 + 1} = u \quad u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

ε. Ν.δ.ο. $N = \{M(x, f(x)) / 0 \leq x \leq 2\}$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $M(x_0, f(x_0))$ π.ω η απόσταση από το $P(1, 0)$ είναι ελάχιστη.

$$M(x, \ln(x^2 + 1)) \quad P(1, 0).$$

$$d(x) = \sqrt{(1-x)^2 + \ln^2(x^2 + 1)} = \sqrt{(x-1)^2 + \ln^2(x^2 + 1)} \quad x \in [0, 2].$$

d συνεχής στο $[0, 2]$ άρα έχει ελάχιστο m και μέγιστο M

Υπάρχει δm $x_0 \in [0, 2]$ ώστε $d(x_0) = m$

Έτσι το $M(x_0, f(x_0))$ απέχει από το N την ελάχιστη απόσταση

Δίνεται $f(x) = \frac{(\mu-1)x^3 + \Delta x^2}{x-1}$ με $x \neq 1$, $\Delta, \mu \in \mathbb{R}$.

Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

α. Νδ.ο. $\Delta = \mu = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(\mu-1)x^3 + \Delta x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x^3 + \Delta x^2}{x^2 - x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Αν } \mu - 1 \neq 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x^3 + \Delta x^2}{x^2 - x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x^3}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\mu-1)x] \begin{cases} +\infty & \text{αν } \mu > 1 \\ -\infty & \text{αν } \mu < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

απορροή

αρα $\mu = 1$.

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\Delta x^2}{x-1}}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Delta x^2}{x^2 - x} = 1.$$

$$\text{Αν } \Delta = 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0 \text{ ατομή.}$$

$$\text{αρα } \Delta \neq 0 \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Delta x^2}{x^2 - x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Delta x^2}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \Delta = 1.$$

Επομένως

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}, \quad A = \mathbb{R} - \{1\}.$$

β. f παρ/μη στο A με

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

δ. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής.

Τότε η εφ' εφαπτομένης θα είναι:

$$ε: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$P(1, 2) \in \epsilon$ οπότε

$$2 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (1 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$2 - \frac{x_0^2}{x_0 - 1} = \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0 - 1)^2} \cdot (1 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x_0 - 2 - x_0^2}{x_0 - 1} = - \frac{x_0^2 - 2x_0}{x_0 - 1} \Leftrightarrow$$

$$-x_0^2 + 2x_0 - 2 = -x_0^2 + 2x_0 \Leftrightarrow -2 = 0 \text{ άτοπο.}$$

Άρα δεν μπορούμε να βρούμε εφαπτομένη της C_f που να διέρχεται από το $P(1, 2)$.

ε. Να βυδεί η εξίσωση:

$$(e^x + 2)^2 \cdot (x^2 + 2) = (e^x + 1) \cdot (x^2 + 3)^2$$

$$\text{Είναι } \frac{(e^x + 2)^2}{e^x + 1} = \frac{(x^2 + 3)^2}{x^2 + 2} \Leftrightarrow f(e^x + 2) = f(x^2 + 3)$$

Όπως $e^x + 2 > 2$ και $x^2 + 3 > 0$ και η f στο $[2, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1.

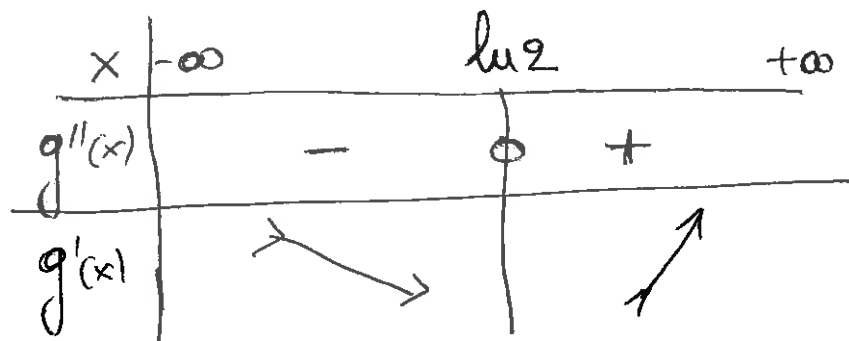
$$\text{Επομένως } f(e^x + 2) = f(x^2 + 3) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} e^x + 2 = x^2 + 3 \Leftrightarrow$$

$$e^x - x^2 - 1 = 0.$$

$$\text{Θεωρώ } g(x) = e^x - x^2 - 1 \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$g'(x) = e^x - 2x \quad \text{και} \quad g''(x) = e^x - 2$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2.$$



$\alpha \rho \alpha \quad g'(x) \geq g'(\ln 2)$
 $g'(x) \geq 2 \ln \frac{e}{2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 g'(\ln 2) &= e^{\ln 2} - 2 \ln 2 = \\
 &= 2 - 2 \ln 2 = 2(1 - \ln 2) = \\
 &= 2(\ln e - \ln 2) = \\
 &= 2 \ln \frac{e}{2} > 0
 \end{aligned}$$

$\alpha \rho \alpha$ η $g \uparrow$ και $x=0$ μία προφανής ρίζα
 η οποία είναι και μοναδική.

52. Ασυμπτωτική

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$$

$\alpha \rho \alpha$ η $x=1$ κατακόρυφη ασυμπτωτική.

Πλάγια - οριζουσια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow a=1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow b=1$$

$\alpha \rho \alpha$ η $y=x+1$ πλαγια ασυμπτωτική στο $+\infty$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - (x+1) \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + 1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0.$$

$\alpha \rho \alpha$ η $y=x+1$ πλαγια ασυμπτωτική στο $-\infty$.

Τέφνει $y'y$

$f(0)=0$

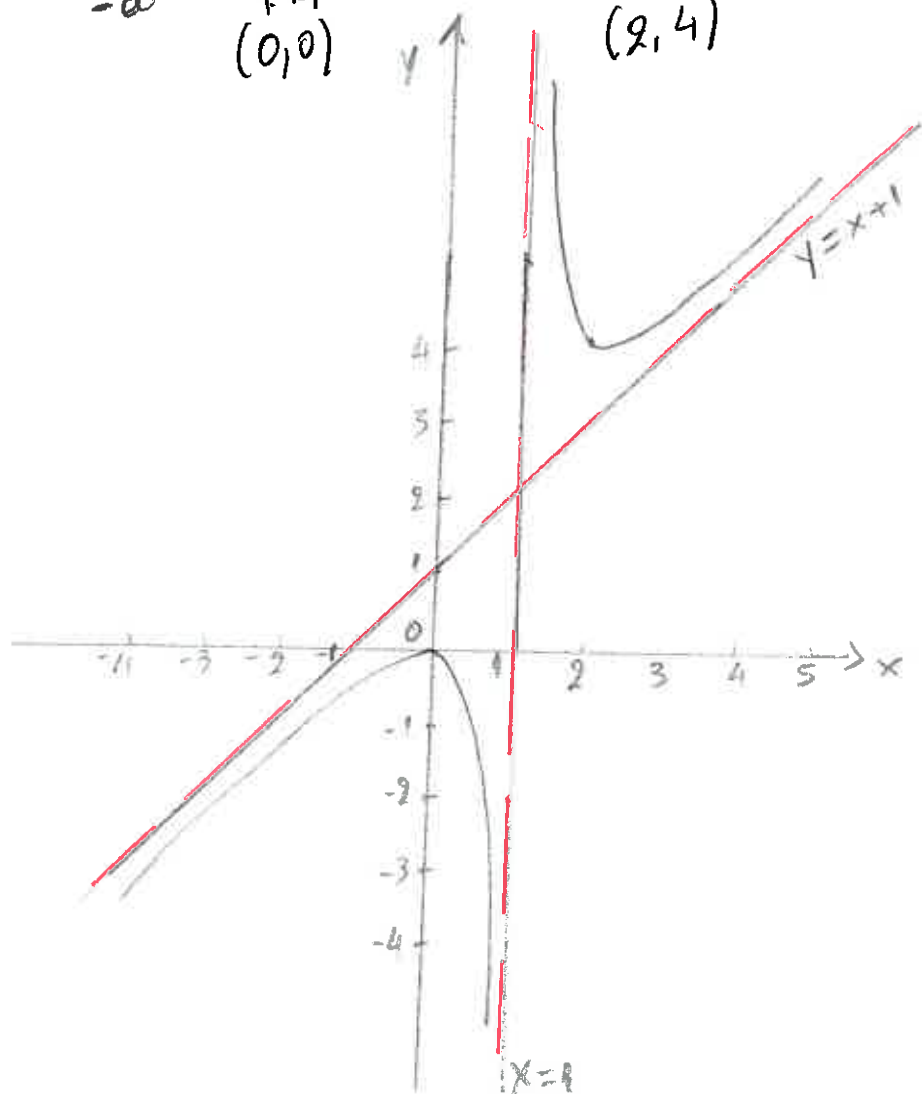
$(0,0)$

Τέφνει $x'x$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1}=0 \Leftrightarrow x=0.$

$(0,0).$

x	0	1	2
$f''(x)$	-	-	+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	TM $(0,0)$	$-\infty$
			TE $(2,4)$



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται με $f(-1)=f(1)=1$ και
 $x f'(x) = 2f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

α. Ν.δ.ο. η $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, $x \neq 0$ σταθερή και $f(x) = x^2$

$$g'(x) = \frac{f'(x)x^2 - f(x)2x}{x^4} = \frac{x(f'(x)x - 2f(x))}{x^4} = \frac{f'(x)x - 2f(x)}{x^3} = 0.$$

άρα η g σταθερή ονοάζει:

$$g(x) = \begin{cases} c_1 & \text{αν } x < 0 \\ c_2 & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Για } x < 0 \quad g(x) = c_1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2} = c_1 \quad \left. \begin{array}{l} f(-1) = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array} \right\} \frac{f(-1)}{(-1)^2} = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 1.$$

$$\text{άρα } \frac{f(x)}{x^2} = 1 \Leftrightarrow f(x) = x^2$$

$$\text{Για } x > 0 \quad g(x) = c_2 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2} = c_2 \quad \left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \frac{f(1)}{1^2} = c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1$$

$$\text{άρα } \frac{f(x)}{x^2} = 1 \Leftrightarrow f(x) = x^2.$$

$$\text{και } f(-1) = f(1) = 1 \quad \text{άρα } f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

β. Έστω $P(x, f(x))$ σημ $P(x, x^2)$ και $N(0, \frac{9}{2})$.

$$(P, N) = \sqrt{(x-0)^2 + (x^2 - \frac{9}{2})^2} = \sqrt{x^2 + (x^2 - \frac{9}{2})^2}.$$

$$\text{Έστω } d(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - \frac{9}{2})^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$d'(x) = \frac{2x + 2(x^2 - \frac{9}{2})2x}{2\sqrt{x^2 + (x^2 - \frac{9}{2})^2}} = \frac{x + 2x^3 - 9x}{\sqrt{x^2 + (x^2 - \frac{9}{2})^2}} = \frac{2x^3 - 8x}{\sqrt{x^2 + (x^2 - \frac{9}{2})^2}}$$

$$d'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-8x=0 \Leftrightarrow 2x(x^2-4)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-2$$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$2x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	$-$	$+$
$d'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
$d(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
	TE		TM		TE

Είναι $f(-2)=4$ και $f(2)=4$.

Αρα η απόσταση PN είναι ελάχιστη για $P_1(-2,4)$ και $P_2(2,4)$

γ. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής

Τότε η εξ. εφαπτομένης είναι:

$$ε: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$L(-1, -8) \in (ε) \quad -8 - f(x_0) = f'(x_0)(-1 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$-8 - x_0^2 = 2x_0(-1 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$-8 - x_0^2 = -2x_0 - 2x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_0 = -4 \text{ ή } x_0 = 2$$

Οηότι $M_1(2, f(2))$

$M_2(-4, f(-4))$

$$ε_1: y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

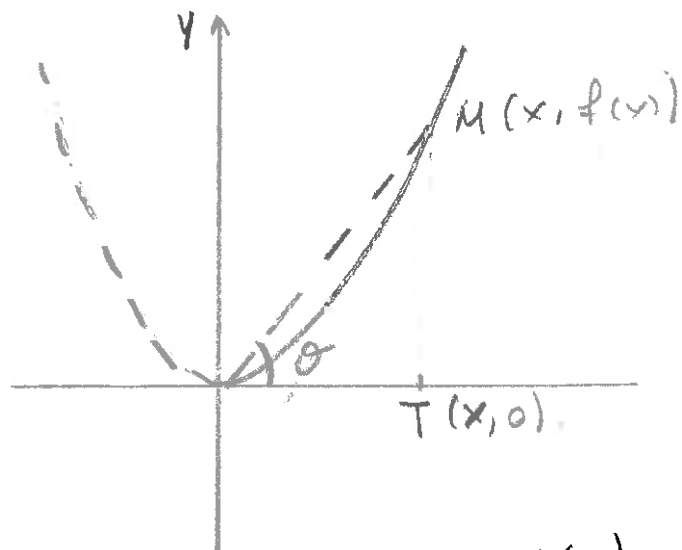
$$ε_2: y - f(-4) = f'(-4)(x + 4)$$

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

$$y - 16 = -8(x + 4)$$

$$y = 4x - 4$$

$$y = -8x - 16$$



δ. $x(t_0) = \sqrt{3}$ $x'(t_0) = -2 \text{ m/ms}$

27 Ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας M .

Είναι $M(x(t), y(t))$.

$$y(t) = x^2(t)$$

$$y'(t) = 2x(t) \cdot x'(t)$$

Τη χρονική στιγμή $t=t_0$ είναι

$$y'(t_0) = 2x(t_0) \cdot x'(t_0)$$

$$x(t_0) = \sqrt{3} \quad x'(t_0) = -2 \text{ m/ms}$$

$$y'(t_0) = -2\sqrt{3} \cdot 2 = -4\sqrt{3} \text{ m/ms}$$

η) Ρυθμό μεταβολής της απόστασης του M από το $(0,0)$

$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

$$d'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}$$

Τη χρονική στιγμή $t=t_0$ είναι

$$d'(t_0) = \frac{2x(t_0)x'(t_0) + 2y(t_0)y'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)}} = \frac{-4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \cdot 2}{2\sqrt{3 + 12}} = \frac{-14\sqrt{3}}{\sqrt{12}} =$$

$$\frac{-14\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -7 \text{ m/ms}$$

ω) Ρυθμός μεταβολής της γωνίας $\theta = \hat{MOT}$ 216/351

$$\varepsilon \varphi \theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)} \Leftrightarrow \varepsilon \varphi \theta(t) = \frac{x^2(t)}{x(t)} \Leftrightarrow \varepsilon \varphi \theta(t) = x(t)$$

οπότε $(\varepsilon \varphi \theta(t))' = x'(t) \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \theta(t)} \cdot \theta'(t) = x'(t)$

Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ είναι

$$\frac{1}{\sin^2 \theta(t_0)} \theta'(t_0) = x'(t_0) \Leftrightarrow$$

$$4 \theta'(t_0) = -2 \Leftrightarrow \theta'(t_0) = -\frac{1}{2} \text{ rad/min}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta(t_0)} = 1 + \varepsilon \varphi^2 \theta(t_0) = 1 + x^2(t_0) = 1 + \sqrt{3}^2 = 4$$

Ρυθμός μεταβολής της γωνίας ω που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο M με τον $x'x$.

Είναι $\varepsilon \varphi \omega = f'(x)$

$$\varepsilon \varphi \omega(t) = 2x(t)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \omega(t)} \omega'(t) = 2x'(t)$$

Τη χρονική στιγμή $t = t_0$

$$\frac{1}{\sin^2 \omega(t_0)} \omega'(t_0) = 2x'(t_0)$$

$$13 \omega'(t_0) = -4 \Leftrightarrow$$

$$\omega'(t_0) = -\frac{4}{13} \text{ rad/min}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \omega(t_0)} = 1 + \varepsilon \varphi^2 \omega(t_0) = 1 + (2x(t_0))^2 = 1 + 12 = 13.$$

Ε. $N(-4, 8)$ $M(x, x^2)$ πυθμό μεταβολής 217/351
 του εμβαδού του τριγώνου ΜΟΝ $t=t_0$ $x(t_0)=2$.

$$\vec{ON} = (-4, 8) \quad \vec{OM} = (x, x^2)$$

$$E = \frac{1}{2} |\det(\vec{ON}, \vec{OM})| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ x & x^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(-4x^2 - 8x)| =$$

$$= \frac{1}{2} |-(4x^2 + 8x)| \stackrel{x \geq 0}{=} \frac{1}{2} (4x^2 + 8x) = 2x^2 + 4x$$

$$E(t) = 2x^2(t) + 4x(t)$$

$$E'(t) = 4x(t)x'(t) + 4x'(t)$$

Τη χρονική στιγμή $t=t_0$ είναι $x'(t_0) = -2 \text{ m/s}$
 $x(t_0) = 2 \text{ m}$

$$E'(t_0) = 4x(t_0)x'(t_0) + 4x'(t_0) =$$

$$= 4 \cdot 2 \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) = -16 - 8 = -24 \text{ m}^2/\text{s}$$

ΘΕΜΑ 20^ο (Γ)

$$f(x) = 2\left(x + \frac{100}{x}\right) \quad x \neq 0.$$

α. Μονοτονία - ακρότατα.

$$f'(x) = 2 \cdot \left(1 - \frac{100}{x^2}\right) = 2 \frac{x^2 - 100}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 10 \text{ ή } x = -10.$$

x	$-\infty$	-10	0	10	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					
		T.M.		T.E.	
		$f(-10) = -40$		$f(10) = 40$	

β. Σύνολο τιμών της f

$$A_1 = (-\infty, -10] \quad A_2 = [-10, 0) \quad A_3 = (0, 10] \quad A_4 = [10, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2\left(x + \frac{100}{x}\right) \right] = -\infty.$$

$$f(-10) = -40 \quad f(10) = 40$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[2\left(x + \frac{100}{x}\right) \right] = 2 \cdot (0 + (-\infty)) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[2\left(x + \frac{100}{x}\right) \right] = 2 \cdot (0 + (+\infty)) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2\left(x + \frac{100}{x}\right) \right] = 2 \cdot (+\infty + 0) = +\infty.$$

$$f(A_1) = f((-\infty, -10]) \xrightarrow[\text{συνεχώς}]{f \uparrow} \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-10) \right] = (-\infty, -40]$$

$$f(A_2) = f([-10, 0)) \xrightarrow[\text{συνεχώς}]{f \downarrow} \left[\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), f(-10) \right] = (-\infty, -40]$$

$$f(A_3) = f((0, 10]) \xrightarrow[\text{συνεχώς}]{f \downarrow} \left[f(10), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right] = [40, +\infty)$$

$$f(A_3) = f([10, +\infty)) \xrightarrow[\text{συνεχώς}]{f \uparrow} \left[f(10), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = [40, +\infty)$$

οπότε $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) \cup f(A_4) = (-\infty, -40] \cup [40, +\infty)$

Κυρτώματα.

$$f''(x) = \left(2 \left(1 - \frac{100}{x^2} \right) \right)' = 2 \frac{100 \cdot 2x}{x^4} = \frac{400}{x^3}$$

x		0	
f''(x)	-		+
f(x)	↘		↗

Ασυμπτωτες.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

άρα η $x=0$ (ο άξονας y'y) κατακόρυφη ασυμπτωτη.

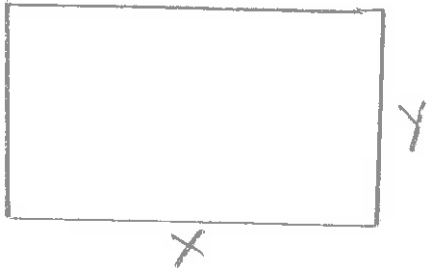
• Εστω $y = 2x + b$ ασυμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \frac{200}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{200}{x^2} \right) = 2 + 0 = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \frac{200}{x} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{200}{x} = 0 \Rightarrow b = 0$$

άρα η $y = 2x$ είναι ασυμπτωτη στο $+\infty$

δ. ορθογώνιο 100m^2 ελάχιστη περίμετρο.



Εστω x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου.

$$E = x \cdot y \in 100 = x \cdot y \in y = \frac{100}{x} \quad x > 0.$$

Η περίμετρος είναι $\Pi = 2x + 2y$

οηοζε

$$\Pi(x) = 2x + 2 \frac{100}{x} = 2 \left(x + \frac{100}{x} \right) = f(x) \quad x > 0.$$

Η οηοια εχει ολικό ελάχιστο για $x=10$.

αρα και $y = \frac{100}{10} = 10$.

δηλ το ορθογώνιο με τη μικρότερη περίμετρο είναι τετράγωνο.

Η ελάχιστη περίμετρος είναι $\Pi = 40\text{cm}$

Σχόλιο

Τις υποδείξεις έκανε η συνάδελφος Δέσποινα Γκαντόγλου.

Την ευχαριστώ !

Δίνονται $f(x) = \sqrt{x+2}$ $g(x) = \frac{x+4}{3}$

α. Κοινά σημεία των C_f, C_g .

$A_f = [-2, +\infty)$ $A_g = \mathbb{R}$

Για $x \geq -2$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \frac{x+4}{3} \Leftrightarrow$

$x+2 = \frac{(x+4)^2}{9} \Leftrightarrow 9x+18 = x^2+8x+16 \Leftrightarrow$

$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-1$

οπότε τα κοινά σημεία είναι

$A(2, 2)$ και $B(-1, 1)$

β. Αντιστροφή ως f .

$f(x) = \sqrt{x+2}$ $A_f = [-2, +\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$

άρα η f $\uparrow$ στο $[-2, +\infty)$
άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται.

$f(A) = f([-2, +\infty)) \stackrel{\text{συνεχώς}}{\uparrow} [f(-2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, +\infty)$

οπότε το $A_{f^{-1}} = [0, +\infty)$

Για $x \geq -2$ και $y \geq 0$ έχουμε

$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = y \Leftrightarrow x+2 = y^2 \Leftrightarrow x = y^2 - 2 \quad y \geq 0$

$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ άρα $f^{-1}(y) = y^2 - 2 \quad y \geq 0$

οπότε $f^{-1}(x) = x^2 - 2 \quad x \geq 0$

Συνθεση $f \circ g$.

$$f(x) = \sqrt{x+2} \quad A_f = [-2, +\infty) \quad g(x) = \frac{x+4}{3} \quad A_g = \mathbb{R}$$

$$A_{f \circ g} = \{x \in A_g \mid g(x) \in A_f\} = [-10, +\infty).$$

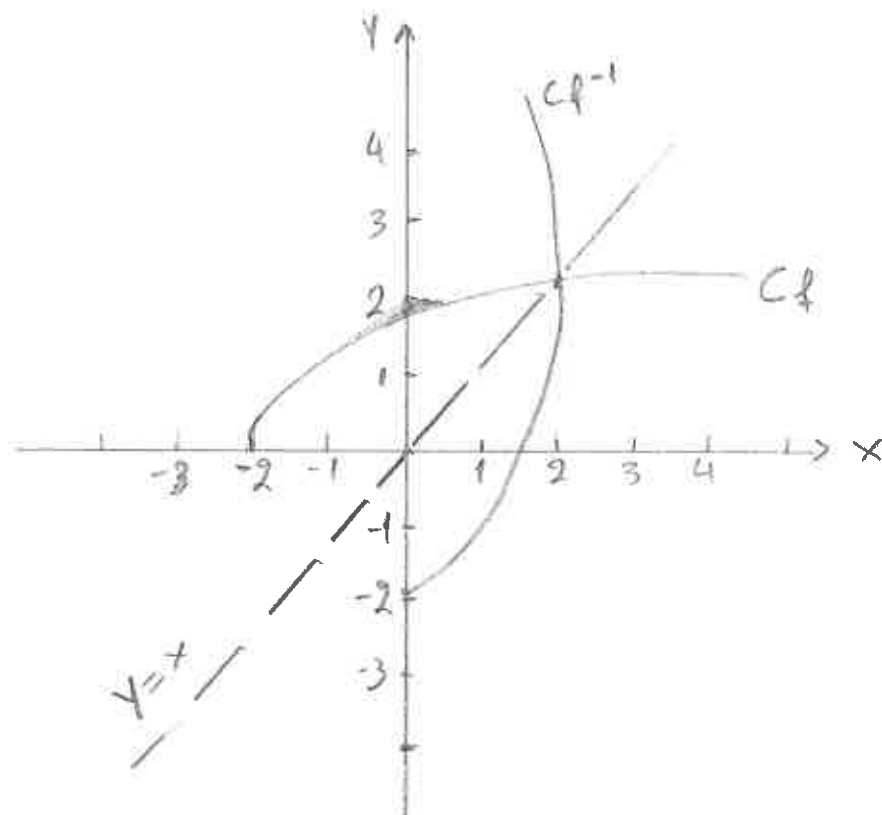
$$\left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ \frac{x+4}{3} \geq -2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x+4 \geq -6 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x \geq -10 \end{array} \right\} x \in [-10, +\infty).$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+4}{3}\right) = \sqrt{\frac{x+4}{3} + 2} = \sqrt{\frac{x+10}{3}}.$$

δ. Γραφική παράσταση f και f^{-1}

$$f(x) = x \in \sqrt{x+2} = x \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} -x+2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = x-2 = 0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-1 \text{ άνορ.}$$

$$f^{-1}(x) = x \in x^2-2 = x \Leftrightarrow x^2-x-2 = 0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-1 \text{ άνορ.}$$



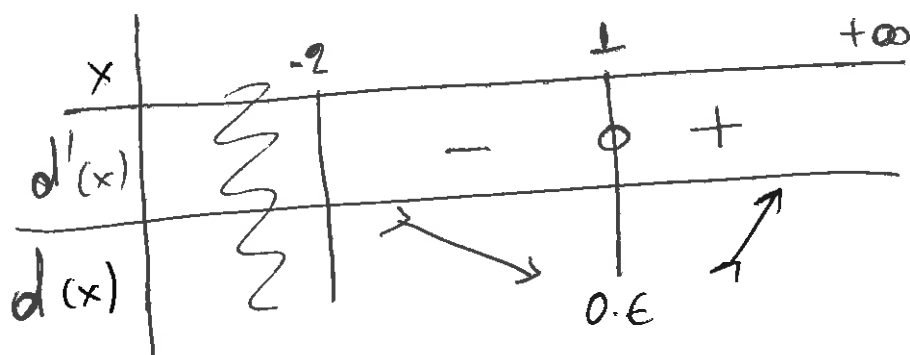
$$S. A\left(\frac{3}{2}, 0\right) \quad M(x, f(x))$$

$$|AM| = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (\sqrt{x+2} - 0)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + x+2}$$

$$d(x) = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + x+2}$$

$$d'(x) = \frac{2\left(x - \frac{3}{2}\right) + 1}{2\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + x+2}} = \frac{2x - 3 + 1}{2\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + x+2}} = \frac{x-1}{\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + x+2}}$$

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

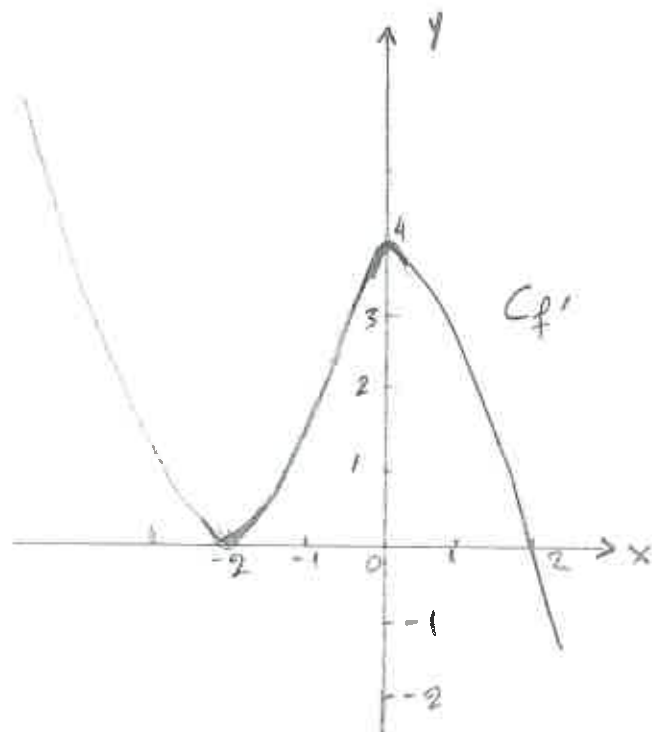
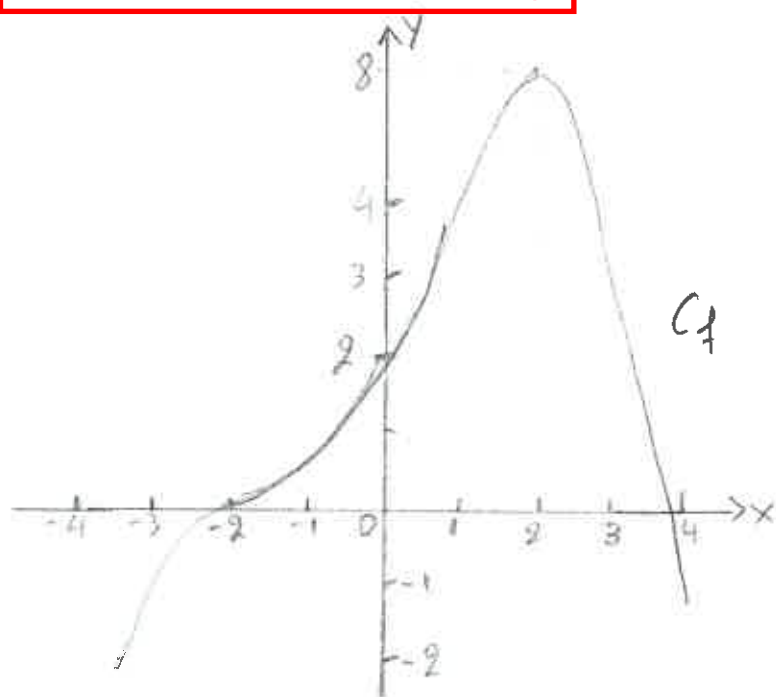


για $x=1$ η απόσταση ΑΜ γίνεται ελάχιστη.

Ε. $N(-\alpha-4, 0)$ Ν.δ.ο. η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $M(\alpha, f(\alpha))$ και $N(-\alpha-4, 0)$ εφαρτάται στη C_f

$$\text{Είναι } \Delta_{MN} = \frac{f(\alpha)}{\alpha + \alpha + 4} = \frac{\sqrt{\alpha+2}}{2\alpha+4} = \frac{\alpha+2}{2(\alpha+2)\sqrt{\alpha+2}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha+2}} = f'(\alpha).$$

Άρα η ευθεία ΜΝ εφαρτάται με τη C_f .



α) Στο πρώτο σχήμα η f παρίσταται στο $\mathbb{R}$.
 άρα είναι η C_f

Αν το πρώτο σχήμα ήταν η $C_{f'}$ τότε

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

α οποία μονοτονία της f
 δεν είναι αυτή του
 2^{ου} σχήματος

β) i Η $f'(x) > 0$ για $x \in (-\infty, -2)$ και $(-2, 2)$ άρα
 το $f(-2)$ δεν είναι ακρότατο της f και
 η $f \nearrow$ στο $(-\infty, 2]$

ii. Εξ εφαπτομένης στο $(0, f(0))$.
 $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - \frac{8}{3} = 4x \Leftrightarrow y = 4x + \frac{8}{3}$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$				

T.M.

$f(2) = 8$

Δ> Κρίσιμα σημεία τα εσωτερικά σημεία στα οποία η f δεν παραγωγίζεται και στα οποία η f' μηδενίζεται άρα
κρίσιμα σημεία τα -2 και 2 στα οποία η f' μηδενίζεται.

$$K = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) - 2f(x) + \pi x}{f^2(x) + 3f(x) + \sin x + 4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) \left(1 - \frac{2}{f(x)} + \frac{\pi x}{f^2(x)}\right)}{f^2(x) \left(1 + \frac{3}{f(x)} + \frac{\sin x}{f^2(x)} + \frac{4}{f^2(x)}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{f(x)} + \frac{\pi x}{f^2(x)}}{1 + \frac{3}{f(x)} + \frac{\sin x}{f^2(x)} + \frac{4}{f^2(x)}} = 1$$

άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ (από σχήμα).

οποότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{f(x)} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{f(x)} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{f^2(x)} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi x}{f^2(x)} = 0$$

$$\left| \frac{\pi x}{f^2(x)} \right| = \left| \frac{1}{f^2(x)} \right| |\pi x| \leq \frac{1}{f^2(x)} \quad -\frac{1}{f^2(x)} \leq \frac{\pi x}{f^2(x)} \leq \frac{1}{f^2(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{f^2(x)} \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{f^2(x)} \right| \text{ άρα κ.η } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi x}{f^2(x)} = 0$$

ομοίως $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{f^2(x)} = 0$ από κ.η.

$$\epsilon) A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x)}{x+2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x) - f^3(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \left[\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} \cdot (f^2(x) + f(x)f(-2) + f^2(-2)) \right] =$$

$$= f'(-2) \cdot (f^2(-2) + f^2(-2) + f^2(-2)) = 0$$

f συνεχής στο -2 .

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - f^2(0)}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x) - f(0))(f(x) + f(0))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \cdot (f(x) + f(0)) =$$

$$f'(0) \cdot 2f(0) = 4 \cdot 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{64}{3}$$

$$\sigma\zeta) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x+2)^3 & x < 0 \\ \frac{1}{3}(12x - x^3 + 8) & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{(1-1)x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \quad 1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \in \mathbb{R}.$$

α. Έστω $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = l$.

Είναι $f(x) = \frac{(1-1)x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \Leftrightarrow f(x) \cdot (x^2 - 1) = (1-1)x^2 + x - 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x)(x^2 - 1)) = \lim_{x \rightarrow 1} [(1-1)x^2 + x - 2]$$

$$l \cdot 0 = 1 - 1 + 1 - 2 \Leftrightarrow 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow 1 = 2.$$

οπότε $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}.$$

β. Μονοτονία και σύνολο τιμών της f .

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \quad \text{Α}f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{x+1 - x-2}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0 \quad \text{για } x \neq \pm 1.$$

άρα η f $\downarrow$ σε καθεμία από τα διαστήματα
 $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[(x+2) \frac{1}{x+1} \right] = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[(x+2) \frac{1}{x+1} \right] = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

$$A_1 = (-\infty, -1) \quad A_2 = (-1, 1) \quad A_3 = (1, +\infty).$$

$$f(A_1) = f((-\infty, -1)) \stackrel{f \downarrow}{\text{συνεχῶς}} \left(\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, 1).$$

$$f(A_2) = f((-1, 1)) \stackrel{f \downarrow}{\text{συνεχῶς}} \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \right) = \left(\frac{3}{2}, +\infty \right)$$

$$f(A_3) = f((1, +\infty)) \stackrel{f \downarrow}{\text{συνεχῶς}} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = \left(1, \frac{3}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} f(A) &= f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty \right) \cup \left(1, \frac{3}{2} \right) = \\ &= (-\infty, 1) \cup \left(1, \frac{3}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty \right) \end{aligned}$$

87 f 1-1 και να οριστεί η f^{-1}
 Η f $\searrow$ σε κάθενα από τα διασπαραζα

A_1, A_2, A_3 και $f(A_1) \cap f(A_2) \cap f(A_3) = \emptyset$
 άρα η f 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Για $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ για $y \in f(A)$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1} = y \Leftrightarrow x+2 = y(x+1) \Leftrightarrow$$

$$x+2 = yx+y \Leftrightarrow x-yx = y-2 \Leftrightarrow (1-y)x = y-2 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{y-2}{1-y} \quad y \in (-\infty, 1) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$$

$$\text{άρα } f^{-1}(x) = \frac{x-2}{1-x} \quad x \in (-\infty, 1) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$$

$$8. A = \lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{ το όριο } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ δεν υπάρχει.}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(e^x - 3^x)$$

$$\text{Θέτω } e^x - 3^x = u \quad u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 3^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3^x \left[\left(\frac{e}{3} \right)^x - 1 \right] \right) = -\infty$$

$$\text{ογότε } B = \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = 1.$$

$$7. \Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(x \arctan \frac{2}{x}\right)$$

$$\text{Θέτω } x \arctan \frac{2}{x} = u$$

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \arctan \frac{2}{x} \right)$$

Ασυμπτώτες:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

αρα η $x = -1$ κατακόρυφη ασυμπτωτή

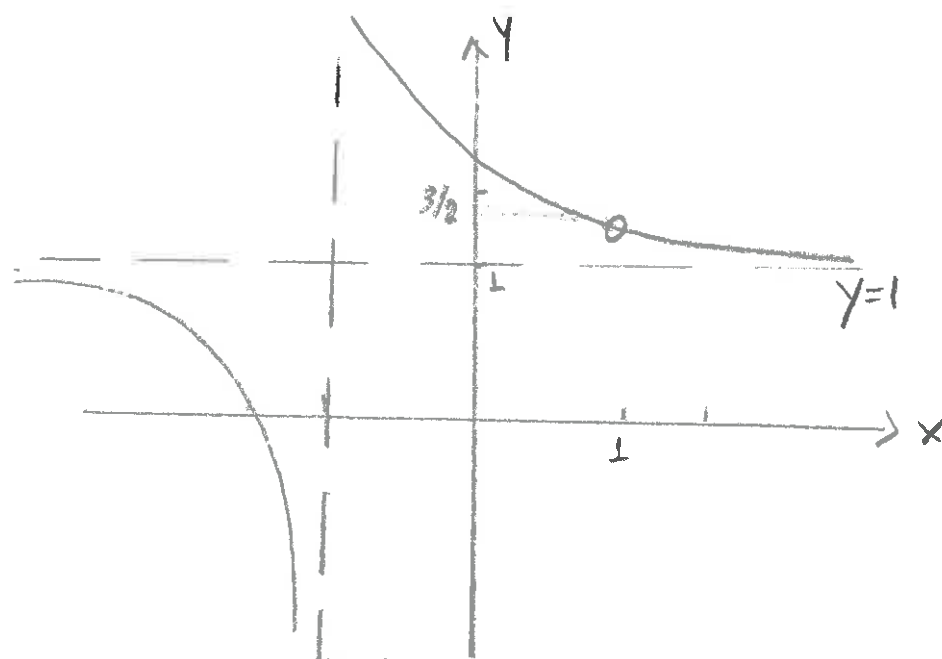
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

αρα η $y = 1$ οριζόντια ασυμπτωτή στο $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

αρα η $y = 1$ οριζόντια ασυμπτωτή στο $+\infty$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$	$+$
$f'(x)$	$-$		$-$	$-$
$f(x)$	1	$+\infty$	$\frac{3}{2}$	1



$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2|x|}$$

$$g(x) = 1 - \frac{2}{|x|}$$

$\alpha > N.S.O. \quad f = g \quad \text{και} \quad \text{τι} \quad g = g_3 \circ g_2 \circ g_1 \quad \text{τ.ω}$
 $g_3(2) = -1, \quad g_2(1) = 2 \quad g_1(-1) = 1$

$$A_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$A_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$\alpha \alpha \quad A_f = A_g$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2|x|} = \frac{|x|^2 - 4}{|x|^2 + 2|x|} = \frac{(|x| - 2)(|x| + 2)}{|x| \cdot (|x| + 2)} = \frac{|x| - 2}{|x|} = 1 - \frac{2}{|x|} = g(x)$$

$\alpha \alpha \quad f = g \quad \chi \alpha \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Είναι $g(x) = g_3(g_2(g_1(x)))$

$\mu \epsilon \quad g_3(x) = 1 - x \quad g_2(x) = \frac{2}{x} \quad \text{και} \quad g_1(x) = |x|$

$\beta > \text{Να ορίσετε τι συνάρτηση } h = g \circ g$

$$A_{g \circ g} = \{x \in A_g \mid g(x) \in A_g\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \neq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x \neq 0 \\ 1 - \frac{2}{|x|} \neq 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x \neq 0 \\ \frac{|x| - 2}{|x|} \neq 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x \neq 0 \\ |x| - 2 \neq 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x \neq 0 \\ |x| \neq 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \neq 2 \text{ και } x \neq -2 \end{array} \right\}$$

$$A_{g \circ g} = \mathbb{R} - \{0, 2, -2\}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = 1 - \frac{2}{|1 - \frac{2}{|x|}|} = 1 - \frac{2}{|\frac{|x| - 2}{|x|}|} = 1 - \frac{2|x|}{|x| - 2}$$

8> Μονοτονία της f και συνολο τιμών 23/351

$$f(x) = 1 - \frac{2}{|x|} \quad x \neq 0.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{x} & x < 0 \\ 1 - \frac{2}{x} & x > 0 \end{cases}$$

Για $x < 0$ $f'(x) = -\frac{2}{x^2} < 0$ άρα $n \downarrow$

Για $x > 0$ $f'(x) = \frac{2}{x^2} > 0$ άρα $n \uparrow$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$			
		-	+
$f(x)$			

$$A_1 = (-\infty, 0) \quad A_2 = (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[(x+2) \frac{1}{x} \right] = 2 \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(x+2) \frac{1}{x} \right] = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$f(A_1) = f((-\infty, 0)) \xrightarrow{\text{συνεχώς}} \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, 1)$$

$$f(A_2) = f((0, +\infty)) \xrightarrow{\text{συνεχώς}} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (1, +\infty)$$

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

$\delta >$ Η εφαπτομένη της C_g στο $M(\alpha, f(\alpha))$ $\alpha > 0$
 τέμνει $y=1$ $x \neq 0$ στα σημεία A και B
 ν.δ.ο. $MA=MB$ και N_{AB}^{Δ} με $N(0,1)$ έχει
 σταθερό εμβαδόν, αν το M μεταβάλλεται.

Η εφαπτομένη της C_g στο $M(\alpha, f(\alpha))$ $\alpha > 0$

είναι $y - g(\alpha) = g'(\alpha) \cdot (x - \alpha)$

$$y - (1 - \frac{2}{\alpha}) = \frac{2}{\alpha^2} (x - \alpha)$$

$$y = \frac{2}{\alpha^2} x - \frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha} + 1$$

$$y = \frac{2}{\alpha^2} x + 1 - \frac{4}{\alpha}$$

$A: 1 = \frac{2}{\alpha^2} x + 1 - \frac{4}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{2}{\alpha^2} x = \frac{4}{\alpha} \Leftrightarrow x = 2\alpha \quad A(2\alpha, 1)$

$B: y = 0 + 1 - \frac{4}{\alpha} \Leftrightarrow y = 1 - \frac{4}{\alpha} \quad B(0, 1 - \frac{4}{\alpha})$

$$M(\alpha, 1 - \frac{2}{\alpha})$$

$$MA = \sqrt{(2\alpha - \alpha)^2 + (1 - 1 + \frac{2}{\alpha})^2} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^2}}$$

$$MB = \sqrt{\alpha^2 + (1 - \frac{4}{\alpha} - 1 + \frac{2}{\alpha})^2} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^2}}$$

άρα $MA = MB$

$$(N_{AB}) = \frac{1}{2} |\det(\vec{N}_A, \vec{N}_B)| =$$

$$\vec{N}_A = (2\alpha, 0)$$

$$\vec{N}_B = (0, -\frac{4}{\alpha})$$

$$\frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & -\frac{4}{\alpha} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-8| = 4$$

άρα το εμβαδόν του N_{AB}^{Δ} είναι σταθερό

$$f(x) = \frac{8}{x} \quad g(x) = x^2 - 6x + 12$$

α) Ν.δ.ο. το $A(2,4)$ μοναδικό κοινό σημείο των C_f και C_g .

$$A_f = \mathbb{R} - \{0\} \quad A_g = \mathbb{R}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{8}{x} = x^2 - 6x + 12 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2) \cdot (x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 12 & -8 \\ & 2 & -8 & 8 \\ \hline 1 & -4 & 4 & 0 \end{array} \quad 2$$

$$(x-2)^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x-2=0 \Leftrightarrow$$

$$x=2$$

$$\text{Είναι } f(2) = \frac{8}{2} = 4$$

άρα $A(2,4)$ μοναδικό κοινό σημείο.

β) Ν.δ.ο. C_f και C_g κοινά εφαπτόμενα στο κοινό τους σημείο.

Κοινό σημείο $A(2,4)$ οπότε θα πρέπει

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = g(2) \\ f'(2) = g'(2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 = 4 \\ -2 = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} f'(x) = -\frac{8}{x^2} \\ f'(2) = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} g'(x) = 2x - 6 \\ g'(2) = -2 \end{array}$$

άρα δεχονται κοινά εφαπτόμενα στο κοινό σημείο $A(2,4)$

γ) Σχετικά θέσι C_f και C_g .

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{8}{x} > x^2 - 6x + 12 \Leftrightarrow$$

$$\frac{8}{x} - x^2 + 6x - 12 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{8 - x^3 + 6x^2 - 12x}{x} > 0 \Leftrightarrow$$

$$(-x^3 + 6x^2 - 12x + 8)x > 0.$$

$$-x(x-2)^3 > 0.$$

$$x(x-2)^3 < 0.$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	-		+	+
$(x-2)^3$	-		-	+
γiv	+		-	+

Η C_f είναι πάνω από C_g αν $x \in (0, 2)$.

Η C_f είναι κάτω από τη C_g αν $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

$$h = g - f$$

$$h(x) = g(x) - f(x) = x^2 - 6x + 12 - \frac{8}{x}$$

$$A_h = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$h'(x) = 2x - 6 + \frac{8}{x^2} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 8}{x^2} = \frac{2(x^3 - 3x^2 + 4)}{x^2}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2) \cdot (x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x=2 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-1 \Leftrightarrow (x-2)^2 \cdot (x+1)$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 4 \\ & 2 & -2 & -4 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$(x-2)^2$	+	+	+	0	+
$x+1$	-	0	+	+	+
$h'(x)$	-	+	+	+	+
$h(x)$					

$$A_1 = (-\infty, -1] \quad A_2 = [-1, 0) \quad A_3 = (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$f(-1) = 1 + 6 + 12 + 8 = 27$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \cdot \frac{1}{x} \right] = -8(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \cdot \frac{1}{x} \right] = -8(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$h(A_1) = h((-\infty, -1]) \stackrel{\text{συνεχώς}}{\frac{h \uparrow}{\text{συνεχώς}}} [h(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)] = [27, +\infty)$$

$$h(A_2) = h([-1, 0]) \stackrel{\text{συνεχώς}}{\frac{h \uparrow}{\text{συνεχώς}}} [h(-1), \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)] = [27, +\infty)$$

$$h(A_3) = h((0, +\infty)) \stackrel{\text{συνεχώς}}{\frac{h \uparrow}{\text{συνεχώς}}} (\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)) = (-\infty, +\infty)$$

Οηοτε

$$h(A) = h(A_1) \cup h(A_2) \cup h(A_3) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

ε) Η εφαπτομένη της C_f σε κάποιο σημείο M τέμνει τους άξονες στα σημεία N και P . Ν.δ.ο. $MN = MP$ και το τρίγωνο ONP σταθερό εμβαδό.

Εστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής.

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση ε:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y - \frac{8}{x_0} = -\frac{8}{x_0^2} (x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y = -\frac{8}{x_0^2} x + \frac{8}{x_0} + \frac{8}{x_0} \Leftrightarrow y = -\frac{8}{x_0^2} x + \frac{16}{x_0}.$$

Η(ε) τέμνει τον $y'y$ για $x=0$ άρα $y = \frac{16}{x_0}$ δηλ
 $N(0, \frac{16}{x_0})$.

Η(ε) τέμνει τον $x'x$ για $y=0$ άρα
 $-\frac{8}{x_0^2} x + \frac{16}{x_0} = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{x_0^2} x = \frac{16}{x_0} \Leftrightarrow x = 2x_0.$

δηλ $P(2x_0, 0)$.

Έχουμε $M(x_0, \frac{8}{x_0})$ $N(0, \frac{16}{x_0})$ $P(2x_0, 0)$ 238/351

$$(MN) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{8}{x_0}\right)^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{64}{x_0^2}} = \sqrt{\frac{x_0^4 + 64}{x_0^2}}$$

$$(MP) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{8}{x_0}\right)^2} = \sqrt{\frac{x_0^4 + 64}{x_0^2}}$$

άρα $MN = MP$.

Το τρίγωνο ONP έχει εμβαδό.

$$(ONP) = \frac{1}{2} |\det(\vec{ON}, \vec{OP})| =$$

$$\vec{ON} = (0, \frac{16}{x_0})$$

$$\vec{OP} = (2x_0, 0)$$

$$\frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 0 & \frac{16}{x_0} \\ 2x_0 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |0 - 32| = \frac{1}{2} 32 = 16 \text{ τ.ψ.}$$

άρα σταθερό εμβαδό.

$$f(x) = 5\sqrt{100^2 + x^2} + 3(300 - x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\alpha) f'(x) = 5 \frac{2x}{2\sqrt{100^2 + x^2}} - 3 = \frac{5x - 3\sqrt{x^2 + 100^2}}{\sqrt{100^2 + x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x = 3\sqrt{100^2 + x^2} \xrightarrow{x \geq 0} 25x^2 = 9 \cdot (100^2 + x^2) \Leftrightarrow$$

$$25x^2 = 9 \cdot 100^2 + 9x^2 \Leftrightarrow 16x^2 = 9 \cdot 100^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(x = \sqrt{\frac{9 \cdot 100^2}{16}} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt{\frac{9 \cdot 100^2}{16}} \right) \in \mathbb{R}$$

$$x = 75 \quad \text{ή} \quad x = -75 \text{ απόρ.}$$

x	$-\infty$	75	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\nearrow$

$$f(75) = 5\sqrt{100^2 + 75^2} + 3 \cdot (225) =$$

$$= 5\sqrt{10000 + 5625} + 675 = 5\sqrt{15625} + 675 =$$

$$= 5 \cdot 125 + 675 = 625 + 675 = 1300$$

$\beta)$ Συνολο τιμών της f και οβικά ακρόατα

$$A_1 = (-\infty, 75] \quad A_2 = [75, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [5\sqrt{100^2 + x^2} + 3(300 - x)] = +\infty.$$

$$f(75) = 1300$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [5\sqrt{100^2 + x^2} + 3(300 - x)] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[|x| 5\sqrt{1 + \left(\frac{100}{x}\right)^2} + 900 - 3x \right] \stackrel{x > 0}{=} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(5\sqrt{1 + \left(\frac{100}{x}\right)^2} + \frac{900}{x} - 3 \right) \right] = +\infty \cdot (5 - 3) = +\infty$$

Οπότε $f \downarrow$
 $f(A_1) \xrightarrow{\text{συνεχώς}} [f(75), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [1300, +\infty)$

$f \uparrow$
 $f(A_2) \xrightarrow{\text{συνεχώς}} [f(75), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [1300, +\infty)$

Επομένως $f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) = [1300, +\infty)$.

αρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο
 $x=75$ το $f(75)=1300$.

γ> $P(75, 1300) \in Cf?$ $N(240, 1480) \in Cf?$

Είναι $f(75)=1300$ αρα $P \in Cf$

$$f(240) = 5\sqrt{100^2 + 240^2} + 3(300 - 240) =$$

$$= 5\sqrt{10000 + 57600} + 3 \cdot 60 = 5\sqrt{67600} + 180 \neq 1480$$

αρα $N \notin Cf$.

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5\sqrt{100^2 + x^2} + 900 - 3x - 2x) =$$

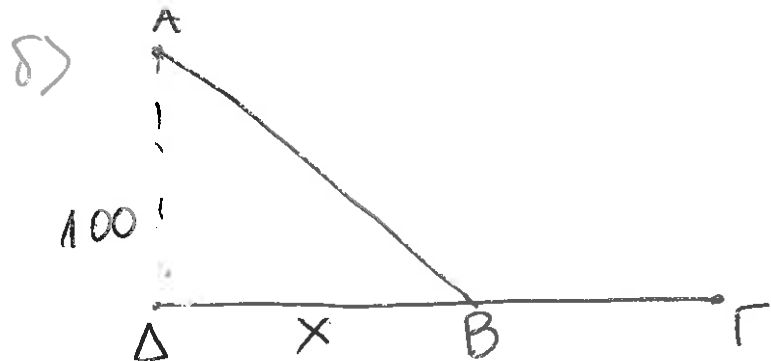
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [5\sqrt{100^2 + x^2} - 5x + 900] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [5(\sqrt{100^2 + x^2} - x) + 900] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[5 \frac{(\sqrt{100^2 + x^2} - x)(\sqrt{100^2 + x^2} + x)}{\sqrt{100^2 + x^2} + x} \right] + 900 =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot (100^2 + x^2 - x^2)}{1x \sqrt{1 + (\frac{100}{x})^2} + x} + 900 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot 100^2}{x \sqrt{1 + (\frac{100}{x})^2} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot 100^2}{x \cdot (\sqrt{1 + (\frac{100}{x})^2} + 1)} = 0 \cdot \frac{5 \cdot 100^2}{2} = 0.$$



$$\Gamma\Delta = 300 \text{ m}$$

$$A\Delta = 100 \text{ m.}$$

$$AB\Gamma = AB + B\Gamma.$$

$$(AB)^2 = (A\Delta)^2 + (\Delta B)^2 \Leftrightarrow (AB)^2 = 100^2 + x^2 \Leftrightarrow$$

$$AB = \sqrt{100^2 + x^2}.$$

$$B\Gamma = 300 - x.$$

αρα το κόστος εγκατάστασης είναι:

$$K(x) = 5 \cdot \sqrt{100^2 + x^2} + 3(300 - x) = f(x)$$

Η οηοια f έχει ελάχιστο στο $x_0 = 75 \text{ m.}$
και το ελάχιστο κόστος είναι

$$f(75) = 1300 \text{ εκατομμύρια ευρώ}$$

$$f(x) = \frac{x+\alpha}{x} \ln x \quad g(x) = \ln x + x - 1 \quad x > 0$$

$f(1)$ τοπικό ακρότατο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Προσέψο πως g

$$A_g = (0, +\infty).$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x} > 0 \quad \forall x > 0 \text{ άρα}$$

η $g \uparrow$ στο $(0, +\infty)$.

Παρατηρώ $g(1) = 0$ οπότε

Για $0 < x < 1$

$$g \uparrow \quad g(x) < g(1) \\ g(x) < 0.$$

Για $x > 1$

$$g(x) > g(1) \quad g \uparrow \\ g(x) > 0.$$

β) Ν.Σ.Ο. $\alpha = -1$.

Η f παρουσιάζει ακρότατο στο 1

Το 1 εσωτερικό σημείο

Η f παραγωγίσιμη στο 1 με

$$f'(x) = \frac{-\alpha}{x^2} \ln x + \frac{x+\alpha}{x} \frac{1}{x}.$$

Επομένως από θ. Fermat

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow -\alpha \cdot 0 + \frac{1+\alpha}{1} = 0 \Leftrightarrow 1+\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1.$$

$$\text{άρα } f(x) = \frac{x-1}{x} \ln x \quad x > 0$$

γ> Μονοτονία - ακρότατα ως f .

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \ln x \quad x > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \ln x + \frac{x-1}{x^2} = \frac{x-1+\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Για $0 < x < 1$ η $f'(x) < 0$ άρα η f ↓ στο

$(0, 1]$

Για $x > 1$ η $f'(x) > 0$ άρα η f ↑ στο $[1, +\infty)$.

Για $x = 1$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο
 ως $f(1) = 0$.

δ> Σύνολο τιμών ως f

$$A_1 = (0, 1]$$

$$A_2 = [1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-1}{x} \ln x \right) = +\infty \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x} = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

$$f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x} \ln x \right) = +\infty \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

$$f(A_1) \stackrel{f \downarrow}{=} [f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] = [0, +\infty)$$

$$f(A_2) \stackrel{f \uparrow}{=} [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, +\infty)$$

$$\text{οδηγεί } f(A) = f((0, +\infty)) = f(A_1) \cup f(A_2) = [0, +\infty)$$

ε> 0 πρὶν εἶναι ἡ g^{-1} η.ο. g^{-1} καὶ νὰ Διῶθῇ $g^{-1}(x) > x$.

$$g(x) = \ln x + x - 1 \quad x > 0$$

Ἡ g ἂν εἶναι $(0, +\infty)$ ἀρὰ 1-1 ἀρὰ ἀντιστρέφεται.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + x - 1) = -\infty + 0 - 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + x - 1) = +\infty$$

οἷοτε $g(A) = g((0, +\infty)) \xrightarrow{\text{συνεχῶς}} (\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)) = \mathbb{R}$.

οἷοτε $A g^{-1} = \mathbb{R}$.

$$g^{-1}(x) > x \xrightarrow{g \uparrow} g(g^{-1}(x)) > g(x) \Leftrightarrow$$
$$g(x) < x \Leftrightarrow \ln x + x - 1 < x \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow$$
$$x < e.$$

ε> Ἡ f εἶναι σὺνθετο καμπύς $M(x, f(x))$ καὶ οἷα $f(x) = \frac{(x-1)(2-x)}{2x}$.

$$f''(x) = \left(\frac{\ln x + x - 1}{x^2} \right)' = \frac{\left(\frac{1}{x} + 1 \right) x^2 - 2x (\ln x + x - 1)}{x^4} =$$
$$= \frac{x + x^2 - 2x \ln x - 2x^2 + 2x}{x^4} = \frac{3x - x^2 - 2x \ln x}{x^4} =$$
$$= \frac{x(3 - x - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{3 - x - 2 \ln x}{x^3}$$

Θεωρώ $h(x) = 3 - x - 2\ln x \quad x > 0$

$h'(x) = -1 - \frac{2}{x} < 0 \quad \forall x > 0$ άρα

η $h \searrow$ στο $(0, +\infty)$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3 - x - 2\ln x) = 3 - 2(-\infty) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - x - 2\ln x) = 3 - (+\infty) - 2(+\infty) = -\infty$.

οηοτε $h((0, +\infty)) \stackrel{h \searrow}{\text{συνεχώς}} (\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)) = \mathbb{R}$.

Επειδὴ $0 \in h((0, +\infty))$ υπάρχει $\alpha \in (0, +\infty)$

τ.ω $h(\alpha) = 0$ και η $h \searrow$ άρα μοναδικό

Δηλ η εξ. $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

x		0	α	$+\infty$
$h'(x)$	$\searrow$		$+$	$-$
$h''(x)$	$\searrow$		$+$	$-$
$h(x)$			$\cup$	$\cap$

$x < \alpha \quad h \searrow$
 $h(x) > h(\alpha)$
 $h(x) > 0$

$x > \alpha \quad h \searrow$
 $h(x) < h(\alpha)$
 $h(x) < 0$

Οηοτε η h μοναδικό σημείο καμηνής.

$h(\alpha) = \frac{\alpha-1}{\alpha} \ln \alpha =$

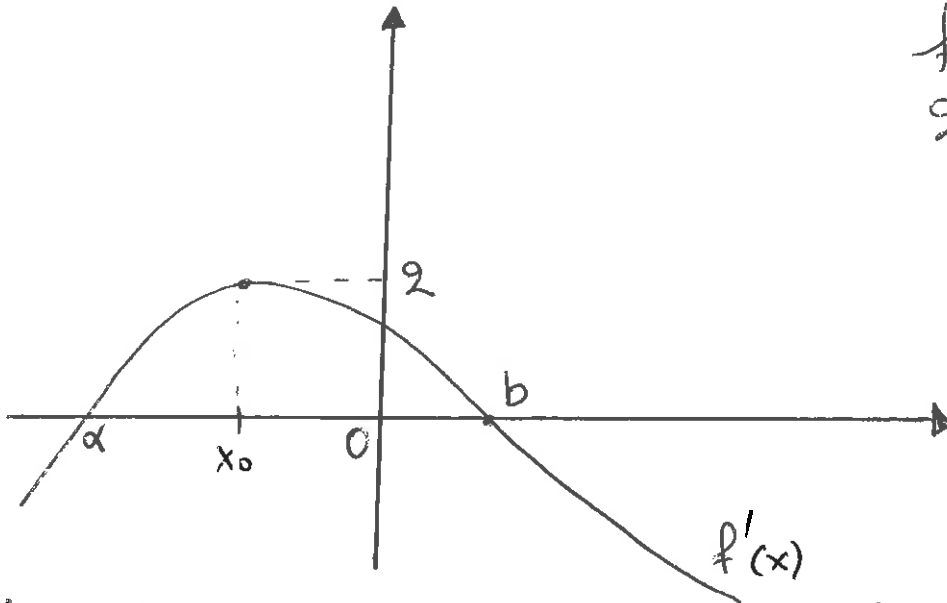
$\frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot \frac{3-\alpha}{2} = \frac{(\alpha-1)(3-\alpha)}{2\alpha}$

$h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow$

$3 - \alpha - 2\ln \alpha = 0$

$2\ln \alpha = 3 - \alpha$

$\ln \alpha = \frac{3-\alpha}{2}$



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
2 φορές παρ/μ.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad f(\alpha) < 0 \quad f''(\alpha) = 3 \quad f(x_0) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

α) Μονοτονία, κοίτα, Σύνοδο σημείων ως f

x	$-\infty$	α	b	$+\infty$	
$f'(x)$	—	0	+	0	—
$f(x)$	↘ T.E.		↗ T.M.		↘

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f''(x)$	+	—	
$f(x)$	↗ Σ.Κ. $(x_0, f(x_0))$		↘ $(x_0, \frac{1}{2})$

$$A_1 = (-\infty, \alpha] \quad A_2 = [\alpha, b] \quad A_3 = [b, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(A_1) = f((-\infty, \alpha]) \xrightarrow{f \downarrow} [f(\alpha), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [f(\alpha), +\infty)$$

$$f(A_2) = f([\alpha, b]) \xrightarrow{f \uparrow} [f(\alpha), f(b)]$$

$$f(A_3) = f([b, +\infty)) \xrightarrow{f \downarrow} (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(b)] = (-\infty, f(b)]$$

$$f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \mathbb{R}$$

Είναι $f(a) < 0$ και

247/351

$a < x_0 < b$ $f \uparrow$ στο $[a, b]$

αρα $f(a) < f(x_0) < f(b)$

$\frac{1}{2} < f(b)$ αρα $f(b) > 0$.

οηοζε

$0 \in f(A_1)$ αρα υπαρχει $p_1 \in (-\infty, a]$ τ.ω

$f(p_1) = 0$ και $n \nmid f \downarrow$ αρα p_1 μοναδική ρίζα

$0 \in f(A_2)$ αρα υπαρχει $p_2 \in [a, b]$ τ.ω

$f(p_2) = 0$ και $n \nmid f \uparrow$ αρα p_2 μοναδική ρίζα.

$0 \in f(A_3)$ αρα υπαρχει $p_3 \in [b, +\infty)$ τ.ω.

$f(p_3) = 0$ και $n \nmid f \downarrow$ αρα p_3 μοναδική ρίζα.

Επομεως $n \in \mathbb{Z}$. $f(x) = 0$ εχει ακριβως 3

ρίζες p_1, p_2, p_3 και ας είναι $p_1 < p_2 < p_3$.

b> Να βρείτε το προσυμφο w f .

x	p_1	a	p_2	b	p_3		
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Η f συνεχής και p_1, p_2, p_3 διαδοχικές
ρίζες. Αρα $n \nmid f$ διατηρεί προσυμφο σε
κάθε αηο τα διαστήματα (p_1, p_2) και (p_2, p_3)
και $f(a) < 0$ αρα $f(x) < 0 \forall x \in (p_1, p_2)$
 $f(b) > 0$ αρα $f(x) > 0 \forall x \in (p_2, p_3)$

Επίσης για $x < p_1$ η $f \downarrow$ άρα

$$f(x) > f(p_1)$$

$$f(x) > 0$$

για $x > p_3$ η $f \downarrow$ άρα

$$f(x) < f(p_3)$$

$$f(x) < 0$$

γ> Να υπολογίσουν τα όρια:

$$A = \lim_{x \rightarrow b} \frac{\ln(x-b)}{(f'(x))^3}$$

$$\text{και } B = \lim_{x \rightarrow a} \frac{xf'(x)}{x-a}$$

Είναι:

$$A = \lim_{x \rightarrow b} \frac{\ln(x-b)}{(f'(x))^3} = \lim_{x \rightarrow b} \left[\ln(x-b) \cdot \frac{1}{(f'(x))^3} \right]$$

Είναι $x-b > 0 \Leftrightarrow x > b$ άρα

$$A = \lim_{x \rightarrow b^+} \left[\ln(x-b) \cdot \frac{1}{(f'(x))^3} \right] = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty.$$

αφού η $f'(x) < 0$ για $x > b$

$$B = \lim_{x \rightarrow a} \frac{xf'(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{xf'(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f'(x)}{x-a} \right) = 1 \cdot f''(a) = 3.$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf'(x)}{f'(x)} \stackrel{f'(x)=u}{u \rightarrow 0} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{u} = 1.$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} = f''(a) = 3.$$

$\delta > 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι
 $f(x+1) \leq 2 + f(x)$.

Θ.Μ.Τ για την f στο $[x, x+1]$.

$$\xi \in (x, x+1) \text{ τ.ω } f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} \in$$

$$f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$$

Ομως από το χαρακτηριστικό παρατηρούμε
 ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) \leq 2$ άρα

$$f'(\xi) \leq 2 \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$f(x+1) \leq 2 + f(x).$$

$\varepsilon > 0$ Να δοθεί η εξίσωση

$$f'(x) + f(x) = f^2(x) + \frac{9}{4}.$$

$$\text{Είναι } f'(x) = f^2(x) - f(x) + \frac{9}{4}.$$

Παρατηρώ ότι το x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης

Επίσης ισχύει $f'(x_0) \leq 2$ και

$$\begin{aligned} f^2(x_0) - f(x_0) + \frac{9}{4} &= f^2(x_0) - 2 \cdot \frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{4} + 2 = \\ &= \left(f(x_0) - \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \geq 2. \end{aligned}$$

άρα x_0 η μοναδική ρίζα.

$$f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{-x} \quad x \neq 0$$

a. Μονοτονία της f

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{x^2} e^{-x} - \left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{-x} = e^{-x} \left(-\frac{2}{x^2} - 1 - \frac{2}{x}\right) = \\ &= -e^{-x} \cdot \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2}\right) = -e^{-x} \frac{(x+1)^2 + 1}{x^2} < 0 \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

αρα η f γνησίως φθίνουσα.

b. Δυοδοί τιμών της f .

$$A_1 = (-\infty, 0)$$

$$A_2 = (0, +\infty)$$

$$f(A_1) = f((-\infty, 0)) \xrightarrow[\text{συνέχεια}]{f \downarrow} \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{-x} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{-x} \right] = (1+0) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$A_2 = (0, +\infty)$$

$$f(A_2) = f((0, +\infty)) \xrightarrow[\text{συνέχεια}]{f \downarrow} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{-x} \right) = (1+0) \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{-x} \right) = +\infty$$

$$\text{αρα } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

γ. Πλυντος ριζων ως εξ. $1 + \frac{2}{x} = \Delta e^x$ $2 \in \mathbb{R}$

Είναι $1 + \frac{2}{x} = \Delta e^x \Leftrightarrow (1 + \frac{2}{x})e^{-x} = \Delta \in$

$f(x) = \Delta$

Αν $\Delta < 0$ η εξ. $f(x) = \Delta$ έχει 1 ρίζα

Αν $\Delta > 0$ η εξ. $f(x) = \Delta$ έχει 2 ρίζες.

Αν $\Delta = 0$ η εξ. $f(x) = 0$ έχει 1 ρίζα $x = -2$

δ. Ν.δ.ο. η εξ. $f(x) = 2x$ 1 ακριβώς ρίζα στο $(0, 1)$

Εχουμε $f(x) - 2x = 0$

Θεωρώ $g(x) = f(x) - 2x = (1 + \frac{2}{x})e^{-x} - 2x \quad x \neq 0$

• $g(1) = 3e^{-1} - 2 = \frac{3}{e} - 2 = \frac{3-2e}{e} < 0$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((1 + \frac{2}{x})e^{-x} - 2x) = +\infty$ } $g(1) \cdot g(k) < 0$

αρα υπάρχει $k > 0$ τ.ω $g(k) > 0$

• Η g συνεχώς στο $[k, 1]$ ως ηράξεις συνεχών

αρα από θεωρήμα Βολταγιο η εξίσωση

$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2x$ έχει 1 μοναχιστον ρίζα
στο $(k, 1) \subseteq (0, 1)$

Είναι $g'(x) = -e^{-x} \frac{(x+1)^2 + 1}{x^2} - 2 < 0$

αρα η g $\searrow$ οηοτε η εξίσωση
 $g(x) = 0$ έχει 1 μοναχ ρίζα.

Αρα η $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2x$ έχει ακριβώς
1 ρίζα στο $(0, 1)$

Ε. Να βρεθεί ως ασυμπτωτική.

$$f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{-x} \quad \text{Α}f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

Κατακορυφή

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{-x} \right] = +\infty$$

αρα η $x=0$ κατακορυφή ασυμπτωτική

Ορίζουσα στο $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{-x} \right] = 0.$$

αρα η $y=0$ ορίζουσα ασυμπτωτική στο $+\infty$.

Πλάγια στο $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{-x}}{x} \stackrel{\text{D'H}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x} \cdot (x+1)^2 + 1}{1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [-e^{-x} \cdot (x+1)^2 + 1] = -(+\infty) \cdot (+\infty) + 1 = -\infty$$

αρα η Cf δεν έχει πλάγια ασυμπτωτική στο $-\infty$

και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ δεν έχει ούτε ορίζουσα ασυμπτωτική στο $-\infty$.

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right)$$

α. Αν $f=g$?

$\Gamma = ?$ ώστε $f=g$.

$$A_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$A_g: \begin{matrix} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1. \end{matrix}$$

$$\text{οηοτε } A_g = [0, 1) \cup (1, +\infty).$$

οηοτε $f \neq g$ αφού $A_f \neq A_g$.

Για $x \in \Gamma = [0, 1) \cup (1, +\infty)$ είναι

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x+2\sqrt{x}+1+x-2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) = \frac{1}{2} \frac{2x+2}{x-1} = \frac{2(x+1)}{2(x-1)} = \frac{x+1}{x-1} = f(x). \end{aligned}$$

β. Μονοτονία της f και Συνολο Τιμών

Η f παρ/μη στο A_f με

$$f'(x) = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0.$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\parallel$	$\searrow$

$$A_1 = (-\infty, 1) \quad A_2 = (1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[(x+1) \frac{1}{x-1} \right] = 2 \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x+1) \frac{1}{x-1} \right] = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$f(A_1) = f((-\infty, 1)) \stackrel{f \downarrow}{\text{συνεχώς}} \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (2540351, 1)$$

$$f(A_2) = f((1, +\infty)) \stackrel{f \downarrow}{\text{συνεχώς}} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (1, +\infty)$$

οηοζε

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

8. N.S.o. f 1-1 και $f^{-1} = ?$

H $f \downarrow$ στο $(-\infty, 1)$ αρα 1-1

H $f \downarrow$ στο $(1, +\infty)$ αρα 1-1

και $f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset$ αρα η f 1-1 οηοζε αντιστρέφει.

Για $x \neq 1$ και $y \neq 1$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x+1 = yx-y \Leftrightarrow yx-x = y+1 \Leftrightarrow$$

$$(y-1)x = y+1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \quad y \neq 1$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \\ x = \frac{y+1}{y-1} \quad y \neq 1 \end{array} \right\} f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1} \quad y \neq 1$$

$$\text{επομεως } f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad x \neq 1.$$

8. N.S.o. η ευθεια $y = -2x - 1$ εφαρτεται με τη C_f .

Εστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημειο επαφης

$$\left. \begin{array}{l} \text{Πρεπει } f(x_0) = -2x_0 - 1 \\ \text{και } f'(x_0) = -2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{x_0+1}{x_0-1} = -2x_0 - 1 \\ \frac{-2}{(x_0-1)^2} = -2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{x_0+1}{x_0-1} = -2x_0 - 1 \\ (x_0-1)^2 = 1 \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$x_0^2 - 2x_0 + 1 = 1 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0(x_0 - 2) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ η } x_0 = 2$$

Για $x_0 = 0$ η (1) γινεται $-1 = -1$ ισχυει

Για $x_0 = 2$ η (1) γινεται $3 = -3$ αδυνατω

αρα η $y = -2x - 1$ εφαρτεται με τη C_f στο σημειο

$$M(0, f(0)) \text{ η } M(0, -1)$$

Ε. Η εφαπτομένη (Ε) της Cf στο $M(\alpha, f(\alpha))$ εφάπτεται
ως ευθείες $y=1$, $x=1$ στα A και B.

N.S.O. $MA=MB$ και (NAB) σταθερό $N(1,1)$.

Η εφαπτομένη (Ε) της Cf στο $M(\alpha, f(\alpha))$ είναι
 $\alpha \neq 1$

Ε: $y-f(\alpha) = f'(\alpha) \cdot (x-\alpha)$

$$y - \frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{-2}{(\alpha-1)^2} (x-\alpha)$$

Ε και $y=1$. $1 - \frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{-2}{(\alpha-1)^2} (x-\alpha) \Leftrightarrow$

$$\frac{\alpha-1-\alpha-1}{\alpha-1} = \frac{-2}{(\alpha-1)^2} (x-\alpha) \Leftrightarrow \frac{-2}{\alpha-1} = \frac{-2}{(\alpha-1)^2} (x-\alpha) \Leftrightarrow$$

$\alpha-1 = x-\alpha \Leftrightarrow x = 2\alpha-1$ άρα $A(2\alpha-1, 1)$

Ε και $x=1$ $y - \frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{-2}{(\alpha-1)^2} (1-\alpha) \Leftrightarrow y - \frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{+2}{(\alpha-1)^2} (\alpha-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{2}{\alpha-1} + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \Leftrightarrow y = \frac{2+\alpha+1}{\alpha-1} \Leftrightarrow y = \frac{\alpha+3}{\alpha-1}$ άρα $B(1, \frac{\alpha+3}{\alpha-1})$.

οηοτε $M(\alpha, \frac{\alpha+1}{\alpha-1})$ $A(2\alpha-1, 1)$ $B(1, \frac{\alpha+3}{\alpha-1})$

$$MA = \sqrt{(2\alpha-1-\alpha)^2 + (1 - \frac{\alpha+1}{\alpha-1})^2} = \sqrt{(\alpha-1)^2 + (\frac{\alpha-1-\alpha-1}{\alpha-1})^2} = \sqrt{(\alpha-1)^2 + (\frac{-2}{\alpha-1})^2} =$$
$$= \sqrt{(\alpha-1)^2 + \frac{4}{(\alpha-1)^2}}$$

$$MB = \sqrt{(1-\alpha)^2 + (\frac{\alpha+3}{\alpha-1} - \frac{\alpha+1}{\alpha-1})^2} = \sqrt{(\alpha-1)^2 + (\frac{\alpha+3-\alpha-1}{\alpha-1})^2} = \sqrt{(\alpha-1)^2 + (\frac{2}{\alpha-1})^2} =$$
$$= \sqrt{(\alpha-1)^2 + \frac{4}{(\alpha-1)^2}}$$

άρα $MA=MB$

$$N(1, 1) \quad A(2\alpha-1, 1) \quad B\left(1, \frac{\alpha+3}{\alpha-1}\right)$$

$$\vec{NA} = (2\alpha-2, 0) \quad \vec{NB} = \left(0, \frac{\alpha+3}{\alpha-1} - 1\right) = \left(0, \frac{\alpha+3-\alpha+1}{\alpha-1}\right) =$$

$$\left(0, \frac{4}{\alpha-1}\right)$$

οηοζε το εμβαδο του τριγωνου NAB ειναι

$$(NAB) = \frac{1}{2} |\det(\vec{NA}, \vec{NB})| =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2\alpha-2 & 0 \\ 0 & \frac{4}{\alpha-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| (2\alpha-2) \frac{4}{\alpha-1} \right| =$$

$$\frac{1}{2} \left| 2(\alpha-1) \frac{4}{\alpha-1} \right| = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \quad \text{σταθερο}$$

$f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ παράγου $f(0) = -2$ $f(2) = 4$ $f(x) \neq 1$
και $f'(x) = -\frac{1}{3}(f(x)-1)^2 \quad \forall x \neq 1$

α. Ν.δ.ο. η $g(x) = \frac{1}{f(x)-1} - \frac{x}{3} \quad x \neq 1$ σταθερή

Για $\forall x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ έχουμε

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x)-1)^2} - \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3}(f(x)-1)^2}{(f(x)-1)^2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

αρα η g σταθερή

β. Ν.δ.ο. $f(x) = \frac{x+2}{x-1} \quad x \neq 1$

Επειδή η g σταθερή συνάρτηση ισχύει $g'(x) = 0$
οπότε είναι $g(x) = \begin{cases} c_1 & \text{αν } x < 1 \\ c_2 & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

Για $x < 1$ $g(x) = c_1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)-1} - \frac{x}{3} = c_1$

οπότε για $x=0$ $\frac{1}{f(0)-1} - \frac{0}{3} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{f(0)-1} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow f(0)-1 = -3 \Leftrightarrow f(0) = -2$
για $x=2$ $\frac{1}{f(2)-1} - \frac{2}{3} = c_1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(2)-1} = \frac{2}{3} + c_1$

για $x=2$ $\frac{1}{f(2)-1} - \frac{2}{3} = c_2 \Leftrightarrow \frac{1}{f(2)-1} = \frac{2}{3} + c_2$
 $c_2 = -\frac{1}{3}$

οπότε $\frac{1}{f(x)-1} - \frac{x}{3} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)-1} = \frac{x-1}{3} \Leftrightarrow$

$f(x)-1 = \frac{3}{x-1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

αρα $f(x) = \frac{x+2}{x-1} \quad x \neq 1$

γ. Μονοτονία, κοίτα, Συνοδο αμω

Η f παρ/μη για $x \neq 1$ με

$$f'(x) = \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0 \quad \text{αρα } f \downarrow$$

$$f''(x) = \frac{6(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{6}{(x-1)^3}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$			

Η $f \downarrow$ στο $(-\infty, 1)$ και στο $(1, +\infty)$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left((x+2) \frac{1}{x-1} \right) = 3 \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left((x+2) \frac{1}{x-1} \right) = 3 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

οηοζε $f((-\infty, 1)) \overset{\text{συνέχεια}}{\overset{f \downarrow}{\rightarrow}} \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, 1)$

$f((1, +\infty)) \overset{\text{συνέχεια}}{\overset{f \downarrow}{\rightarrow}} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (1, +\infty)$

αρα $f(A) = f((-\infty, 1)) \cup f((1, +\infty)) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

δ. Η f ∇ στο $(-\infty, 1)$ αρα 1-1
 Η f ∇ στο $(1, +\infty)$ αρα 1-1.

και επειδή $f((-\infty, 1) \cap (1, +\infty)) = \emptyset$

Η f 1-1 αρα αντιστρέφεται.

Για $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ και $y \in \mathbb{R} - \{1\}$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1} = y \Leftrightarrow x+2 = yx - y \Leftrightarrow yx - x = y+2 \Leftrightarrow$$

$$x(y-1) = y+2 \Leftrightarrow x = \frac{y+2}{y-1} \quad y \neq 1$$

$$\text{οηοτε } \left. \begin{array}{l} f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \\ x = \frac{y+2}{y-1} \quad y \neq 1 \end{array} \right\} f^{-1}(y) = \frac{y+2}{y-1} \quad y \neq 1$$

$$\text{Επομεως } f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-1} \quad x \neq 1.$$

$$\text{ε. } f \circ h = ? \quad h(x) = x - \ln x \quad x > 0.$$

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1} \quad x \neq 1$$

$$A_{f \circ h} = \{x \in A_h \mid h(x) \in A_f\} = (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ x - \ln x \neq 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ \ln x - x + 1 \neq 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq 1 \end{array} \right\} x > 0$$

$$\ln x \leq x-1 \quad \forall x > 0 \\ \text{με το " = " για } x=1$$

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(x - \ln x) =$$

$$= \frac{x - \ln x + 2}{x - \ln x - 1} \quad x \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

82. $f(x) = \frac{x+2}{x-1} \quad x \neq 1.$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left((x+2) \frac{1}{x-1} \right) = 3 \cdot (+\infty) = +\infty$$

άρα η $x=1$ κατακόρυφη ασυμπτωτή

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left((x+2) \frac{1}{x-1} \right) = 3 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

ορίζεται

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

άρα η $y=1$ ορίζεται στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

άρα η $y=1$ ορίζεται στο $-\infty$

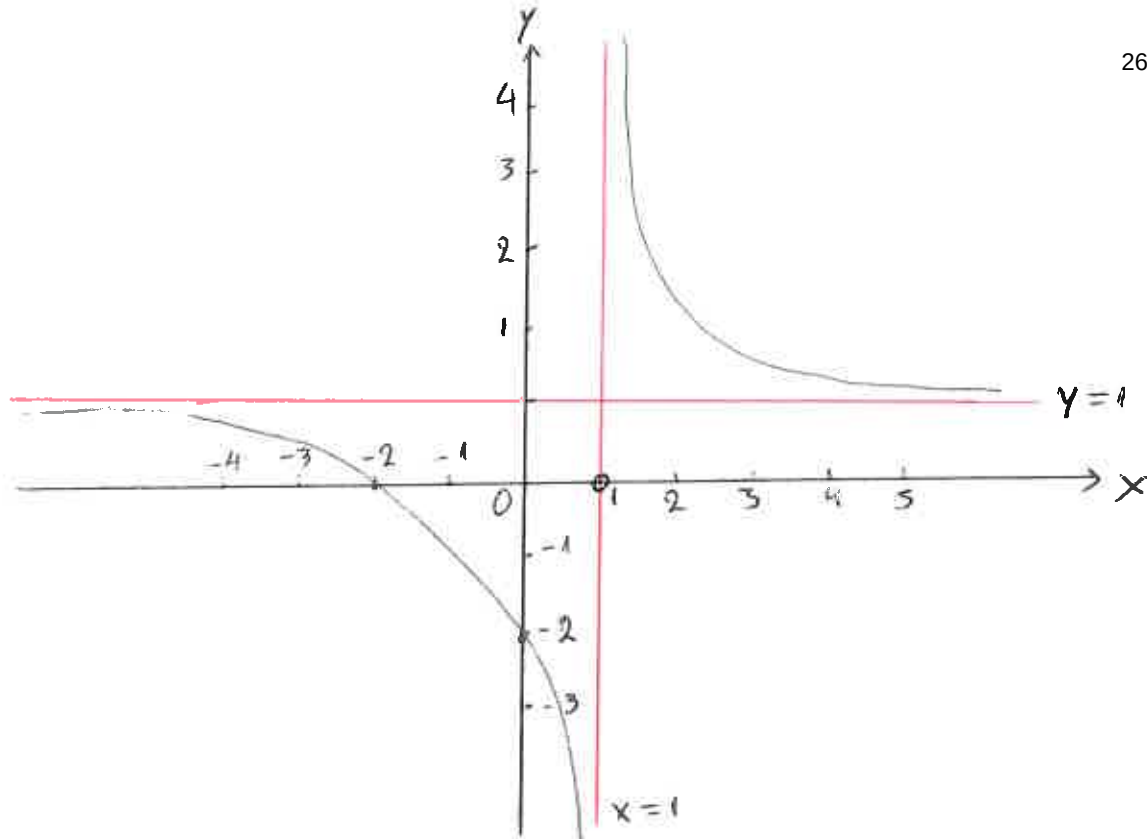
Σημεία τομής με τους άξονες.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \quad (-2, 0) \quad x'x$$

$$f(0) = -2 \quad (0, -2) \quad y'y.$$

Πίνακας Μεταβολών

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	—	+	
$f'(x)$	—	—	
$f(x)$	$\perp$	$\begin{matrix} -\infty \\ +\infty \end{matrix}$	$\perp$



$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

α) Ν.Σ.ο η f συνεχής, όχι όμως παράγουσα 0.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x}) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \left. \begin{aligned} f(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{αρα η } f \text{ συνεχής στο } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

αρα η f δεν είναι παράγουσα 0.

β) Μονοτονία - Συνοδος τιμών

Για $x < 0$	$f'(x) = -2x$	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td colspan="2">0</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td>+</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>↗</td> <td>↗</td> </tr> </table>	x	0		$f'(x)$	+	+	$f(x)$	↗	↗
x	0										
$f'(x)$	+	+									
$f(x)$	↗	↗									
Για $x > 0$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$										

$$A_1 = (-\infty, 0) \quad A_2 = [0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$f(A_1) \overset{\text{συνεχής}}{\uparrow} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) = (-\infty, 0)$$

$$f(A_2) \overset{\text{συνεχής}}{\uparrow} \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

$$\text{οηότες } f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

$\gamma > 1$ f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1} 263/351

$H \neq \emptyset$ άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται.

$$f(A_1) = f((-\infty, 0)) \stackrel{f \uparrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) = (-\infty, 0)$$

$$f(A_2) = f([0, +\infty)) \stackrel{f \uparrow}{=} \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty).$$

Για $x < 0$ και $y < 0$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow -x^2 = y \Leftrightarrow x^2 = -y \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-y} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{-y} \Leftrightarrow$$

$$-x = \sqrt{-y} \Leftrightarrow x = -\sqrt{-y} \quad y < 0.$$

$$\text{άρα } f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f^{-1}(y) = -\sqrt{-y} \quad y < 0$$

$$\text{οηοτε } f^{-1}(x) = -\sqrt{-x} \quad x < 0.$$

Για $x \geq 0$ και $y \geq 0$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2 \quad y \geq 0.$$

$$\text{άρα } f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f^{-1}(y) = y^2 \quad y \geq 0$$

$$\text{οηοτε } f^{-1}(x) = x^2 \quad x \geq 0.$$

$$\text{Επομένως } f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4}{1+e^{2-x}}$$

α. Μονοτονία, κοίλα, σφαιρα καμπύς της f.

$A_f = \mathbb{R}$ η f οαρίμα με

$$f'(x) = -\frac{4 \cdot (-e^{2-x})}{(1+e^{2-x})^2} = \frac{4e^{2-x}}{(1+e^{2-x})^2} > 0 \quad \text{αρα η f } \nearrow \text{ στο } \mathbb{R}.$$

$$f''(x) = \frac{-4e^{2-x}(1+e^{2-x})^2 - 4e^{2-x} \cdot 2 \cdot (1+e^{2-x}) \cdot (-e^{2-x})}{(1+e^{2-x})^4} =$$

$$= \frac{4e^{2-x}(1+e^{2-x}) \cdot [-(1+e^{2-x}) + 2e^{2-x}]}{(1+e^{2-x})^4} =$$

$$= \frac{4e^{2-x} \cdot (-1 - e^{2-x} + 2e^{2-x})}{(1+e^{2-x})^3} = \frac{4e^{2-x} \cdot (e^{2-x} - 1)}{(1+e^{2-x})^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2-x} = 1 \Leftrightarrow e^{2-x} = e^0 \Leftrightarrow 2-x = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-f''(x)$	+	0	-
f(x)	$\cup$	2.κ	$\cap$

(2, 2)

$$e^{2-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2-x} > e^0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

β. Συνολο τιμών και ασυμπτωτες.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{1+e^{2-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 \frac{1}{1+e^{2-x}} \right) = 4 \cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2-x} \xrightarrow[2-x=y]{y \rightarrow +\infty} \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1+e^{2-x}} = \frac{4}{1+0} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2-x} \xrightarrow{2-x=u} \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

Οηοτε $f(\mathbb{R}) \xrightarrow{\uparrow} \text{συνεχής} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, 4)$.

Ασυνήτωςες

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακορυφές

Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{αρα η } y=0 \text{ ορίζεται στο } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4 \quad \text{αρα η } y=4 \text{ ορίζεται στο } +\infty.$$

γ. $f^{-1} = ?$

Η f είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ αρα 1-1 αρα αντιστρέφεται

Για $x \in \mathbb{R}$ και $y \in (0, 4)$ έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{4}{1+e^{2-x}} = y \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1+e^{2-x}}{4} \Leftrightarrow 1+e^{2-x} = \frac{4}{y} \Leftrightarrow$$

$$e^{2-x} = \frac{4}{y} - 1 \Leftrightarrow e^{2-x} = \frac{4-y}{y} \Leftrightarrow 2-x = \ln \frac{4-y}{y} \Leftrightarrow$$

$$x = 2 - \ln \frac{4-y}{y} \quad y \in (0, 4)$$

$$\text{Είναι } \left. \begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \\ x &= 2 - \ln \frac{4-y}{y} \quad y \in (0, 4) \end{aligned} \right\} f^{-1}(y) = 2 - \ln \frac{4-y}{y} \quad y \in (0, 4)$$

Οηοτε $f^{-1}(x) = 2 - \ln \frac{4-x}{x} \quad x \in (0, 4)$

$$g(x) = \ln x + ax$$

$$h(x) = e^{1-x} - bx^2$$

$$f = g - h$$

20 1 01 Cg, Ch κοινά εφαπτομένη

α. Ν.δ.ο. $\alpha = 4$ $b = -3$.

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \alpha$$

$$h'(x) = -e^{1-x} - 2bx$$

κοινά εφαπτομένη άρα

$$\begin{cases} g(1) = h(1) \\ g'(1) = h'(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ 1 + a = -1 - 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - b \\ 2 - b = -1 - 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ b = -3 \end{cases}$$

β. $g(x) = \ln x + 4x$ $x > 0$ $h(x) = e^{1-x} + 3x^2$ $x \in \mathbb{R}$.

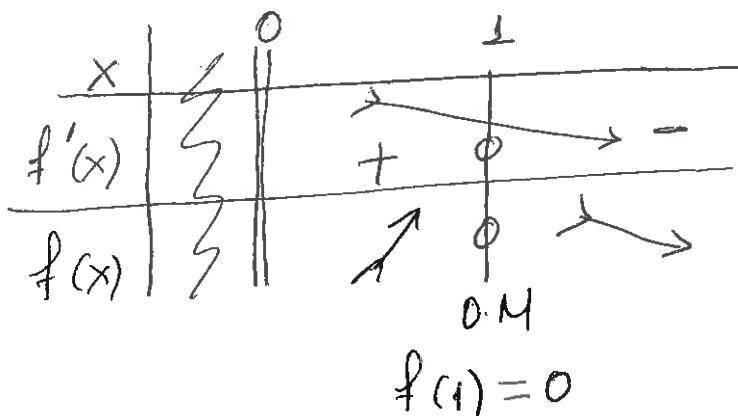
$$f = g - h \quad A_f = A_g \cap A_h = (0, +\infty)$$

$$f(x) = g(x) - h(x) = \ln x + 4x - e^{1-x} - 3x^2 \quad x > 0.$$

Μονοτονία. - Ακρότατα

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 4 - e^{1-x} - 6x \quad \text{παράγωγο} \quad f'(1) = 0$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - e^{1-x} - 6 < 0 \quad \text{άρα η } f' \downarrow \text{ οηότες η } x=1 \text{ μοναδική ρίζα της } f'(x)=0$$



$$\begin{aligned} x < 1 & \quad f' \downarrow \\ f'(x) & > f'(1) \\ f'(x) & > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x > 1 & \quad f' \downarrow \\ f'(x) & < f'(1) \\ f'(x) & < 0 \end{aligned}$$

Κυρτότητα - Συμεια καμπύς.

267/351

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - e^{1-x} - 6 < 0$ άρα η f κοίλη στο $\mathbb{R}$
και δεν έχει σημεια καμπύς.

γ. Προσέμο ως f .

Για $0 < x < 1$ $f \nearrow$

$$f(x) < f(1)$$

$$f(x) < 0$$

Για $x > 1$ $f \searrow$

$$f(x) < f(1)$$

η) η f παρουσιάζει δικό βεχιστω άρα $f(x) < 0$.
Συνολο σημων ως f . $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$
μ ε το " " για $x=1$

$$A_1 = (0, 1] \quad A_2 = [1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + 4x - e^{1-x} - 3x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + 4x - e^{1-x} - 3x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{4}{x} - \frac{e^{1-x}}{x^2} - 3 \right) \right] = +\infty(-3) = -\infty.$$

$$\text{άρα, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{1-x}}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{1-x} \cdot \frac{1}{x^2} \right) = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} \stackrel{1-x=y}{y \rightarrow -\infty} \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0.$$

$$\text{Οηποτε } f(A_1) \stackrel{f \nearrow}{=} (\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1)] = (-\infty, 0]$$

$$f(A_2) \stackrel{f \searrow}{=} (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1)] = (-\infty, 0].$$

$$\text{άρα } f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 0].$$

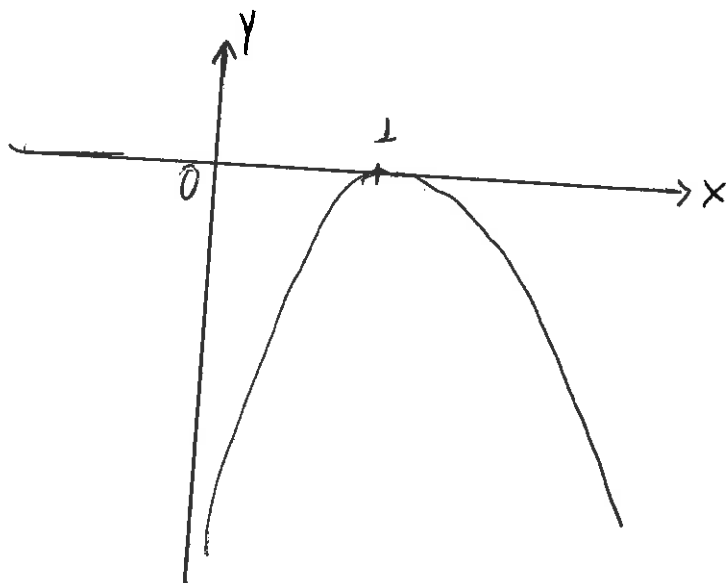
Χαραξίς της f .

268/351

Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	$\searrow$	$-$	$-$	
$f'(x)$	$\searrow$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$			

O.M.
(1, 0)



δ. Ν.δ.ο. ορίζεται η g^{-1}

$$g(x) = \ln x + 4x \quad A_g = (0, +\infty)$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 4 > 0 \quad \text{αρα η } g \uparrow \text{ αρα 1-1 οηοτε αντιστρέφεται.}$$

Το πεδίο ορισμού της g^{-1} είναι το
σύνολο τιμών της g

$$\text{Οηοτε } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + 4x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + 4x) = +\infty$$

$$g((0, +\infty)) \stackrel{g \uparrow}{\text{συνεχώς}} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$\text{αρα } A_{g^{-1}} = \mathbb{R}.$$

Να βρεθεί η ανίσωση

269/351

$$g^{-1}(x) > \frac{x}{4} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g \uparrow \text{ οπότε } g(g^{-1}(x)) > g\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$x > \ln \frac{x}{4} + 4 \frac{x}{4}$$

$$x > \ln \frac{x}{4} + x \Leftrightarrow \ln \frac{x}{4} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{4} < 1 \Leftrightarrow x < 4.$$

ε. Ν.δ.ο. η h ένα ακριβώς τ.α. που είναι ολικο
συν δεσφ x_0 με $x_0 \in (0, 1)$.

$$h(x) = e^{1-x} + 3x^2 \quad \text{An} = \mathbb{R}$$

$$h'(x) = -e^{1-x} + 6x$$

$$h''(x) = e^{1-x} + 6 > 0 \quad \text{αρα } h' \uparrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{1-x} + 6x) = -\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} \stackrel{1-x=y}{\underset{y \rightarrow +\infty}{=}} \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{1-x} + 6x) = +\infty$$

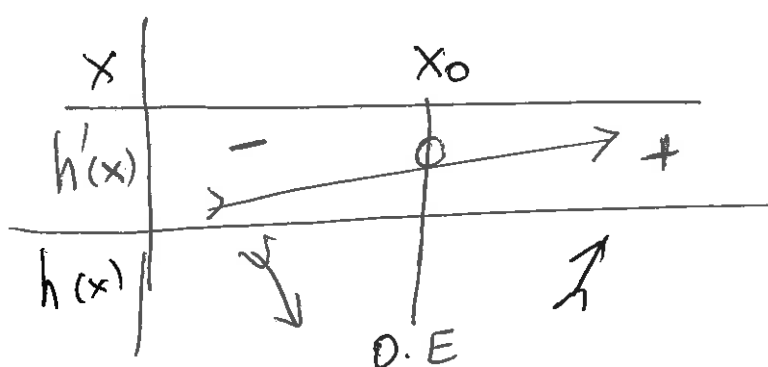
$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} \stackrel{1-x=u}{\underset{u \rightarrow -\infty}{=}} \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

αρα το σύνολο τιμών της h'

$$h'(\mathbb{R}) \stackrel{h' \uparrow}{\underset{\text{συνεχής}}{=}} (\lim_{x \rightarrow -\infty} h'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Επειδή το $0 \in h'(\mathbb{R})$ υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ 270/351w

$h'(x_0) = 0$ και η h' ∇ άρα μοναδικό



$$\begin{array}{ll} x < x_0 & h' \nabla \\ h'(x) < h'(x_0) & h'(x) > h'(x_0) \\ h'(x) < 0 & h'(x) > 0 \end{array}$$

• Η συνεχής στο $[0, 1]$

$$\left. \begin{array}{l} h'(0) = \varepsilon < 0 \\ h'(1) = \delta > 0 \end{array} \right\} h'(0) \cdot h'(1) < 0$$

Σύμφωνα με το θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ π.ω $h'(x_0) = 0$ και η h' ∇ άρα μοναδικό

στ. Ν.Σ.Ο. $f(2) + f(10) < 2f(6)$.

Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα $[2, 6]$ και $[6, 10]$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [2, 6] \\ f \text{ παρ/μη στο } (2, 6) \end{array} \right\} \text{άπο Θ.Μ.Τ υπάρχει } \xi_1 \in (2, 6) \text{ π.ω } f'(\xi_1) = \frac{f(6) - f(2)}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [6, 10] \\ f \text{ παρ/μη στο } (6, 10) \end{array} \right\} \text{άπο Θ.Μ.Τ υπάρχει } \xi_2 \in (6, 10) \text{ π.ω } f'(\xi_2) = \frac{f(10) - f(6)}{4}$$

Όμως η f' $\searrow$ στο $[1, +\infty)$ οηότες

$$\xi_1 < \xi_2 \quad f' \searrow \quad f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$$

$$\frac{f(6) - f(2)}{4} > \frac{f(10) - f(6)}{4} \Leftrightarrow 2f(6) > f(2) + f(10)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{6-x}{x+4}}$$

α. Αφ' ηρενη $\frac{6-x}{x+4} \geq 0$ και $x+4 \neq 0$

$$(6-x)(x+4) \geq 0$$

$$x \neq -4$$

x	$-\infty$	-4	6	$+\infty$
$(6-x)(x+4)$	$-$	0	$+$	$-$

αρα $A = (-4, 6]$

Μονοτονια

$$f'(x) = \frac{\frac{-(x+4) - (6-x)}{(x+4)^2}}{2\sqrt{\frac{6-x}{x+4}}} = \frac{-x-4-6+x}{(x+4)^2 2\sqrt{\frac{6-x}{x+4}}} = \frac{-5}{(x+4)^2 2\sqrt{\frac{6-x}{x+4}}} < 0$$

αρα η f $\searrow$ στο $(-4, 6]$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} \sqrt{\frac{6-x}{x+4}} = +\infty$$

$$f(6) = 0$$

$$f((-4, 6]) \xrightarrow{\text{συνεχ\acute{\alpha}\varsigma}} [f(6), \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x)] = [0, +\infty)$$

Εστω $g(x) = \sqrt{x}$ με $x \geq 0$ και $h(x) = \frac{6-x}{x+4}$ με $x \neq -4$

τοτε $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \sqrt{\frac{6-x}{x+4}} = f(x) \quad x \in (-4, 6]$

6. Αντιστροφή της f ορίζεται και $A_{f^{-1}}$ 272/351

Η f στο $(-4, 6]$ ενομένως 1-1 οηοζε $y \geq 0$
αντιστρέφεται

$$A_{f^{-1}} = f^{-1}((-4, 6]) = [0, +\infty)$$

$$f^{-1}(3) = ?$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{\frac{6-x}{x+4}} = y \Leftrightarrow$$

$$\frac{6-x}{x+4} = y^2 \Leftrightarrow 6-x = y^2(x+4)$$

$$y^2x + x = 6 - 4y^2 \Leftrightarrow x = \frac{6-4y^2}{y^2+1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{6-4x^2}{x^2+1}$$

$$\text{Εστω } f^{-1}(3) = \kappa \text{ τοτε } f(f^{-1}(3)) = f(\kappa) \Leftrightarrow$$

$$f(\kappa) = 3 \Leftrightarrow f(\kappa) = f(-3) \xLeftrightarrow \kappa = -3$$

$$\text{οηοζε } f^{-1}(3) = -3$$

8. Σε ποια διαστήματα η $C_{f^{-1}}$ πάνω από των $y=x$

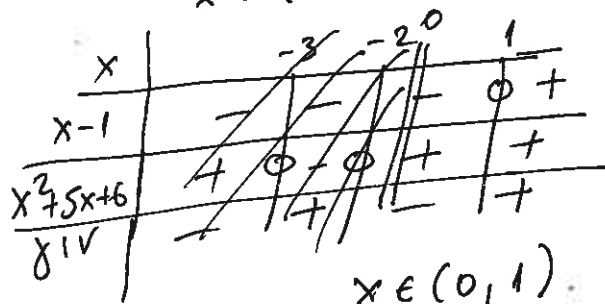
$$\text{Είναι } f^{-1}(x) > x$$

$$\frac{6-4x^2}{x^2+1} > x \Leftrightarrow 6-4x^2 > x^3+x \Leftrightarrow x^3+4x^2+x-6 < 0$$

$$(x-1)(x^2+5x+6) < 0$$

$$x=1 \quad x=-2 \text{ ή } x=-3$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -6 \\ & 1 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$



8. Στην f^{-1} αντιστοιχεί το διαγράμμα (A)

$$\text{αφου το } A_{f^{-1}} = [0, +\infty)$$

Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ τέμνονται στο σημείο $(1, 1)$

$$f(x) = a(e^x - x) - (x+1) \ln(x+1) + x \quad a \in \mathbb{R}$$

γνησίως μονότονη

α. Ν.δ.ο. $\alpha = 1$

$$f'(x) = a(e^x - 1) - \ln(x+1) - (x+1) \frac{1}{x+1} + 1 =$$

$$= a(e^x - 1) - \ln(x+1)$$

$$f''(x) = a e^x - \frac{1}{x+1}$$

Αν η f γνησίως αύξουσα τότε $f'(x) \geq 0$
 όπως $f'(0) = 0$

οδηγεί $f'(x) \geq f'(0)$ για $x > -1$

από δ. Fermat $f''(0) = 0 \Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

οδηγεί $f(x) = e^x - x - (x+1) \ln(x+1) + x \quad x > -1$

$$f(x) = e^x - (x+1) \ln(x+1)$$

β. $f'(x) = e^x - 1 - \ln(x+1) - 1 + 1 = e^x - 1 - \ln(x+1)$

παρατηρώ ότι $f'(0) = 0$

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$$

παρατηρώ ότι $f''(0) = 0$

$$f'''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \quad \text{αρα } f'' \uparrow$$

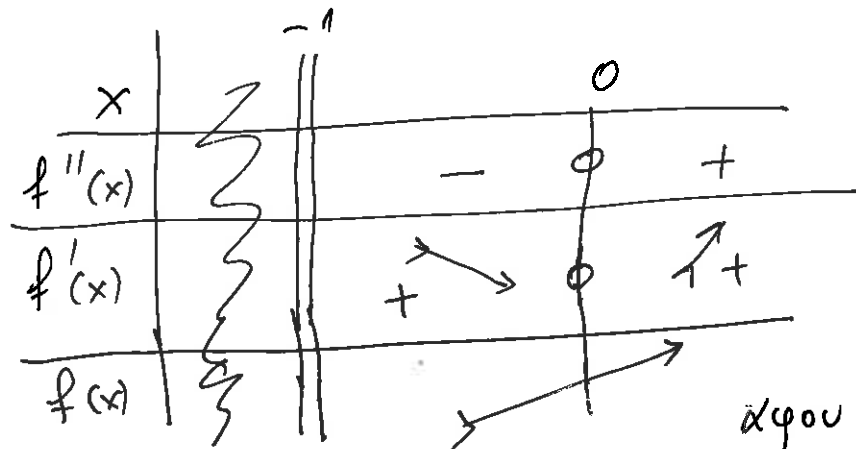
$-1 < x < 0$ $x > 0$ $f'' \uparrow$

$$f''(x) < f''(0)$$

$$f''(x) > f''(0)$$

$$f''(x) < 0$$

$$f''(x) > 0$$



$$\begin{array}{ll}
 x < 0 & f' \downarrow \\
 f'(x) > f'(0) & f'(x) > f'(0) \\
 f'(x) > 0 & f'(x) > 0
 \end{array}$$

αφού η f συνεχής στο 0.

γ. Να δοθεί η $\varepsilon\}$ $f(x) = 1$.
Είναι $f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = f(0) \Leftrightarrow x = 0$ μοναδικά

Ν.δ.ο. υπάρχει μοναδικό $\gamma \in (0, 1)$ τ.ω $f(\gamma) = 2 - 2\gamma$

$$\text{Είναι } f(x) = 2 - 2x \Leftrightarrow f(x) - 2 + 2x = 0$$

$$\text{Θεωρώ } g(x) = f(x) + 2x - 2$$

• g συνεχής στο $[0, 1]$

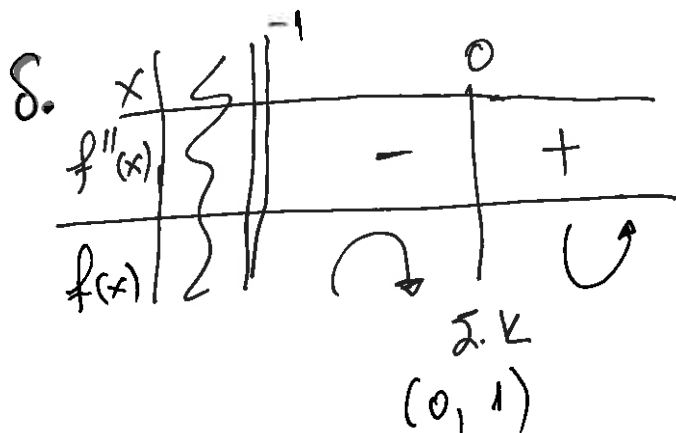
$$g(0) = f(0) - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$g(1) = f(1) = e - 2 \ln 2 = \ln e^e - \ln 4 = \ln \frac{e^e}{4} > 0 \quad \text{αφού } \frac{e^e}{4} > 1$$

αφά $g(0)g(1) < 0$ οηότες από θ. Βολτανο
υηαρχει 1 του $\gamma \in (0, 1)$ τ.ω $g(\gamma) = 0 \Leftrightarrow$

$$f(\gamma) = 2 - 2\gamma \text{ και η } g \uparrow \text{ αφά μοναδικό}$$

$$\text{Είναι η } f \uparrow \text{ και η } y = 2x - 2 \uparrow \text{ αφά η } g \uparrow$$



Κατακόρυφη ασυμπτωτική

275/351

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (e^x - (x+1) \ln(x+1)) = e^{-1} - 0 = \frac{1}{e}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} [\ln(x+1) \cdot (x+1)] &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{x+1}} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-(x+1)^2}{x+1} = 0 \end{aligned}$$

άρα δεν έχει κατακόρυφη ασυμπτωτική

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - (x+1) \ln(x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \cdot \left(1 - \frac{(x+1) \ln(x+1)}{e^x} \right) \right] \\ &= (+\infty) \cdot (1 - 0) = +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) \ln(x+1)}{e^x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1) + 1}{e^x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)e^x} = 0$$

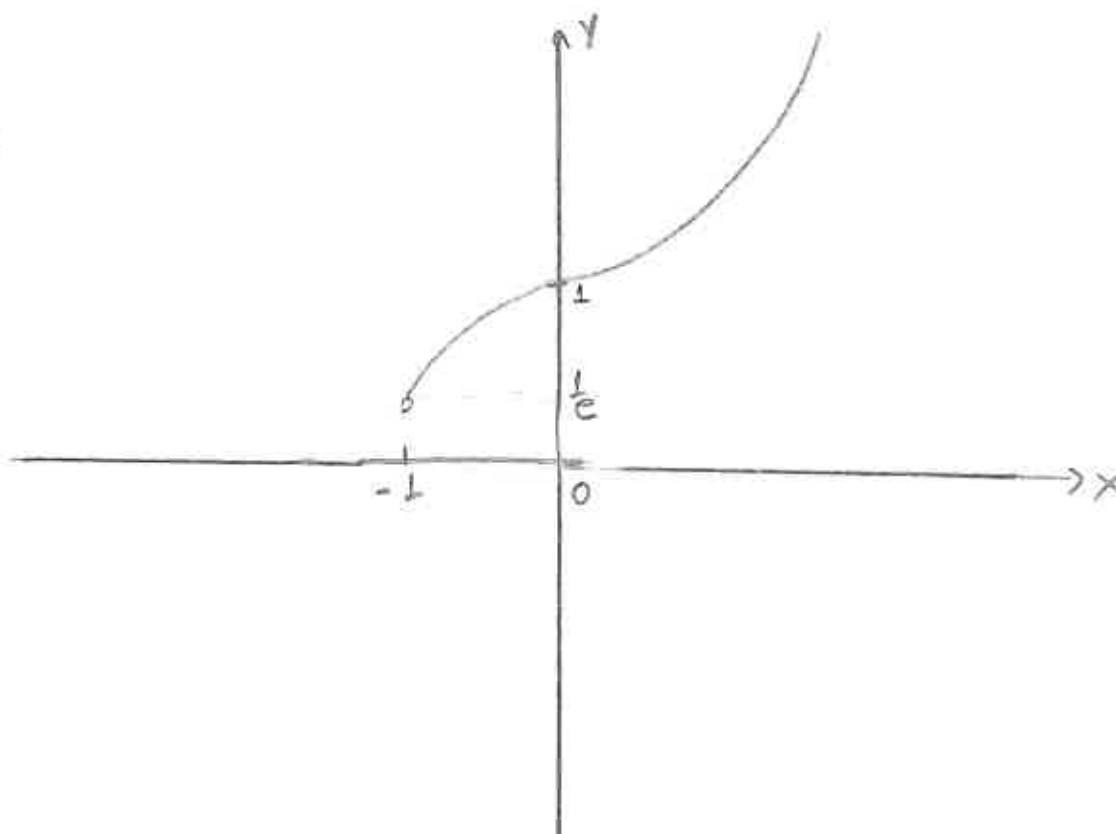
άρα δεν έχει οριζόντια ασυμπτωτική

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - (x+1) \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \cdot \left(1 - \frac{(x+1) \ln(x+1)}{e^x} \right)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \cdot \left(1 - \frac{(x+1) \ln(x+1)}{e^x} \right) = (+\infty) \cdot (1 - 0) = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{άρα} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

άρα δεν έχει ηλιαχτιά ασυμπτωτική

x	-1	0
f''(x)	-	+
f'(x)	+	+
f(x)		



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παρα/μν $f(0)=1$ και

$$2x f(x) = (x^2+1)(f(x) - f'(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

α. Ν.Σ.ο. $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$

Είναι $2x f(x) = (x^2+1)f(x) - (x^2+1)f'(x)$

$$(x^2+1)f'(x) + 2x f(x) = (x^2+1)f(x)$$

$$[(x^2+1)f(x)]' = (x^2+1)f(x)$$

Θεωρώ $g(x) = (x^2+1)f(x)$

οηοζε $g'(x) = g(x) \Rightarrow g(x) = c e^x$

ομως $f(0)=1$ οηοζε $g(0)=c$
 $(0+1)f(0) = c \Leftrightarrow c=1$

αρα $g(x) = e^x$

$$(x^2+1)f(x) = e^x$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

β. Μονοτονία της f

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (x^2+1) - 2x e^x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x \cdot (x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)^2 \cdot e^x}{(x^2+1)^2} > 0$$

αρα η f $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$. για καθε $x \neq 1$.

Ν.δ.ο. η C_f έχει ακριβώς μία οριζόντια εφαπτομένη.

278/351

Πρέπει να δείξω ότι η ε $\int$ $f'(x)=0$ έχει μοναδική λύση

Πράγματι $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2 e^x}{(x^2+1)} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x=1$

άρα η C_f δεχεται μοναδική οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο $(1, f(1))$ με εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow$$

$$y - \frac{e}{2} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{e}{2}$$

δ. Συνοδος τιμών της f

$$A_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \cdot \frac{1}{x^2+1} \right) = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
οδηγεί

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

Πλινθος ριζών της ε $\int$. $e^x = 2020(x^2+1)$

$$\frac{e^x}{x^2+1} = 2020 \Leftrightarrow f(x) = 2020$$

$2020 \in f(\mathbb{R})$ άρα υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f(x_1) = 2020$

και η f $\uparrow$ άρα το x_1 μοναδικό

δ. Να βρεθεί η εξίσωση

$$e^{x-x^2} (x^4+1) = x^2+1.$$

Η εξίσωση
ορίζεται στο $\mathbb{R}$

$$e^x \cdot e^{-x^2} \cdot (x^4+1) = x^2+1$$

$$\frac{e^x}{x^2+1} = \frac{e^{x^2}}{x^4+1} \Leftrightarrow f(x) = f(x^2) \xrightarrow{f \neq 1-1}$$

$$x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x=0 \text{ ή } x=1$$

ε. $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x f^2(x)}{\sqrt{f^2(x)+1} - 1}$

δετω $f(x) = w$ $w_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

οπότε $A = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w f^2 w}{\sqrt{w^2+1} - 1} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w f^2 w \cdot (\sqrt{w^2+1} + 1)}{(\sqrt{w^2+1} - 1)(\sqrt{w^2+1} + 1)} =$

$$= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w f^2 w (\sqrt{w^2+1} + 1)}{w^2 + 1 - 1} = \lim_{w \rightarrow 0} \left(\frac{w f w}{w} \right)^2 \cdot (\sqrt{w^2+1} + 1) =$$

$$= 1^2 \cdot (\sqrt{0+1} + 1) = 2$$

$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(x^2) = x e^{x^2} \quad \forall x \geq 0$$

α. Ν.Σ.Ο. η f δεν παραγωγίζεται στο $x=0$

Είναι για $x=0$ $f(0)=0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \stackrel{x=w^2}{w \rightarrow 0} \lim_{w \rightarrow 0^+} \frac{f(w^2)}{w^2} = \\ &= \lim_{w \rightarrow 0^+} \frac{w \cdot e^{w^2}}{w^2} = \lim_{w \rightarrow 0^+} \frac{e^{w^2}}{w} = \lim_{w \rightarrow 0^+} \left(e^{w^2} \cdot \frac{1}{w} \right) = 1 \cdot (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

άρα η f δεν παραγωγίζεται στο 0

β. Ν.Σ.Ο. $f(x) = \sqrt{x} e^x \quad x \geq 0$

Είναι $f(x^2) = x e^{x^2}$

Θετω $x^2 = u$ οπότε $x = \sqrt{u} \quad u \geq 0$

άρα $f(u) = \sqrt{u} e^u \quad u \geq 0$

επομένως $f(x) = \sqrt{x} e^x \quad x \geq 0$

γ. Μονοτονία-ακρότατα της f

Για $x > 0$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^x + \sqrt{x} e^x > 0$

και η f συνεχής στο $[0, +\infty)$ άρα η

f $\uparrow$ στο $[0, +\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0
το $f(0) = 0$

δ. Συνοβιο τιμών της f

281/351

$$A_f = [0, +\infty)$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} e^x) = +\infty$$

Η f συνεχής και $\uparrow$ στο $[0, +\infty)$ άρα

$$f(A) = f([0, +\infty)) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, +\infty)$$

Πλινθος ριζών της $εξ.$ $e^x = \frac{2020}{\sqrt{x}}$

$$\text{Είναι } e^x \cdot \sqrt{x} = 2020 \Rightarrow f(x) = 2020$$

$2020 \in [0, +\infty)$ άρα υπάρχει $x_1 \in (0, +\infty)$ τ.ω

$f(x_1) = 2020$ και η f $\uparrow$ άρα μοναδική ρίζα.

ε. Να λυθεί η εξίσωση

$$f(x) + f(x^3) = f(x^4) + f(x^2)$$

Η εξίσωση έχει προφανείς ρίζες $x=0$ και $x=1$

αφού για $x=0$ $f(0) + f(0) = f(0) + f(0)$ ισχύει

για $x=1$ $f(1) + f(1) = f(1) + f(1)$ ισχύει

Εστω ότι η εξίσωση έχει και άλλη ρίζα $p \neq 0$ και $p \neq 1$
και ισχύει $f(p) + f(p^3) = f(p^2) + f(p^4)$ (1)
τότε αν $0 < p < 1$ έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} p > p^2 \xrightarrow{f \uparrow} f(p) > f(p^2) \\ p^3 > p^4 \xrightarrow{f \uparrow} f(p^3) > f(p^4) \end{array} \right\} \textcircled{+} f(p) + f(p^3) > f(p^2) + f(p^4)$$

απο το αηο (1)

αν $p > 1$ τότε

$$\left. \begin{array}{l} p < p^2 \xrightarrow{f \uparrow} f(p) < f(p^2) \\ p^3 < p^4 \xrightarrow{f \uparrow} f(p^3) < f(p^4) \end{array} \right\} \textcircled{+} f(p) + f(p^3) < f(p^2) + f(p^4)$$

απο το αηο (1)

άρα η εξίσωση μοναδικές ρίζες $x=0$ και $x=1$

57. Αν $\alpha > 0$ και $f(\alpha^x) \geq f(x^\alpha) \quad \forall x > 0$ 282/351

ν.δ.ο. $\alpha = e$

Είναι $f(\alpha^x) \geq f(x^\alpha) \quad \forall x > 0$ και η $f \uparrow$

αρα $a^x \geq x^\alpha \Rightarrow a^x - x^\alpha \geq 0 \quad \forall x > 0.$

Θεωρώ $f(x) = a^x - x^\alpha$ οηότες $f(x) \geq 0$

παρατηρώ ότι $f(\alpha) = 0$

Επομένως $f(x) \geq f(\alpha)$

- Το α εσωτερικό σημείο α.φου $\alpha > 0$
- Η f παρουσιάζει ακρότατο στο α
- Η f παραγωγίσιμη στο α με $f'(x) = a^x \ln a - \alpha x^{\alpha-1}$

άηο θ. Fermat θα ισχύει

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^\alpha \ln a - \alpha \cdot \alpha^{\alpha-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^\alpha \ln a - \alpha^\alpha = 0 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$$

$$f(x) = e^x - x \quad g(x) = \frac{x^2 + 2}{2} \quad h = f - g$$

α. Μονοτονία - ακρότατα - Συνοδος υψηλ ως f

$$f(x) = e^x - x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = e^x - 1 \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$		$\nearrow$	$\nearrow$

$T.E$
 $f(0) = 1$

$$A_1 = (-\infty, 0] \quad A_2 = [0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x \cdot (1 - \frac{x}{e^x})] \\ &= (+\infty) \cdot (1 - 0) = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{DLH} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$f(A_1) \stackrel{\text{συνεχής}}{\text{f}} [f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [1, +\infty)$$

$$f(A_2) \stackrel{\text{συνεχής}}{\text{f}} [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [1, +\infty)$$

$$f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) = [1, +\infty)$$

Η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(0) = 1$

β. Αν υπάρχουν παράλληλες ευθείες που εφαπτόνται με τη C_f

Η C_f θα έχει παράλληλες εφαπτόμενες αν η εξίσωση $f'(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$ έχει 2 τουλάχιστον λύσεις.

$$\text{Είναι } f'(x) = k \Leftrightarrow f'(x) - k = 0$$

$$\text{Θεωρώ } g(x) = f'(x) - k \quad x \in \mathbb{R}$$

Ε. i) Ν.δ.ο. η εξ. $f(x)=2$ έχει ακριβώς 284/351
μία ρίζα στο $(1, 2)$

Είναι $f(x)=2 \Leftrightarrow f(x)-2=0$

Θεωρώ $k(x)=f(x)-2 \quad x \in [1, 2]$

• k συνεχής στο $[1, 2]$

$$\left. \begin{aligned} k(1) &= f(1)-2 = e^{-1}-2 = e^{-3} < 0 \\ k(2) &= f(2)-2 = e^2-2-2 = e^2-4 > 0 \end{aligned} \right\} k(1) \cdot k(2) < 0$$

οποτε αφοθ. Βολτανο η εξίσωση

$k(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=2$ έχει 1 του] ρίζα
στο $(1, 2)$

οπως $k'(x)=f'(x)=e^x-1 > 0$ στο $[1, 2]$ αρα
η $k \uparrow$ οποτε η ρίζα μοναδική στο $(1, 2)$

ii) Ν.δ.ο. $h(1)+h(5) > 2h(3)$

Για των h ισχυει το Θ.Μ.Τ σε καθενα αφο
τα διαστωψα $[1, 3]$ και $[3, 5]$

αρα

υπαρχει $\xi_1 \in (1, 3)$ τω $h'(\xi_1) = \frac{h(3)-h(1)}{3-1} \Leftrightarrow h'(\xi_1) = \frac{h(3)-h(1)}{2}$

υπαρχει $\xi_2 \in (3, 5)$ τω $h'(\xi_2) = \frac{h(5)-h(3)}{5-3} \Leftrightarrow h'(\xi_2) = \frac{h(5)-h(3)}{2}$

οπως $1 < \xi_1 < \xi_2 < 5$ και η $h' \uparrow$ στο $[0, +\infty)$

αρα $h'(\xi_1) < h'(\xi_2)$

$$\frac{h(3)-h(1)}{2} < \frac{h(5)-h(3)}{2}$$

$$2h(3) < h(5) + h(1)$$

$$f(x) = e^{x-1} - (\lambda+1)x \quad \lambda > -1 \quad x \in \mathbb{R}$$

α. Μονοτονία - ακρότατα ως f

$$f'(x) = e^{x-1} - (\lambda+1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - (\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} = \lambda+1 \xLeftrightarrow[\lambda > -1] \lambda+1 > 0$$

$$x-1 = \ln(\lambda+1) \Leftrightarrow x = 1 + \ln(\lambda+1)$$

x	$-\infty$	$1 + \ln(\lambda+1)$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	0.ε	$\nearrow$

$$\begin{aligned} f(1 + \ln(\lambda+1)) &= \\ e^{1 + \ln(\lambda+1) - 1} - (\lambda+1) \cdot (1 + \ln(\lambda+1)) &= \\ = e^{\ln(\lambda+1)} - (\lambda+1) - (\lambda+1)\ln(\lambda+1) &= \\ = e^{\ln(\lambda+1)} - (\lambda+1) - (\lambda+1)\ln(\lambda+1) &= \\ = (\lambda+1) - (\lambda+1) - (\lambda+1)\ln(\lambda+1) &= \\ = -(\lambda+1)\ln(\lambda+1) \end{aligned}$$

β. Συνολο Τιμών ως f

$$A_1 = (-\infty, 1 + \ln(\lambda+1)] \quad A_2 = [1 + \ln(\lambda+1), +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} - (\lambda+1)x) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-1} - (\lambda+1)x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^{x-1} \left(1 - \frac{(\lambda+1)x}{e^{x-1}} \right) \right] = +\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda+1)x}{e^{x-1}} \xrightarrow[\text{DLH}]{\frac{+\infty}{+\infty}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda+1}{e^{x-1}} = 0$$

Η f συνεχώς οηγούμενη

$$f(A_1) \xrightarrow{f \searrow} [f(1 + \ln(\lambda+1)), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [-(\lambda+1)\ln(\lambda+1), +\infty)$$

$$f(A_2) \xrightarrow{f \nearrow} [f(1 + \ln(\lambda+1)), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [-(\lambda+1)\ln(\lambda+1), +\infty)$$

$$\text{Οηοτε } f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) = [-(\lambda+1)\ln(\lambda+1), +\infty)$$

Να βουδν η εξίσωση

$$e^{x-1} = (\lambda+1)(x - \ln(\lambda+1))$$

$$e^{x-1} = (\lambda+1)x - (\lambda+1)\ln(\lambda+1)$$

$$e^{x-1} - (\lambda+1)x = -(\lambda+1)\ln(\lambda+1)$$

$$f(x) = -(\lambda+1)\ln(\lambda+1) \quad (1)$$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $1 + \ln(\lambda+1)$

$$\text{οηοτε } f(x) \geq f(1 + \ln(\lambda+1))$$

$$f(x) \geq -(\lambda+1)\ln(\lambda+1)$$

ψε των ισότητας να
ισχυει για

$$x = 1 + \ln(\lambda+1)$$

αρα μοναδική λύση

$$\text{η εξίσωση (1) } x = 1 + \ln(\lambda+1)$$

γ. Να βρείτε των μεγαλύτερη τιμή του λ ,

$$\text{ωστε } e^{x-1} \geq (\lambda+1)x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Είναι } e^{x-1} - (\lambda+1)x \geq 0$$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Επειδή $f(x) \geq \min f \quad \forall x \in \mathbb{R}$ αρκει

$$\min f \geq 0 \Leftrightarrow -(\lambda+1)\ln(\lambda+1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$-\ln(\lambda+1) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(\lambda+1) \leq 0 \Leftrightarrow \lambda+1 \leq 1 \Leftrightarrow \lambda \leq 0$$

$$\text{και } \lambda > -1$$

$$\text{οηοτε } -1 < \lambda \leq 0$$

Επομένως η μεγαλύτερη τιμή του λ είναι $\lambda = 0$

δ. Για $\lambda=0$ ν.δ.ο. η ευθεία (ε): $y=(\lambda+1)x$ 287/351

εφαπτεται με τη C_g , όπου $g(x)=e^{x-1}$

και συγχρόνως η C_f εφαπτεται με τον $x'x$

Είναι (ε) $y=x$

Εστω $M(x_0, g(x_0))$ το σημείο επαφής

Πρέπει $g(x_0)=x_0$ και $g'(x_0)=1$.

$$e^{x_0-1}=x_0$$

$$e^{x_0-1}=1 \in \mathbb{I}$$

$$x_0-1=0 \in \mathbb{I} \mid x_0=1.$$

για $x_0=1$ επαληθεύεται και η $e^{x_0-1}=x_0$

οπότε η $y=x$ εφαπτεται με τη C_g στο σημείο

$$M(1, g(1)) \text{ δηλ } M(1, 1)$$

Εστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής με τη C_f με του $x'x$ τότε πρέπει

$$f(x_0)=0 \text{ και } f'(x_0)=0$$

$$\lambda=0$$

$$f(x)=e^{x-1}-x$$

$$f'(x)=e^{x-1}-1$$

$$e^{x_0-1}-x_0=0 \text{ και } e^{x_0-1}-1=0$$

$$e^{x_0-1}=1$$

$$x_0-1=0 \in \mathbb{I} \mid x_0=1$$

για $x_0=1$ επαληθεύεται και η $e^{x_0-1}-x_0=0$ οπότε

ο άξονας $x'x$ εφαπτεται με τη C_f στο σημείο

$$A(1, f(1)) \text{ δηλ } A(1, 0)$$

ε. Αν $f'(a^x+b^x) \geq f'(2) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad a, b > 0 \quad \text{ν.δ.ο} \quad ab=1$

$$\text{Είναι } f'(x)=e^{x-1}-(\lambda+1)$$

$$f''(x)=e^{x-1} > 0 \text{ άρα η } f' \uparrow \text{ οπότε}$$

$$f'(a^x+b^x) \geq f'(2) \quad f' \uparrow \text{ άρα } a^x+b^x \geq 2$$

Είναι $a^x + b^x - 2 \geq 0$

Θεωρώ $q(x) = a^x + b^x - 2 \quad x \in \mathbb{R}$

οηοτε $q(x) \geq 0$

Παρατηρώ ότι $q(0) = 0$ άρα

$$q(x) \geq q(0)$$

- Το 0 εσωτερικό σημείο
- Η q παρουσιάζει ακρότατο στο 0
- Η q παρίψι στο 0 $\psi \in q'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b$

οηοτε αηο θ. Fermat

$$q'(0) = 0 \Leftrightarrow a^0 \ln a + b^0 \ln b = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln a + \ln b = 0 \Leftrightarrow \ln(a \cdot b) = 0 \Leftrightarrow a \cdot b = 1.$$

$$f(x) = 2(x - \ln x) + \frac{\ln^2 x}{2}, \quad x > 0$$

α. Μονοτονία-ακρότατα της f

$$f'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{\ln x}{x} = 2 - \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{3 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 3 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 3 \Leftrightarrow x = e^3$$

x	0	e^3
$f''(x)$	+	-
$f'(x)$	↗	↘

Παρατηρώ ότι $f'(1) = 0$

οπότε

για $0 < x < 1$ $f' \uparrow$ για $1 < x < e^3$ $f' \downarrow$

$$f'(x) < f'(1)$$

$$f'(x) < 0$$

$$f(x) > f(1)$$

$$f'(x) > 0$$

Για $x > e^3$ $f' \downarrow$

$$f'(e^3) = 2 - \frac{2}{e^3} + \frac{\ln e^3}{e^3} = 2 - \frac{2}{e^3} + \frac{3}{e^3} = 2 + \frac{1}{e^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = 2 - 0 + 0 = 2$$

αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\text{άρα } f'([e^3, +\infty)) \stackrel{f' \downarrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x), f'(e^3) \right] = \left(2, 2 + \frac{1}{e^3} \right)$$

$$\text{άρα } 2 < f'(x) \leq 2 + \frac{1}{e^3} \quad \text{άρα η } f' > 0 \text{ στο } (e^3, +\infty)$$

x	0	1	e^3
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		0	$+$

$\xrightarrow{\text{O.E.}}$
 $f(1) = 2$

αφού η f συνεχής
στο $x_0 = e^3$

β. Συνοδο τιμών της f

$$A_1 = [0, 1] \quad A_2 = [1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2(x - \ln x) + \frac{\ln^2 x}{2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2(x - \ln x) + \frac{\ln^2 x}{2} \right) = +\infty$$

$$\alpha\phi\omicron\upsilon \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) \right] = +\infty(1-0) = +\infty$$

$$f(A_1) \stackrel{f \uparrow}{=} [f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] = [2, +\infty)$$

$$f(A_2) \stackrel{f \uparrow}{=} [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [2, +\infty)$$

$$\alpha\rho\alpha \quad f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [2, +\infty)$$

Πλινδος ριζών της εξίσωσης

$$4(\ln x - x) = \ln^2 x - 4040$$

$$\text{Είναι} \quad 2(\ln x - x) = \frac{\ln^2 x}{2} - 2020$$

$$2(x - \ln x) + \frac{\ln^2 x}{2} = 2020$$

$$f(x) = 2020$$

$2020 \in f(A_1)$ άρα υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$ τ.ω

291/351

$f(x_1) = 2020$ και $n \neq \downarrow$ άρα μοναδικό

$2020 \in f(A_2)$ άρα υπάρχει $x_2 \in (1, +\infty)$ τ.ω

$f(x_2) = 2020$ και $n \neq \uparrow$ άρα μοναδικό

Οηόζε η εξίσωση $f(x) = 2020$
έχει ακριβώς δύο ρίζες

δ. Να βυδει η εξίσωση

$$4(x - \ln x) = (2 - \ln x) \cdot (2 + \ln x)$$

Η εξίσωση οριζεται για $x > 0$

$$4(x - \ln x) = 4 - \ln^2 x$$

$$2(x - \ln x) = 2 - \frac{\ln^2 x}{2}$$

$$2(x - \ln x) + \frac{\ln^2 x}{2} = 2$$

$$f(x) = 2$$

$$f(x) = f(1)$$

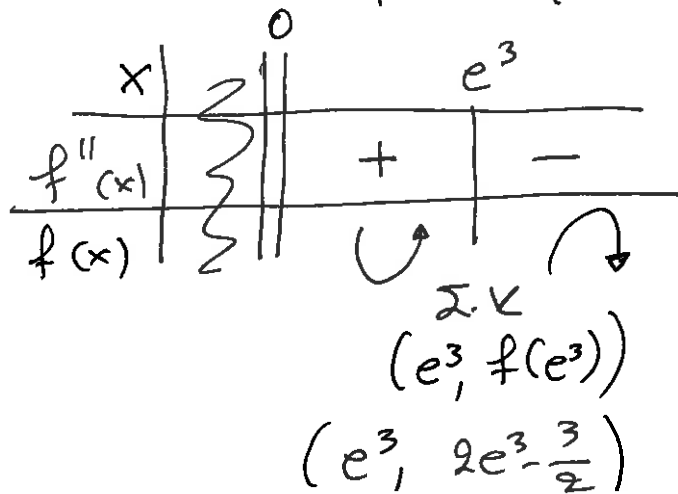
άρα $\boxed{x=1}$

Η f παρουσιάζει
ολικό ελαχιστο για
 $x=1$ με τιμή $f(1)=2$
άρα $f(x) \geq f(1) \quad \forall x > 0$

δ. Κυρτώματα - Σημεία καμπύς

292/351

από α) ερωτήματα



$$\begin{aligned}
 f(e^3) &= 2(e^3 - \ln e^3) + \frac{(\ln e^3)^2}{2} = \\
 &= 2(e^3 - 3) + \frac{9}{2} = \\
 &= 2e^3 - 6 + \frac{9}{2} = \\
 &= 2e^3 - \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

ε. Ασυμπτωτική ως Cf

Κατακόρυφη

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[2(x - \ln x) + \frac{\ln^2 x}{2} \right] = +\infty$$

αρα η $x=0$ κατακόρυφη ασυμπτωτική

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x - \ln x) + \frac{\ln^2 x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) + \frac{\ln^2 x}{2x} \right] = \\
 &= 2 \cdot (1 - 0) + 0 = 2 = 2
 \end{aligned}$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{+\infty}{\underset{-\infty}{\text{DLH}}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{2x} \stackrel{+\infty}{\underset{-\infty}{\text{DLH}}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{2x} \stackrel{+\infty}{\underset{-\infty}{\text{DLH}}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

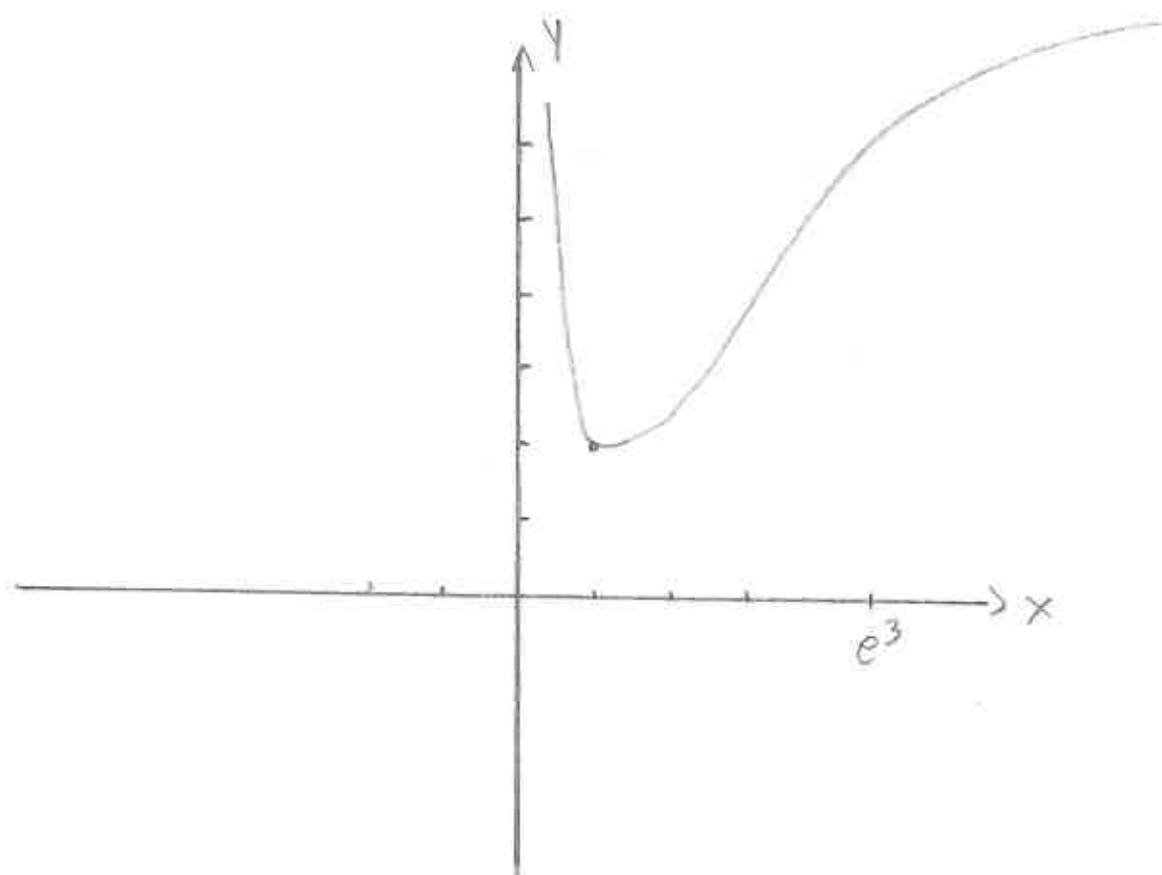
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - 2\ln x + \frac{\ln^2 x}{2} - 2x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2\ln x + \frac{\ln^2 x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln x \left(-2 + \frac{\ln x}{2} \right) \right] = +\infty$$

αρα δεν έχει ασυμπτωτική στο $+\infty$

x	0	1	e^3	
$f''(x)$		+	+	0 -
$f'(x)$		-	+	+
$f(x)$		$+\infty$		$+\infty$

$\text{O. E. } (1, 2)$
 $\text{Σ. V. } (e^3, 2e^3 - \frac{3}{2})$



Σχόλιο

Τις υποδείξεις έκανε η συνάδελφος Δέσποινα Γκαντόγλου.

Την ευχαριστώ !

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ : Συμπληρωματικές προτάσεις στη θεωρία

Με παραδείγματα !

Μπάμπης Στεργίου -2023

Οι παρακάτω προσθήκες είναι βασικές προτάσεις που μπορούν να χρησιμοποιούνται χωρίς καμία απόδειξη ή άλλη αναφορά, για τη λύση σχετικών ασκήσεων στις εξετάσεις. Επειδή δεν αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο, είναι όμως επίσημες οδηγίες, πρέπει να προσεχθούν ιδιαίτερα. Καλό είναι οι μαθητές να γνωρίζουν και τη διατύπωσή τους για κάθε είδους αξιολόγηση και όχι μόνο για τη λύση ασκήσεων.

Πρόταση 1.

i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2.$$

ii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2.$$

Εφαρμογή 1^η

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και περιττή, να λύσετε την ανίσωση

$$f^2(x) < f^2(2)$$

Υπόδειξη

Στην επίλυση μιας ανίσωσης είναι σημαντικό τα βήματα να είναι αντιστρεπτά (να μπορούμε να εργαζόμαστε δηλαδή με ισοδυναμίες) και αυτό ακριβώς εξασφαλίζεται από την παραπάνω πρόταση. Εργαζόμαστε λοιπόν με ισοδυναμίες :

Επειδή η f είναι περιττή και ορίζεται στο 0, είναι $f(0) = 0$ και αφού είναι γνησίως φθίνουσα, παίρνουμε ότι :

$$2 > 0 \Leftrightarrow f(2) < f(0) \Leftrightarrow f(2) < 0$$

Έχουμε επομένως :

$$f^2(x) < f^2(2) \Leftrightarrow |f(x)| < |f(2)| \Leftrightarrow |f(x)| < -f(2) \Leftrightarrow |f(x)| < f(-2)$$

$$\Leftrightarrow -f(-2) < f(x) < f(-2) \Leftrightarrow f(2) < f(x) < f(-2) \Leftrightarrow 2 > x > -2$$

Άρα $x \in (-2, 2)$.

[Μπορούμε να φέρουμε τους όρους στο πρώτο μέλος, να παραγοντοποιήσουμε και να βρούμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα.]

Πρόταση 2.

Έστω f, g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

i) Αν ισχύουν:

$$\alpha) f(x) \leq g(x) \text{ κοντά στο } x_0 \text{ και } \beta) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty,$$

τότε θα ισχύει και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

ii) Αν ισχύουν:

$$\alpha) f(x) \leq g(x) \text{ κοντά στο } x_0 \text{ και } \beta) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty,$$

τότε θα ισχύει και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Εφαρμογή 2^η

Να βρείτε τα όρια $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2\eta\mu x^2)$ και $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2\sigma\upsilon\nu x)$

Υπόδειξη

Είναι :

$$\diamond x^3 - 2 \leq x^3 + 2\eta\mu x^2 \text{ και επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2) = +\infty, \text{ θα είναι } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2\eta\mu x^2) = +\infty.$$

$$\diamond x^3 - 2\sigma\upsilon\nu x \leq x^3 + 2 \text{ και αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2) = -\infty, \text{ θα είναι } B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2\sigma\upsilon\nu x) = -\infty$$

Προφανώς τα παραπάνω όρια μπορούν να υπολογιστούν και με άλλον τρόπο, γράφοντας πχ :

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2\eta\mu x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 (1 + \frac{2\eta\mu x^2}{x^3}))$$

και να εργαστούμε το κριτήριο παρεμβολής για να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x^2}{x^3} = 0$.

Πρόταση 3

Έστω f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, b]$.

- Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε θα ισχύει: $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
- Αν, επιπλέον, οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο $[a, b]$ (δηλαδή, αν υπάρχει $\xi \in [a, b]$, με $f(\xi) \neq g(\xi)$), τότε θα ισχύει: $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$.

Εφαρμογή 3^η - Παράδειγμα

*** Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \ln(x+1)dx < \frac{1}{2}$

Υπόδειξη

Ισχύει ότι $\ln x \leq x - 1$ (οι μαθητές να την γνωρίζουν ως θεωρία, χωρίς απόδειξη) , οπότε

$$\ln(x+1) \leq x \text{ για κάθε } x > -1.$$

Η ισότητα στην τελευταία ισχύει μόνο για $x = 0$, οπότε η σχέση $\ln(x+1) \leq x$ δίνει :

$$\int_0^1 \ln(x+1)dx < \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

*** Είναι φανερό ότι υπάρχει πλήθος εφαρμογών στην παραπάνω πρόταση, ανάμεσα στις οποίες μπορούμε να βρούμε και ερωτήματα από τις πανελλαδικές εξετάσεις, ειδικά όταν έχουμε τη θέση της γραφικής παράστασης μιας κυρτής ή κοίλης συνάρτησης με την εφαπτομένη της σε ένα σημείο.

Πρόταση 4.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x \geq x+1$ και το ίσον (=) ισχύει μόνο για $x = 0$.

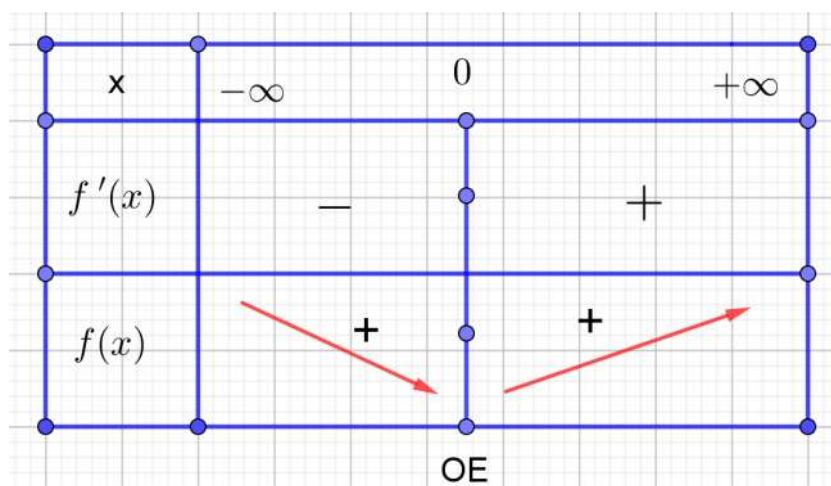
Εφαρμογή 4^η

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = 2e^{x^2} - x^4 - 2x^2 - 2$ και να βρείτε το πρόσημό της

Υπόδειξη

Είναι $f'(x) = 4x(e^{x^2} - x^2 - 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Όμως $e^{x^2} \geq x^2 + 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$.

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και έτσι το πρόσημο της f' φαίνεται στον πίνακα.



Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Επειδή $f(0) = 0$, η f είναι θετική στο $\mathbb{R}^*$.

Πρόταση 5.

Το γινόμενο δύο συναρτήσεων μπορεί να είναι η σταθερή συνάρτηση μηδέν χωρίς καμία από τις δύο να είναι ίση με την συνάρτηση μηδέν.

Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x) = x + |x|$ και $g(x) = x - |x|$ έχουν γινόμενο μηδέν, αλλά καμία από τις δύο δεν είναι η μηδενική συνάρτηση. Συνίσταται να γίνει η γραφική τους παράσταση.

Εφαρμογή 5^η

Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x)(f(x) - 2e^x) = 0$ και $f(0) = 2$

Υπόδειξη

Όπως αναφέρεται στο παραπάνω σχόλιο δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι θα είναι :

$$f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ή } f(x) = 2e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Εργαζόμαστε λοιπόν ως εξής :

Η δοσμένη σχέση παίρνει τη μορφή

$$f(x)(f(x) - 2e^x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 2e^x f(x) + e^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow |f(x) - e^x| = e^x$$

Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^x$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, αφού $|g(x)| = e^x \neq 0$. Όμως $g(0) = 2 - 1 = 1 > 0$, οπότε η g είναι θετική. Συνεπώς :

$$|g(x)| = e^x \Leftrightarrow g(x) = e^x \Leftrightarrow f(x) - e^x = e^x \Leftrightarrow f(x) = 2e^x, x \in \mathbb{R}$$

Πρόταση 6.

Αν μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα (σ_1, σ_2) έχει την ιδιότητα

$$\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow \sigma_2} f(x) = +\infty \text{ (ή } \lim_{x \rightarrow \sigma_1} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow \sigma_2} f(x) = -\infty),$$

τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

Εφαρμογή 6^η

Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in \Delta = (-1, 1)$.

Υπόδειξη

Δεν θα βρούμε τη μονοτονία της f , αφού με την πρώτη ματιά βλέπουμε ότι η f έχει άπειρα όρια στα άκρα του διαστήματος Δ .

Η συνάρτηση f είναι λοιπόν συνεχής στο Δ και επιπλέον :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(x^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = +\infty$$

Σύμφωνα με την πρόταση 6, είναι $f(\Delta) = \mathbb{R}$.

Και μια ακόμα εφαρμογή:

Εφαρμογή 7^η

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^3 + \eta\mu(x^2 - 4)}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Υπόδειξη

Εργαζόμαστε όπως ακριβώς στην προηγούμενη εφαρμογή και βρίσκουμε ότι η συνάρτηση έχει σύνολο το $\mathbb{R}$.

Σχόλιο

Στην παραπάνω εφαρμογή είναι τελείως αποτρεπτική κάθε προσπάθεια εύρεσης της μονοτονίας της συνάρτησης.

******* Είναι πολύ απλό να κατασκευαστεί ένα ερώτημα πάνω σε αυτή τη μορφή, ακόμα και αν η συνάρτηση στον κορμό ενός θέματος στις εξετάσεις είναι διαφορετική. Η συνάρτηση του κορμού μπορεί να εμφανιστεί σε οποιονδήποτε όρο ενός πηλίκου και μάλιστα με τρόπο που μόνο η παραπάνω εφαρμογή να μπορεί να δώσει απάντηση.

Γενικά Θέματα

Δίνουμε ως εφαρμογή δύο ακόμα γενικά θέματα που για τη λύση τους κάνουμε χρήση των παραπάνω προτάσεων

Θέμα 1°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x + x, x > 0$

(α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

(β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη 1.

(γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποια θέση x_0 και είναι

$f(x_0) \geq \frac{1}{x_0}$. Να βρείτε διάστημα με μήκος 1, στο οποίο παρουσιάζεται το ολικό ελάχιστο της f και

να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(δ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f .

(ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζει η γραφική παράσταση της f , ο άξονας $x'x$ και οι ευθείες $x = 1, x = 2$

Υπόδειξη

(α) Είναι $\ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow -\ln x \geq 1 - x$ και ακόμα $e^{x-1} \geq (x-1) + 1 = x$. Επομένως

$$f(x) = e^{x-1} - \ln x + x \geq x + 1 - x + x = x + 1 > 0$$

Ας σημειώσουμε, χωρίς να είναι απαραίτητο, ότι η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$. Αυτό θα επαληθευθεί από την κυρτότητα και την εφαπτομένη στο σημείο $A(1,2)$ σε παρακάτω ερώτημα.

Είναι φανερό ότι θα αρκούσε και η σχέση :

$$f(x) = e^{x-1} - \ln x + x \geq e^{x-1} + (1-x) + x = e^{x-1} + 1 > 1 > 0$$

(β) $y = x + 1$

(γ) Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f' . Επειδή αυτό είναι το $\mathbb{R}$ και επειδή $f''(x) > 0$, η f' έχει

μοναδική ρίζα x_0 . Είναι $e^{x_0-1} = \frac{1}{x_0} - 1$ και έτσι :

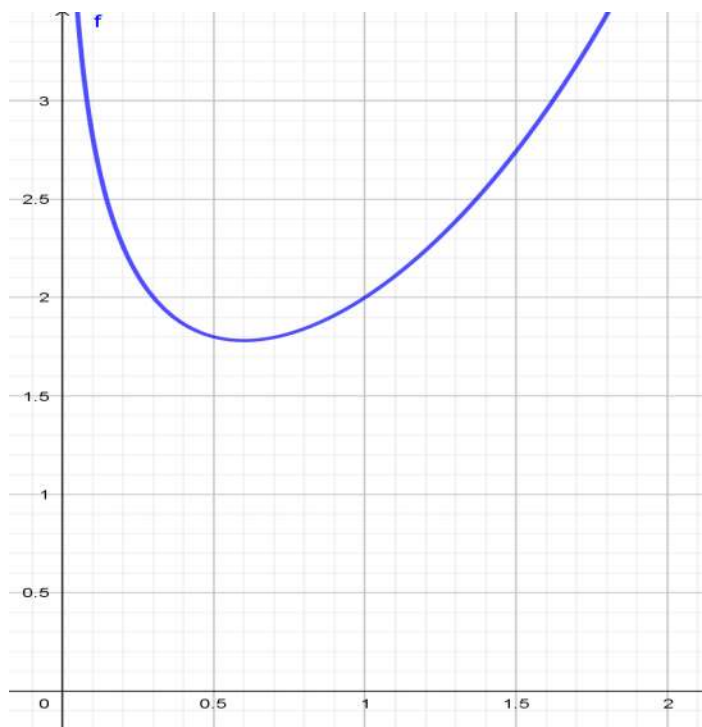
$$f(x_0) = \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) - \ln x_0 + x_0 = \frac{1}{x_0} - (\ln x_0 - x_0 + 1) \geq \frac{1}{x_0}$$

διότι $\ln x_0 - x_0 + 1 \leq 0$.

Με χρήση του θεωρήματος Bolzano μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ρίζα x_0 της f' βρίσκεται στο

διάστημα $(0,1)$ και έτσι $f(x_0) \geq \frac{1}{x_0} > 1$

(δ) Η συνάρτηση f είναι κυρτή και τα όρια στα άκρα είναι ίσα με $+\infty$. Ασύμπτωτη είναι μόνο η $x=0$. Η γραφική παράσταση έχει τη διπλανή μορφή.



***(ε) Είναι

$$E = \int_1^2 f(x) dx = \left[e^{x-1} - x \ln x + x + \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = e - 2 \ln 2 + \frac{3}{2}$$

Για την εύρεση του ολοκληρώματος $E = \int_1^2 \ln x dx$ εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

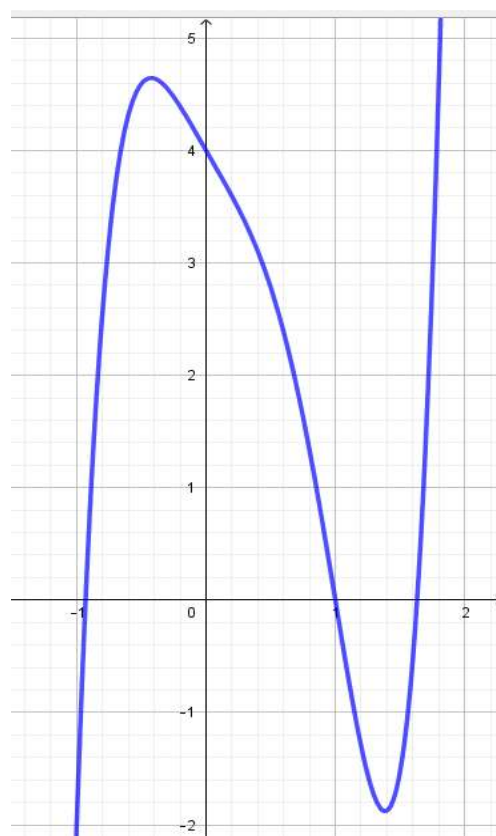
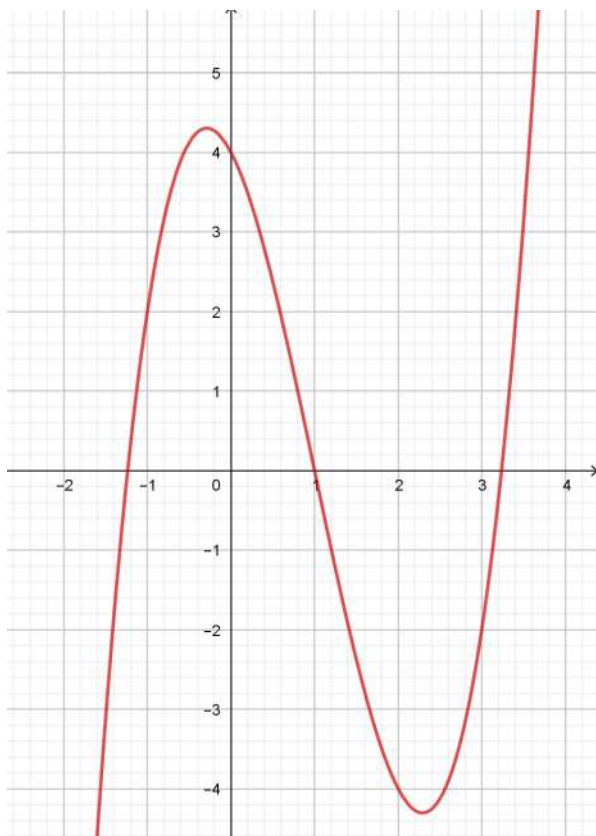
Θέμα 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 4$

(α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής

(γ) Ποια από τις παρακάτω καμπύλες μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Υπόδειξη

(α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

Επομένως $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(β) Είναι $f''(x) = 6(x - 1)$ και έτσι το $A(1, 0)$ είναι σημείο καμπής της C_f . Δεξιά του 1 η συνάρτηση είναι κυρτή και αριστερά κοίλη.

(γ) Η γραφική παράσταση αντιστοιχεί στο 1^ο σχήμα, διότι από τις σχέσεις ριζών συντελεστών το άθροισμα των θέσεων των ακροτάτων της f (ρίζες της f') είναι 2 ενώ στο δεύτερο σχήμα το άθροισμα των θέσεων είναι μικρότερο από το 1.

Θέμα 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

(α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(γ) Να βρεθεί το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x f(x) - 2f(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x))$

Υπόδειξη

(α) Η συνάρτηση f αυξάνει στο $[-1, 1]$ και φθίνει γνήσια στα δύο άλλα διαστήματα.

(β) Η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-1, 1]$.

(γ) Είναι $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x f(x)) = +\infty$, με τον κανόνα de L'Hospital και $-2 \leq -2f(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \leq 2$.

Επομένως:

$$e^x f(x) - 2 \leq e^x f(x) - 2f(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \leq e^x f(x) + 2$$

Αλλά ή από το κριτήριο παρεμβολής ή από το γεγονός ότι

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x f(x) - 2) = +\infty,$$

συμπεραίνουμε ότι $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x f(x) - 2f(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)) = +\infty$

Θέμα 4°

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα εξής :

♦ Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

♦ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{x} = 0$

♦ $f'(x)f''(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. (α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

F3. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα, στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

F4. Να αποδείξετε ότι η f είναι $\ll 1-1 \gg$ και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} .

2022- Επαναληπτικές

Υπόδειξη

F1. (α) θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) - \eta\mu x}{x}$. Είναι τότε :

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

$$\diamond f(x) = xg(x) + \eta\mu x, \quad x \neq 0$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (xg(x) + \eta\mu x) = 0 + 0 = 0$$

Αφού όμως η f είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη, θα είναι

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Ας βρούμε τώρα το $f'(0)$. Θα βασιστούμε στον ορισμό της παραγώγου στο $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x) + \eta\mu x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xg(x)}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(g(x) + \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Επομένως $f'(0) = 1$

Σχόλια για το (α)

(i) Επειδή γνωρίζουμε ότι η f παραγωγίζεται, ξέρουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ και είναι

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$. Θέλουμε απλά την τιμή του. Αλλά από την υπόθεση παίρνουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$$

(ii) Θα μπορούσαμε να ...παίζουμε και λίγο διαφορετικά, αλλά αυτό δεν είναι κάτι σπουδαίο, ούτε αναγκαίο :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x) - \eta \mu x) + \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - \eta \mu x}{x} + \frac{\eta \mu x}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta \mu x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0 + 1 = 1\end{aligned}$$

Να προσέχουμε όμως πάντα ότι για να διασπάσουμε ένα όριο, πρέπει να έχουμε εξασφαλίσει ότι τα επιμέρους όρια είναι πραγματικοί αριθμοί ή γενικότερα ότι δεν θα πάρουμε απροσδιό-ριστη μορφή.

(β) Για την εξίσωση της εφαπτομένης παίρνουμε τον τύπο :

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = 1 \cdot x \Leftrightarrow y = x$$

Γ2. Από την υπόθεση έχουμε $f'(x)f''(x) = x$.

Τι θυμίζει όμως αυτή η σχέση ; Με λίγη προσπάθεια βλέπουμε ότι:

$$f'(x)f''(x) = x \Leftrightarrow 2f'(x)f''(x) = 2x \Leftrightarrow ((f')^2(x))' = (x^2)', x \in \mathbb{R}.$$

Αφού έχουμε διάστημα, παίρνουμε

$$((f')^2(x))' = (x^2)' \Leftrightarrow (f')^2(x) = x^2 + c$$

Βρίσκουμε $c = 1$ και έτσι

$$(f')^2(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow |f'(x)| = \sqrt{x^2 + 1} \quad (1)$$

Ας σημειώσουμε ότι θα μπορούσαμε να γράφουμε

$$f'(x)f''(x) = x \Leftrightarrow 2f'(x)f''(x) = 2x \Leftrightarrow ((f'(x))^2)' = (x^2)', x \in \mathbb{R}$$

κλπ. Ας διαλέξει ο καθένας ό,τι θεωρεί πιο κατανοητό .

Η σχέση (1) εξασφαλίζει ότι $f'(x) \neq 0$ και αφού η f' είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη), θα διατηρεί πρόσημο. Αλλά $f'(0) = 1 > 0$ και έτσι $f'(x) > 0$. Επομένως η (1) δίνει ότι

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Σχόλιο

Σε σχέσεις όπως $f'(x)f''(x) = x$, χρειαζόμαστε κυρίως μια παράγουσα της $f'(x)f''(x)$.

Αν θέσουμε $f'(x) = u$, τότε $f''(x) = u' = 1$.Έτσι

$$f'(x)f''(x) = u \cdot 1 = u = \left(\frac{u^2}{2}\right)' = \left(\frac{(f'(x))^2}{2}\right)',$$

Αυτή η μέθοδος δουλεύει πάντα και μας δείχνει πώς θα βρούμε την παράγουσα που ζητάμε.

Γ3. Εν συντομία :

Είναι $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, οπότε

$$f''(x) = \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

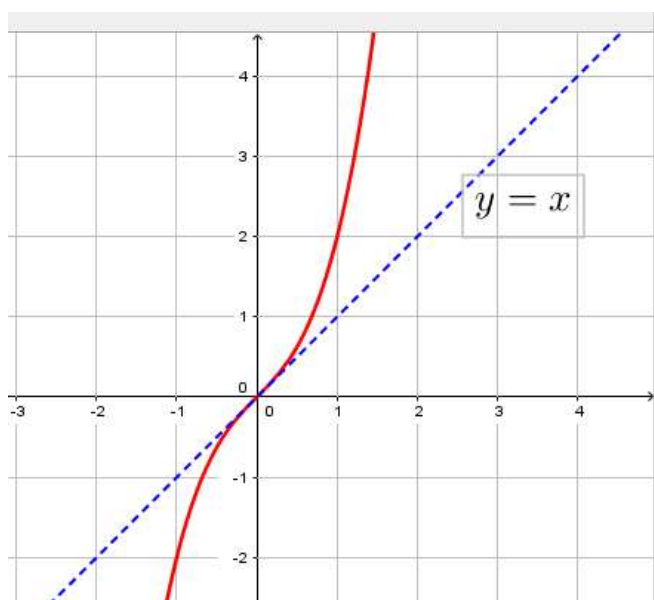
Εύκολα πια βρίσκουμε ότι το $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής .Η f είναι κοίλη αριστερά και κυρτή δεξιά του $x_0 = 0$.

Γ4. Μπορούμε να εργαστούμε με τον ορισμό ; ΟΧΙ ! Είναι όμως

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως είναι και 1-1 .

Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f . Πώς όμως θα το βρούμε το σύνολο , αφού με μια πρώτη προσπάθεια θα δούμε ότι δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο της f ;



Πάμε πίσω στην κυρτότητα και στο σημείο καμπής. Η $y = x$ είναι εφαπτομένη στο $O(0,0)$ και διαπερνάει τη γραφική παράσταση . Από την βασική ιδιότητα της εφαπτομένης σε σημείο μιας κυρτής ή κοίλης συνάρτησης σε ένα διάστημα παίρνουμε ότι :

♦ Για $x < 0$ είναι. Αλλά $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

♦ Για $x > 0$ είναι $x < f(x)$. Αλλά $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Αφού όμως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα είναι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και έτσι η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$.

Θέμα 5°

Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = x$, $A\Gamma = x + 2$ και $\hat{A} = 60^\circ$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το μήκος y της πλευράς $B\Gamma$ δίνεται από τη σχέση

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}, \quad x > 0.$$

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ3. Να μελετήσετε την f ως τα κοίλα, να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

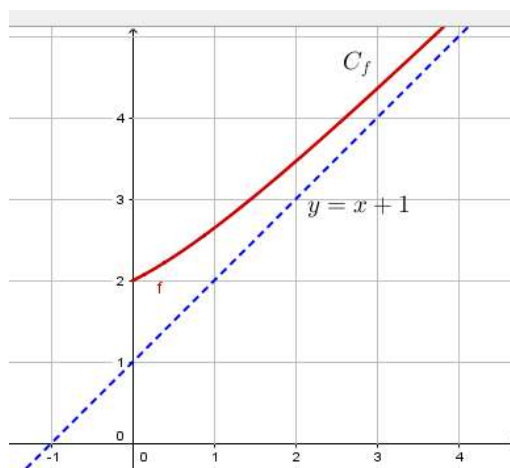
Γ4. Η πλευρά AB αυξάνεται με ρυθμό $\sqrt{3} \text{ cm/min}$. Να βρείτε το ρυθμό, με τον οποίο αυξάνει το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ τη χρονική στιγμή, κατά την οποία αυτό είναι ίσο με $\frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$.

Υπόδειξη

Γ1. Με τον νόμο συνημιτόνων.

Γ2. Είναι γνησίως αύξουσα, αφού $f'(x) = \frac{x+1}{f(x)}$

Γ3. Είναι κυρτή, διότι $f''(x) = \frac{3}{f^3(x)}$. Ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι η ευθεία $y = x + 1$.



Θέμα 6°

Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι

$$f(0) = 0 \text{ και } f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

(α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

(β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα, στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

(γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι $\ll 1-1 \gg$ και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} .

Πανελλαδικές 2022 – Επαναληπτικές, Τροποποίηση

Υπόδειξη

(α) Για την εξίσωση της εφαπτομένης παίρνουμε τον τύπο :

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = 1 \cdot x \Leftrightarrow y = x$$

(β) Εν συντομία :

Είναι $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, οπότε

$$f''(x) = \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Εύκολα πια βρίσκουμε ότι το $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής. Η f είναι κοίλη αριστερά και κυρτή δεξιά του $x_0 = 0$.

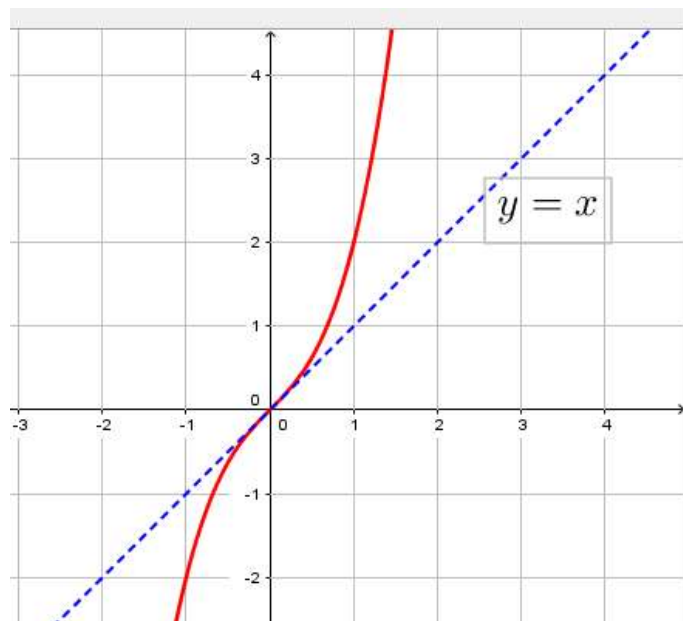
(γ) Μπορούμε να εργαστούμε με τον ορισμό ; ΟΧΙ ! Είναι όμως

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως είναι και $1-1$.

Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f . Πώς όμως θα το βρούμε το σύνολο, αφού με μια πρώτη προσπάθεια θα δούμε ότι δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο της f ;

Πάμε πίσω στην κυρτότητα και στο σημείο καμπής. Η $y = x$ είναι εφαπτομένη στο $O(0,0)$ και διαπερνάει τη γραφική παράσταση.



Από την βασική ιδιότητα της εφαπτομένης σε σημείο μιας κυρτής ή κοίλης συνάρτησης σε ένα διάστημα παίρνουμε ότι :

♦ Για $x < 0$ είναι $f(x) < x$. Αλλά $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

♦ Για $x > 0$ είναι $x < f(x)$. Αλλά $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Αφού όμως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα είναι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και έτσι η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$.

Συμπληρωματικό ερώτημα :

Να αποδείξετε ότι $2 \int_0^{2023} f(x) dx > 2023^2$

Υπόδειξη

Από τη θέση της εφαπτομένης δεξιά από το O παίρνουμε ότι $f(x) \geq x$ για κάθε $x \geq 0$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$. Επομένως :

$$\int_0^{2023} f(x) dx > \int_0^{2023} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2023} = \frac{2023^2}{2}$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ - Μαθηματικά Προσανατολισμού
ΓΕΝΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Μπάμπης Στεργίου

Απρίλιος 2023

ΘΕΜΑ Α

A. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία .

Μονάδες 3

B. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ , παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7

Γ. (α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

(β) Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+$, αντιστοίχως στο $-\infty$;

$f'(x) > 0$ Μονάδες 4

Δ. Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση με $\Sigma - \Lambda$ (1 Μονάδα) και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (2 Μονάδες).

<< Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ , τότε σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . >>

Μονάδες 3

Δ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (σωστές) ή Λ (λάθος):

(α) Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε δεν είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και $f(a)f(\beta) < 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a, β) .

(γ) Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε θα διατηρεί πρόσημο στο Δ .

(δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$.

B1. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$.

Μονάδες 5

B2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη, έστω g , της f .

Μονάδες 7

Ας είναι στη συνέχεια $g(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \neq -1$ η αντίστροφη της f .

B3. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα, να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της g .

Μονάδες 8

B4. Να αποδείξετε ότι εξίσωση $g(x) = e^{-x}$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x - \alpha x, & x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1) + \alpha}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$, με

$$\alpha \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε την παράγωγο και τα κρίσιμα σημεία της f .

Μονάδες 5

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f καθώς και το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 5

Γ4. Δίνεται το μεταβλητό σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ της C_f με $\alpha < 0$. Το α μεταβάλλεται με ρυθμό

$$\alpha'(t) = 2 \text{ cm / min}.$$

Ας είναι N η προβολή του M στον άξονα $x'Ox$ και E το εμβαδόν του τριγώνου OMN , όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E τη στιγμή που η τεταγμένη του M είναι ίση με $1 + \frac{1}{e}$. Σε περίπτωση που βρείτε αρνητικό αριθμό στην απάντησή σας, πώς θα ερμηνεύατε το αρνητικό πρόσημο ;

Μονάδες 5

Γ5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τους άξονες, τη γραφική παράσταση και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$,

$$f'(x) \neq 0 \text{ και } f'(x) = \frac{2f^2(x)}{1 + f^2(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f^2(x) - 1}{f(x)} - 2x, x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή .

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

Θεωρούμε στη συνέχεια ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f'(x+1) + f(x+1) < f(x+2) < f'(x+2) + f(x+1)$$

Μονάδες 5

Δ5. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx > \frac{3}{2}$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!

10/4/2023

ΘΕΜΑ Α

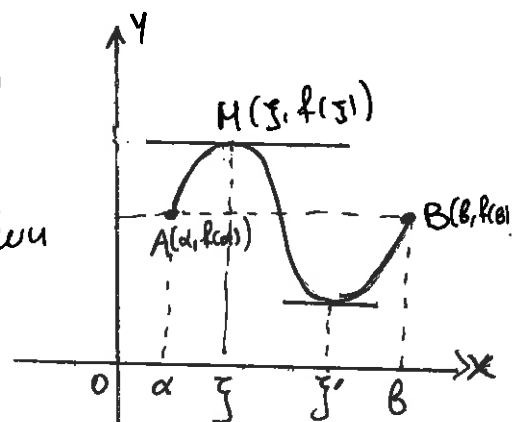
Α. Ορισμός σχολ. βιβλίο σελ 128.

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b)
- $f(a) = f(b)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, b)$
τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει
ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον,
 $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη
ως C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι
παράλληλη στον άξονα x .



Β. Αποδείξτε θ. Fermat σχολ. βιβλίο σελ 142

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό
μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ
και η f παρουσιάζει σε αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει
 $\delta > 0$ τ.ω $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και
 $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , 815/351

ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Επομένως:

- αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ τότε επειδή $f(x) \leq f(x_0)$ θα είναι

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{οπότε θα έχουμε}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (1)$$

- αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ τότε επειδή $f(x) \leq f(x_0)$ θα είναι

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad \text{οπότε θα έχουμε}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (2)$$

Ετσι από τις (1) και (2) έχουμε $f'(x_0) = 0$

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη

Γ. α) Ορισμός σχολικό βιβλίο σελ. 70

Εστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

β) Ορισμός σχολικό βιβλίο σελ. 162

Η ευθεία $y = \Delta x + b$ λέγεται ασυμπτωτική της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$,

$$\text{αν } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\Delta x + b)] = 0$$

$$\text{αντιστοίχως } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\Delta x + b)] = 0$$

Δ. α. $\wedge$ β. $\exists$ γ. $\exists$ δ. $\wedge$ ε. $\exists$

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = \frac{x}{1-x} \quad x \neq 1$$

B₁ Να οριστεί η $f \circ f$

$$A_{f \circ f} = \{x \in A_f \mid f(x) \in A_f\}$$

$$\left. \begin{matrix} x \neq 1 \\ \frac{x}{1-x} \neq 1 \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} x \neq 1 \\ x \neq 1-x \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} x \neq 1 \\ 2x \neq 1 \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} x \neq 1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} x \in \mathbb{R} - \{1, \frac{1}{2}\}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x}{1-x}}{1 - \frac{x}{1-x}} = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1-x-x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x} \quad \begin{matrix} x \neq 1 \\ \text{και} \\ x \neq \frac{1}{2} \end{matrix}$$

B₂ $f(x) = \frac{x}{1-x}$

$$f'(x) = \frac{1-x-x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} > 0 \quad \text{αρα}$$

η f γνησίως αυξουσα στο $(-\infty, 0)$ και

η f γνησίως αυξουσα στο $(0, +\infty)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

$$A_1 = (-\infty, 1) \quad A_2 = (1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$$

$$1-x \mid + \mid -$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{-x} \right) = -1$$

αρα

$$f(A_1) = f((-\infty, 1)) \stackrel{\text{συνεχής}}{\nearrow} (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)) = (-1, +\infty)$$

$$f(A_2) = f((1, +\infty)) \stackrel{\text{συνεχής}}{\searrow} (\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (-\infty, -1)$$

Οηοζε $f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset$

αρα η f 1-1 οηοζε αντιστρεφεται

για $x \neq 1$ και $y \neq -1$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = y - xy \Leftrightarrow x + xy = y \Leftrightarrow$$

$$(1+y)x = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{y}{1+y} \\ f^{-1}(y) = \frac{y}{1+y} \end{array} \right. \quad y \neq -1$$

αρα

$$g(x) = f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x} \quad x \neq -1$$

B3 $g(x) = \frac{x}{1+x} \quad x \neq -1$ Συνεχής και παρ/μη

με $g'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Δεν έχει ακροατα

$$g''(x) = - \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = - \frac{2}{(1+x)^3}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	$\parallel$	$-$
$g(x)$	$\cup$	$\parallel$	$\cap$

Δεν έχει σημείο καμπής

ΑΣΥΜΠΤΟΤΕΣ

Κατακόρυγη

$$1+x \left| \begin{array}{c} -1 \\ + \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(x \cdot \frac{1}{1+x} \right) = (-1) \cdot (+\infty) = -\infty$$

άρα η $x = -1$ κατακόρυγη ασυμπτωτική της C_f

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(x \cdot \frac{1}{1+x} \right) = (-1) \cdot (-\infty) = +\infty$$

Οριζιαία - ορίζουσα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 1x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 = b$$

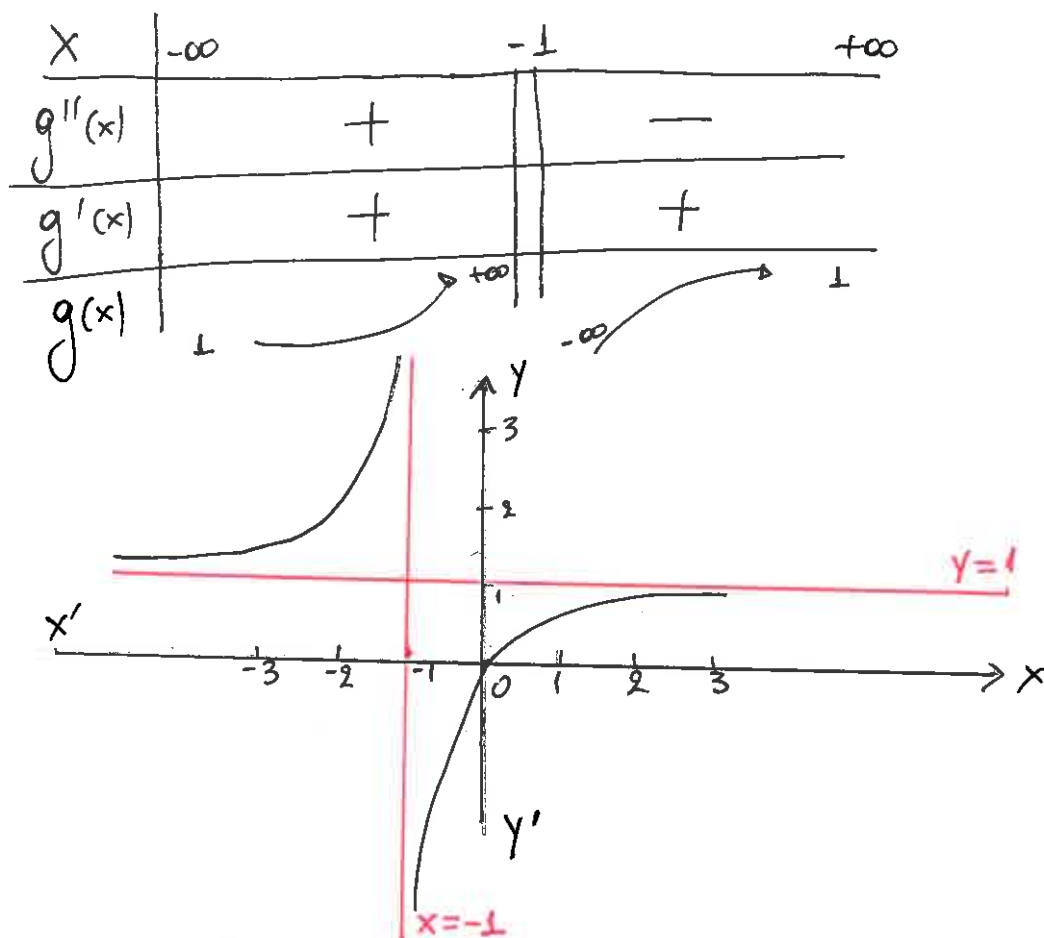
άρα η $y = 1$ ορίζουσα της C_f στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1 \quad \text{άρα η } y = -1 \text{ ορίζουσα της } C_f \text{ στο } -\infty$$

Σημεία τομής με τους άξονες

$$x'x \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

τεμνει τους άξονες στο σημείο $(0,0)$



B₄ Ν.Σ.ο. η εἴδ. $g(x) = e^{-x}$ έχει ακριβώς 1 ρίζα στο $(0,1)$
 Είναι $g(x) - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} - e^{-x} = 0$

Θεωρώ $k(x) = \frac{x}{1+x} - e^{-x} \quad x \in [0,1]$

- k συνεχής στο $[0,1]$
 - $k(0) = -1 < 0$
 - $k(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} = \frac{e-2}{2e} > 0$
- } $k(0) \cdot k(1) < 0$

Σύμφωνα με το θ. Bolzano η εξίσωση $k(x) = 0$ έχει 1 τουλ. ρίζα στο $(0,1)$

Επίσης $k'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} + e^{-x} > 0$

άρα η $k \uparrow$ οπότε η ρίζα μοναδική

B5 Ν.δ.ο. η $G(x) = x - \ln(x+1)$ είναι αρχικώς ^{320/351} αυξήσασα στο $(-1, +\infty)$

$$\text{Είναι } G'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1} = g(x)$$

άρα η G αρχικώς αυξήσασα στο $(-1, +\infty)$

$$E(\underline{0}) = \int_0^1 |g(x)| dx$$

Οφώς $g(x) \geq 0$ στο $[0, 1]$ οηότε

$$E(\underline{0}) = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = [x - \ln(x+1)]_0^1 = (1 - \ln 2) \text{ τ.μ.} = \ln e - \ln 2 > 0$$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} e^x - ax & x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1) + a}{x+1} & x > 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} f \text{ συνεχής} \\ a \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Γ1 Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα f συνεχής στο $x_0 = 0$
οηότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - ax) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1) + a}{x+1} = a \\ f(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ άρα } a = 1.$$

9 $f(x) = \begin{cases} e^x - x & x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)+1}{x+1} & x > 0 \end{cases} \quad f(0) = 1$

Για $x < 0$ η $f(x) = e^x - x$ οαρίμυ με $f'(x) = e^x - 1$

Για $x > 0$ η $f(x) = \frac{\ln(x+1)+1}{x+1}$ οαρίμυ με

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1) - 1}{(x+1)^2} = \frac{-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

Αν η f οαρίμυ στο $x_0 = 0$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - x - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \stackrel{x+1=y}{y \rightarrow 1} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\ln y}{y} = 0 \end{aligned} \right\} =$$

ορα η f οαρίμυ στο 0

οηοζε $f'(x) = \begin{cases} e^x - 1 & x \leq 0 \\ -\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} & x > 0 \end{cases}$

Κρίσημα ουμεία

Για $x < 0$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Για $x > 0$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$

ορα το 0 κρίσημο ουμείο της f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	///
$-\ln(x+1)$	///	0	-
$\frac{f'(x)}{(x+1)^2}$	///	0	-
$f'(x)$	-	-	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

και η f συνεχής στο 0
οποτε η f γενικώς φθίνουσα
στο $\mathbb{R}$.

ΑΣΥΜΠΤΟΤΕΣ

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ αρα δευ έχει κατακορυφες

ΠΔαχίες - ορίζουσες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{-\infty}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = 0 - 1 = -1 = \Delta$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \Delta x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 = \theta$$

αρα η $y = -x$ ηΔαχία της Cf στο $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(x+1)+1}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)+1}{x(x+1)} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{\text{DLH}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1) \cdot (2x+1)} \stackrel{\frac{1}{\infty}}{=} 0 = \Delta$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \Delta x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)+1}{x+1} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{\text{DLH}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

αρα η $y = 0$ ορίζουσα ασυμπτωτη της
Cf στο $+\infty$

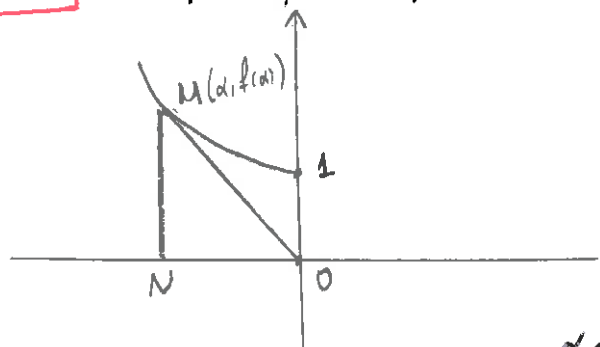
Συνολο Τιμων

$$f(\mathbb{R}) = f((-\infty, +\infty)) \xrightarrow{\text{συνεχης}} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

αφου $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = 0 - (-\infty) = +\infty$

[4] Μ ($\alpha, f(\alpha)$) της Cf με $\alpha < 0$. $\alpha'(t) = 2 \text{ cm/min}$.



Το εμβαδο του τριγωνου

OMN ειναι

$$E = \frac{1}{2} (ON) \cdot (MN)$$

$\alpha < 0$ $(ON) = -\alpha$ και $MN = e^\alpha - \alpha$

Οποτε

$$E(t) = \frac{1}{2} \cdot (-\alpha(t)) \cdot (e^{\alpha(t)} - \alpha(t)) = \frac{1}{2} \alpha(t) \cdot (\alpha(t) - e^{\alpha(t)})$$

Τη χρονικη στιγμη t ο ρυθμος μεταβολης ειναι

$$E'(t) = \frac{1}{2} [\alpha'(t) (\alpha(t) - e^{\alpha(t)}) + \alpha(t) \cdot (\alpha'(t) - \alpha'(t) e^{\alpha(t)})]$$

Τη χρονικη στιγμη $t = t_0$ ειναι $\alpha'(t_0) = 2 \text{ cm/min}$

και η τεταχμενη του Μ ειναι $1 + \frac{1}{e}$ οποτε

$$f(\alpha) = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^\alpha - \alpha = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha = -1$$

αρα $\alpha(t_0) = -1 \text{ cm}$

Επομεως $E'(t_0) = \frac{1}{2} [\alpha'(t_0) (\alpha(t_0) - e^{\alpha(t_0)}) + \alpha(t_0) (\alpha'(t_0) - \alpha'(t_0) e^{\alpha(t_0)})]$

$$= \frac{1}{2} [2 \cdot (-1 - e^{-1}) - (2 - 2e^{-1})] =$$

$$= -1 - \frac{1}{e} - 1 + \frac{1}{e} = -2 \text{ cm/min}$$

Το αρνητικο προσηφο σημανει οτι ο ρυθμος μεταβολης του εμβαδου του τριγωνου μειωνεται.

5 Εμβαδόν χωρίου αηο C† αξουες και $x=1$

$$\text{Εναι } E(\square) = \int_0^1 |f(x)| dx$$

Οπως η $f(x) > 0$ αφου εχει συνοδο τιμων $(0, +\infty)$

$$\alpha\pi\alpha \quad E(\square) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)+1}{x+1} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx =$$

$$\left[\frac{\ln^2(x+1)}{2} \right]_0^1 + \left[\ln|x+1| \right]_0^1 =$$

$$\frac{\ln^2 2}{2} + \ln 2 = \frac{\ln^2 2 + 2\ln 2}{2} \text{ Τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παρ/μη $f(0)=1$ $f'(x) \neq 0$ και
 $f'(x) = \frac{2f^2(x)}{1+f^2(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Δ1 Ν.δ.ο. η f εναι γυμσιως αξζουσα και κυρτη

Η f παρ/μη αρα και συνεχης

Ισχυει $f'(x) \neq 0$ και $f'(x) = \frac{2f^2(x)}{1+f^2(x)} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

αρα η f γυμσιως αξζουσα στο $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{Εναι } f''(x) &= \frac{4f(x) \cdot f'(x)(1+f^2(x)) - 2f^2(x) \cdot 2f(x)f'(x)}{(1+f^2(x))^2} \\ &= \frac{4f(x)f'(x) + 4f^3(x)f'(x) - 4f^3(x)f'(x)}{(1+f^2(x))^2} = \frac{4f(x)f'(x)}{(1+f^2(x))^2} \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{4f(x) \cdot f'(x)}{(1+f^2(x))^2}$$

Είναι $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και η $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Επίσης Αν $f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0$ οπότε

$$f'(x) = \frac{2 \cdot 0}{1+0} = 0 \text{ άτοπο άρα}$$

η $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και η f συνεχής άρα διατηρεί
σταθερό πρόσημο και $f(0) = 1$ άρα $f(x) > 0$
οπότε $f''(x) > 0$ άρα η f κυρτή

Δ2 Ν.δ.ο. $g(x) = \frac{f^2(x)-1}{f(x)} - 2x, \quad x \in \mathbb{R}$ σταθερή

Η g συνεχής ως πράξεις συνεχών και παρ/μ
οπότε:

$$g'(x) = \frac{2f(x)f'(x)f(x) - (f^2(x)-1)f'(x)}{f^2(x)} - 2 =$$

$$= \frac{2f^2(x)f'(x) - f^2(x)f'(x) + f'(x) - 2f^2(x)}{f^2(x)} =$$

$$= \frac{f^2(x)f'(x) + f'(x) - 2f^2(x)}{f^2(x)} = \frac{f'(x)(f^2(x)+1) - 2f^2(x)}{f^2(x)} =$$

$$= \frac{\frac{2f^2(x)}{1+f^2(x)}(f^2(x)+1) - 2f^2(x)}{f^2(x)} = \frac{2f^2(x) - 2f^2(x)}{f^2(x)} = 0$$

άρα η g σταθερή

Δ3 Να βρείτε τον ωρο τω f

Η g σταθερή άρα

$$g(x) = c \Leftrightarrow \frac{f^2(x) - 1}{f(x)} - 2x = c$$

για $x=0$ είναι $\frac{f^2(0) - 1}{f(0)} - 2 \cdot 0 = c \Leftrightarrow c = 0$

άρα $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f^2(x) - 1}{f(x)} - 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{f^2(x) - 1 - 2xf(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow$

$$f^2(x) - 2xf(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - x)^2 = x^2 + 1$$

Θεωρώ $q(x) = f(x) - x$ οηότες $q^2(x) = x^2 + 1$

$$q(x) = 0 \Leftrightarrow q^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \text{ αδύνατον}$$

άρα $q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και η q συνεχής άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο

Οπως $q(0) = f(0) - 0 = 1 > 0$ άρα $q(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

οηότες $q^2(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow \sqrt{q^2(x)} = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow |q(x)| = \sqrt{x^2 + 1} \stackrel{q(x) > 0}{\Leftrightarrow}$

$$q(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ4 Ν.δ.ο. για $\forall x > 0$ ισχύει $x+1 < f(x) < xf'(x)+1$

Η f συνεχής στο $[0, x]$

Η f παρ/ημ στο $(0, x)$

άρα από Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τ.ω

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x}$$

Είναι $0 < \xi < x$ και $f' \uparrow$ αφού η f κυρτή 327/351

$$\text{άρα } f'(0) < f'(\xi) < f'(x)$$

$$1 < \frac{f(x)-1}{x} < f'(x) \quad x > 0$$

$$x < f(x) - 1 < x f'(x)$$

$$x+1 < f(x) < x f'(x) + 1$$

Δ5 N.δ.ο. $\int_0^1 f(x) dx > \frac{3}{2}$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της

$M(0, f(0))$ έχει εξίσωση:

$$(E) \quad y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$$

$$y - 1 = x$$

$$y = x + 1$$

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = 1$$

Η f κυρτή άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την
εξ. εφαπτομένης με εξίσωση το σημείο επαφής.

Δηλ. ισχύει $f(x) \geq x+1$ με την ισότητα να ισχύει
για $x=0$

$$\text{οηότι } \int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 (x+1) dx$$

$$\int_0^1 f(x) dx > \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1$$

$$\int_0^1 f(x) dx > \frac{1}{2} + 1$$

$$\int_0^1 f(x) dx > \frac{3}{2}$$

Τις υποδείξεις έκανε η συνάδελφος Δέσποινα Γκαντόγλου.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ Σ - Λ ΠΕΡΙΟΔΟΣ 2018-2022

ΜΕΡΟΣ 1

- α) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.
- β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[α, β]$, ισχύει:
- $$\text{Αν } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0, \text{ τότε } f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$
- γ) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f .
- δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για x κοντά στο x_0 .
- ε) Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

ΜΕΡΟΣ 2

- α) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^{2v+1}} \right) = +\infty$, για κάθε $v \in \mathbb{N}$.
- β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B , αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται, αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.
- γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.
- δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.
- ε) Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f , του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

Μονάδες 10

ΜΕΡΟΣ 3

- α) Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty$
- γ) Για κάθε συνάρτηση f , το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f , εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της f .
- δ) $(\ln |x|)' = -\frac{1}{x}$, για κάθε $x < 0$.
- ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .

ΜΕΡΟΣ 4

- α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε x κοντά στο x_0 .
- β) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$.
- γ) Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΜΕΡΟΣ 5

- α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, ισχύει $f \circ g = g \circ f$.
- β) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και $f(x) < g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 , ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- γ) Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, η οποία δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές στο $[\alpha, \beta]$.

ΜΕΡΟΣ 6

- α) Ισχύει $|\eta \mu x| < |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.
- β) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ισχύει ότι $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in A$.
- γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
- δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- ε) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή, M , και μια ελάχιστη τιμή, m .

ΜΕΡΟΣ 7

- α) Αν f, g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$.
- β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.
- γ) Αν μια συνάρτηση f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ καμπή, τότε $f''(x_0) = 0$.
- δ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, ισχύει ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .

ΜΕΡΟΣ 8

- α) Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$.
- β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $f'(x) \neq 0$, για όλα τα $x \in (0, 1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.
- γ) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$.
- δ) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 1$.
- ε) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

ΜΕΡΟΣ 9

- α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
- β) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$.
- γ) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.
- δ) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$.
- ε) Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

ΓΕΝΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται 1-1;

Μονάδες 3

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

A3. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ με $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 9

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές ή Λ , αν είναι λανθασμένες.

(α) Κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι 1-1 είναι και γνησίως μονότονη.

(β) Για κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε θα είναι και

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta = (a, b)$, τότε το

σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το (B, A) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.

(δ) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ , παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε $f'(x_0) = 0$

(ε) Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ και G μια αρχική της f στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a).$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$, $x \neq 1$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 5

B2. Να μελετήσετε την f ως τα κοίλα και τα σημεία καμψής.

Μονάδες 5

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Μονάδες 5

B4. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{1-x} - x - 1$. Να αποδείξετε ότι $f = g$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{-1} f(x) dx$.

Μονάδες 5

B5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^{1+x}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, όχι όμως παραγωγίσιμη, στο σημείο $x_0 = 0$ και να βρείτε το πρόσημο της f .

Μονάδες 5

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, να βρείτε το σύνολο τιμών της καθώς και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2022$.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \begin{cases} x + e^{-x} - 1, & x < 0 \\ \frac{2}{3}x\sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$ είναι αρχική της f και να υπολογίσετε

το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 9$

Μονάδες 7

4ο ΘΕΜΑ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 3$,

$$g(x) = f(x) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \quad \text{και} \quad \left| f(x) - f(y) - e^x + e^y \right| \leq |x - y|^2 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι :

$$f(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει

$$g'(x) + g(x) < g(x+1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδειχτεί ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$

εφάπτεται και στην C_g στο ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

Δ4. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g , την κοινή εφαπτομένη

$y = x + 3$ των C_g, C_f και την ευθεία $x = 1$.

Μονάδες 5

Δ5. Ένας ιδεατός διαβάτης διατρέχει από αριστερά προς τα δεξιά ολόκληρη τη γραφική παράσταση της f , κινούμενος πάνω σε αυτή. Να αποδείξετε ότι κάποια στιγμή η απόστασή του από το σημείο $N(1,0)$ γίνεται ελάχιστη και μάλιστα αυτό συμβαίνει σε ένα μόνο σημείο, το οποίο βρίσκεται στο διάστημα $(-1,0)$.

Μονάδες 5

Καλή Επιτυχία !!!

Γενικό Διαγώνισμα 2022

Σελίδα 1 από 3

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΕΝΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται 1-1;

Μονάδες 3

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

A3. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ με $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 9

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές ή Λ , αν είναι λανθασμένες.

(α) Κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι 1-1 είναι και γνησίως μονότονη.

(β) Για κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε θα είναι και

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta = (a, b)$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το (B, A) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.

(δ) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ , παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε $f'(x_0) = 0$

(ε) Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ και G μια αρχική της f στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{1-x}, x \neq 1$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 5

B2. Να μελετήσετε την f ως τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 5

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Μονάδες 5

B4. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{1-x} - x - 1$. Να αποδείξετε ότι $f = g$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{-1} f(x) dx$.

Μονάδες 5

B5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^{1+x}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, όχι όμως παραγωγίσιμη, στο σημείο $x_0 = 0$ και να βρείτε το πρόσημο της f .

Μονάδες 5

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, να βρείτε το σύνολο τιμών της καθώς και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2022$.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \begin{cases} x + e^{-x} - 1, & x < 0 \\ \frac{2}{3}x\sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$ είναι αρχική της f και να υπολογίσετε

το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση : $x = 9$

Μονάδες 7

4ο ΘΕΜΑ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 3$,

$$g(x) = f(x) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \quad \text{και} \quad \left| f(x) - f(y) - e^x + e^y \right| \leq |x - y|^2 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι :

$$f(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει

$$g'(x) + g(x) < g(x+1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$

εφάπτεται και στην C_g στο ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

Δ4. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g , την κοινή εφαπτομένη

$$y = x + 3 \text{ των } C_g, C_f \text{ και την ευθεία } x = 1.$$

Μονάδες 5

Δ5. Ένας ιδεατός διαβάτης διατρέχει από αριστερά προς τα δεξιά ολόκληρη τη γραφική παράσταση της f , κινούμενος πάνω σε αυτή. Να αποδείξετε ότι κάποια στιγμή η απόστασή του από το σημείο $N(1,0)$ γίνεται ελάχιστη και μάλιστα αυτό συμβαίνει σε ένα μόνο σημείο, το οποίο βρίσκεται στο διάστημα $(-1,0)$.

Μονάδες 5

Καλή Επιτυχία !!!

A4]

α. Λ β. Λ γ. Σ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x} \quad x \neq 1.$$

B1. Μονοτονία-ακρότατα

$$f'(x) = \frac{2x(1-x) + x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x - 2x^2 + x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

x	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	↗	↘
	T.E		T.M
	$f(0)=0$		$f(2)=-4$

B2. Κοιτάδα-Συμπεριφορά καμπύλης.

$$f''(x) = \frac{(2-2x)(1-x)^2 + (2x-x^2) \cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{(1-x)[2x^2 - 4x + 2 + 4x - 2x^2]}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{2}{(1-x)^3}$$

x	-∞	1	+∞
f''(x)	+	0	-
f(x)	↖	↗	↘

B3] Ασύμπτωτες - Χαραξί.

Κατακόρυφη

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x^2 \frac{1}{1-x} \right) = -\infty$$

$$\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$$

από τη $x=1$ κατακόρυφη

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x^2 \frac{1}{1-x} \right) = +\infty$$

Πλάγια - ορίζουσα.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1 = l$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - lx) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{1-x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{1-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-x} = -1 = b. \end{aligned}$$

από τη $y = -x - 1$ η Πλάγια στο $+\infty$.

Επίσης

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x-1)) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{1-x} + x + 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - x^2 + 1 - x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x} = 0 \end{aligned}$$

από τη $y = -x - 1$ η Πλάγια στο $-\infty$.

Οριζόντιες τιμές

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

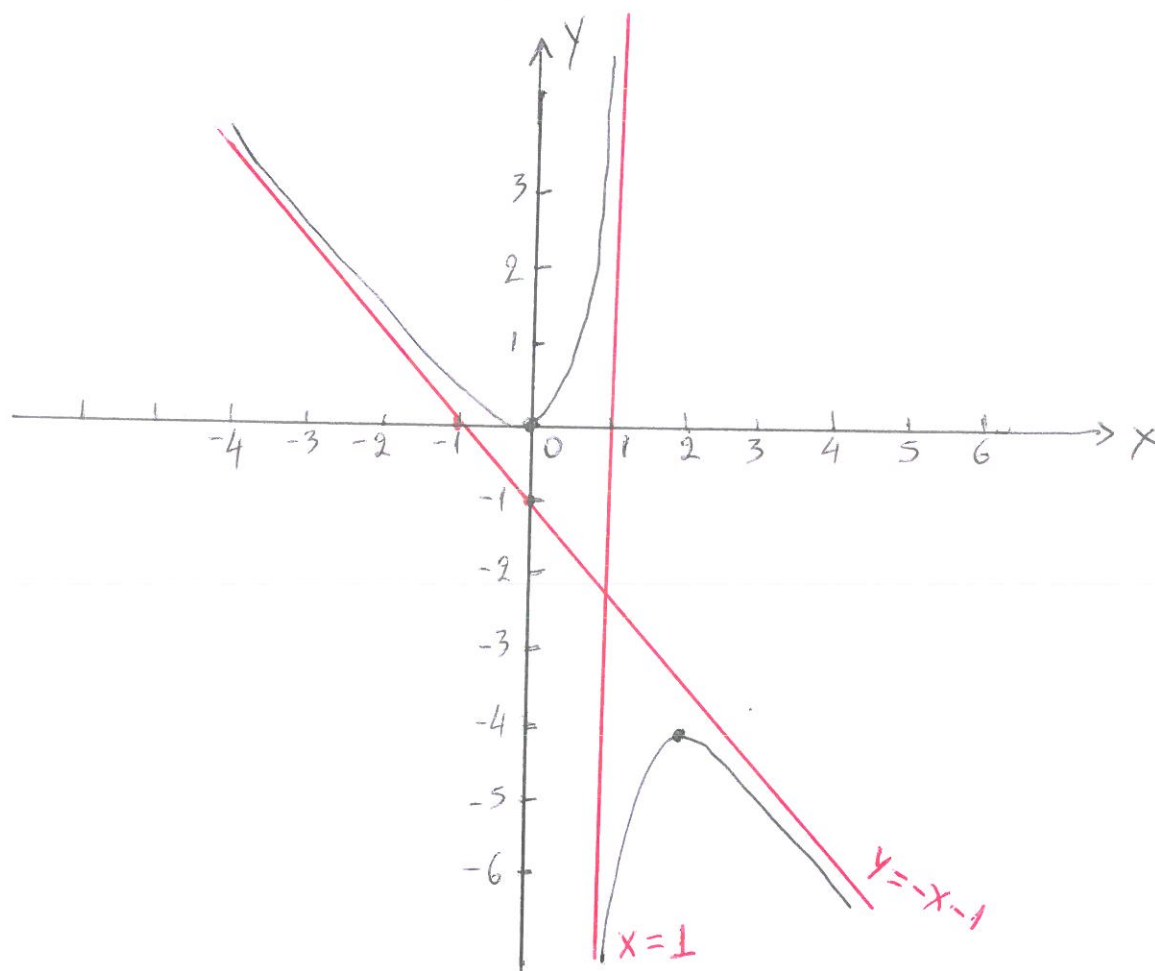
$$x'x \quad f(x)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \quad (0,0).$$

$$y'y \quad f(0)=0 \quad (0,0)$$

x	$-\infty$	0	1	2
$f''(x)$	+	+	-	-
$f'(x)$	-	+	+	-
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

T.E
(0,0)

T.M
(2,-4)



B4. $g(x) = \frac{1}{1-x} - x - 1$ v. δ.ο. $f = g$.

$A_f = \mathbb{R} - \{1\}$ $A_g = \mathbb{R} - \{1\}$.

$$g(x) = \frac{1}{1-x} - x - 1 = \frac{1-x+x^2-1+x}{1-x} = \frac{x^2}{1-x} = f(x)$$

αρα $f = g$.

αρα $A_f = A_g = A$ και $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$.

$$I = \int_0^{-1} f(x) dx =$$

$$= \int_0^{-1} g(x) dx = \int_0^{-1} \left(\frac{1}{1-x} - x - 1 \right) dx =$$

$$\left[-\ln|1-x| - \frac{x^2}{2} - x \right]_0^{-1} = -\ln 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

B5. Ν.δ.ο. η εἴδ. $f(x) = e^{1+x}$ 1 του] ρίξ στο $(0,1)$

Είναι $f(x) = e^{1+x} \Leftrightarrow f(x) - e^{1+x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1-x} - e^{1+x} = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 - (1-x)e^{1+x} = 0$$

Θεωρώ $k(x) = x^2 - (1-x)e^{1+x} \quad x \in [0,1]$.

k συνεχής στο $[0,1]$

$k(0) = -e$ } οηοζε
 $k(1) = 1$ } $k(0) \cdot k(1) < 0$

Συμφωνά με το θ. Bolzano η εἴδ. $k(x) = 0 \Leftrightarrow$
 $f(x) = e^{1+x}$ έχει 1 του] ρίξ στο $(0,1)$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Γ1. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - e^{-x}) = 1 - 1 = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$

$\left. \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{matrix} \right\} \text{αφα} \left. \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{matrix} \right\} \text{συνεχης στο } 0.$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{-x}}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x}}{1} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

αφα η f δεν ειναι παρ/μη στο 0.

Για $x < 0$ $1 - e^{-x} = 1 - \frac{1}{e^x} = \frac{e^x - 1}{e^x} < 0$ αφου

$$\begin{matrix} x < 0 \\ e^x < e^0 \\ e^x < 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \end{matrix}$$

Για $x > 0$ $\sqrt{x} > 0$ αφα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	-	0	+

Γ2. Μονοτονια.

Για $x < 0$ $f'(x) = e^{-x} > 0$

Για $x > 0$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	+	+	
f(x)			↗

αφου η f συνεχης στο 0

Συνολο Τιμων.

$$A_1 = (-\infty, 0)$$

$$A_2 = [0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{-x}) = -\infty$$

αφου $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \xrightarrow{-x=y} \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - e^{-x}) = 0$$

$$f(A_1) = f((-\infty, 0)) \xrightarrow[\text{συνεχης}]{f \uparrow} (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)) = (-\infty, 0)$$

$$f(A_2) = f([0, +\infty)) \xrightarrow[\text{συνεχης}]{f \uparrow} [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [0, +\infty)$$

οηοτε $f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) = \mathbb{R}$.

Πλινθος ριζων ως ες. $f(x) = 2022$.

$2022 \in f(A_2)$ αρα υπαρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τω
 $f(x_0) = 2022$ και η $f \uparrow$ αρα μοναδικο.

Γ3. Αντιστροφη ως f .

Για $x < 0$ η $f \uparrow$ αρα 1-1

Για $x > 0$ η $f \uparrow$ αρα 1-1.

$f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset$ αρα η f 1-1 στο $\mathbb{R}$

οηοτε αντιστρεφεται

$$\Gamma \alpha \quad x < 0 \quad \text{και} \quad y < 0$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 1 - e^{-x} = y \Leftrightarrow e^{-x} = 1 - y \Leftrightarrow -x = \ln(1 - y) \Leftrightarrow x = -\ln(1 - y). \quad y < 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \\ x = -\ln(1 - y) \quad y < 0 \end{array} \right\} f^{-1}(y) = -\ln(1 - y) \quad y < 0.$$

$$\Gamma \alpha \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad y \geq 0$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2 \quad y \geq 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \\ x = y^2 \quad y \geq 0 \end{array} \right\} f^{-1}(y) = y^2 \quad y \geq 0$$

$$\text{Οηορτε} \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} -\ln(1 - x) & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0. \end{cases}$$

$$\Gamma 4. \quad \text{N.S.O.} \quad F(x) = \begin{cases} x + e^{-x} - 1 & x < 0 \\ \frac{2}{3} x \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{αρχικη} \\ \text{και} f. \end{array}$$

$$\Gamma \alpha \quad x < 0 \quad F'(x) = (x + e^{-x} - 1)' = 1 - e^{-x} = f(x)$$

$$\Gamma \alpha \quad x > 0 \quad F'(x) = \left(\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right)' = \frac{2}{3} \sqrt{x} + \frac{2}{3} x \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$\frac{2\sqrt{x}}{3} + \frac{x}{3\sqrt{x}} = \frac{2x + x}{3\sqrt{x}} = \frac{3x}{3\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x} = f(x)$$

$$F(0) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{e^{-x} - 1}{x} \right) = 1 - 1 = 0$$

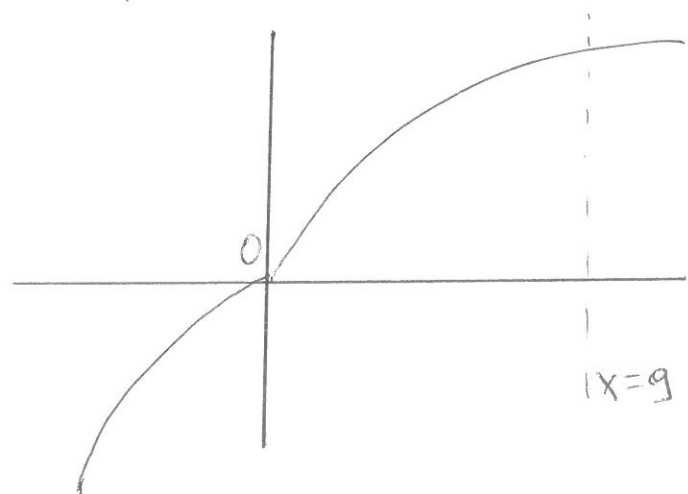
αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x}-1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-e^{-x}}{1} = -1.$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{3}x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3}\sqrt{x} = 0.$

οπότε $F'(0) = 0 = f(0)$

Συνεπώς $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}.$

Εμβαδόν C_f , $x'x$ και $x=g.$



$$\begin{aligned} E(\underline{c}) &= \int_0^g |f(x)| dx = \\ &= \int_0^g f(x) dx = \int_0^g \sqrt{x} dx = \\ &= \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_0^g = \frac{2}{3} g \cdot 3 = 18 \text{ T.μ.} \end{aligned}$$

$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς $f(0) = 3$.

$$g(x) = f(x) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}$$

$$|f(x) - f(y) - e^x + e^y| \leq |x - y|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Δι. Ν.δ.ο. $f(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$.

Είναι $|f(x) - f(y) - e^x + e^y| \leq |x - y|^2$ θεω $y = x_0$.

$$|f(x) - f(x_0) - e^x + e^{x_0}| \leq |x - x_0|^2$$

θεωρω $\varphi(x) = f(x) - e^x$ οηοτε

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq |x - x_0|^2$$

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \right| \leq |x - x_0|$$

$$-|x - x_0| \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \leq |x - x_0|$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} (-|x - x_0|) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} (|x - x_0|) = 0$ } αηο κριτεριο παρεμβολης
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = 0$ η $\varphi'(x_0) = 0$
 αρα $\varphi'(x_0) = 0$, για καθε $x_0 \in \mathbb{R}$ αρα

η φ σταθερη στο $\mathbb{R}$.

$$\varphi(x) = C$$

$$f(x) - e^x = C$$

$$x = 0$$

$$f(0) - e^0 = C$$

$$3 - 1 = C \Leftrightarrow C = 2$$

$$\varphi(x) = 2$$

$$f(x) - e^x = 2$$

$$f(x) = e^x + 2 \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ2. g κυρτή $\mathbb{R}$.

$$g(x) = f(x) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}$$

$$g(x) = e^x + 2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}$$

$$g'(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x$$

Είναι $e^x \geq x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 " = " για $x=0$

$$g''(x) = e^x - x - 1 > 0 \quad \text{για κάθε } x \neq 0$$

αρα g κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ν.δ.ο. ισχύει

$$g'(x) + g(x) < g(x+1) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Θ.Μ.Τ για την g στο $[x, x+1]$

$$\xi \in (x, x+1) \quad \text{τ.ω} \quad g'(\xi) = \frac{g(x+1) - g(x)}{x+1 - x} \in \mathbb{R}$$

$$g'(\xi) = g(x+1) - g(x).$$

$x < \xi < x+1$ g κυρτή $g' \uparrow$.

$$g'(x) < g'(\xi)$$

$$g'(x) < g(x+1) - g(x)$$

$$g'(x) + g(x) < g(x+1)$$

Δ3. Ν.δ.ο. η εφαπτομένη της C_f στο $A(0, f(0))$
 εφαπτεται και στην C_g στο ίδιο σημείο.

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(0, f(0))$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - 3 = x$$

$$y = x + 3$$

$$f(x) = e^x + 2$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f(0) = 3 \quad f'(0) = 1$$

Εστω $M(x_0, g(x_0))$ το σημείο ελαφνής
 ηρεμείας $\left. \begin{array}{l} g(x_0) = x_0 + 3 \\ g'(x_0) = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} e^{x_0} + 2 - \frac{x_0^3}{6} - \frac{x_0^2}{2} = x_0 + 3 \\ e^{x_0} - \frac{x_0^2}{2} - x_0 = 1. \end{array}$

$$2e^{x_0} - x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0$$

Θεωρώ $k(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2 \quad x \in \mathbb{R}$

$$k(0) = 0 \quad \text{και} \quad k'(x) = 2e^x - 2x - 2 =$$

$$2(e^x - x - 1) > 0.$$

άρα η $k \nearrow$ άρα
 $x=0$ μοναδική ρίζα.

Οηοζε $x_0 = 0$ και $e^0 + 2 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$ ισχυει.
 άρα η $\gamma = x + 3$ εφαπτομένη στο C_g
 στο $M(0, 3)$.

Δ4. $E(\underline{\quad}) = ? \quad C_g \quad \gamma = x + 3 \quad x = 1.$

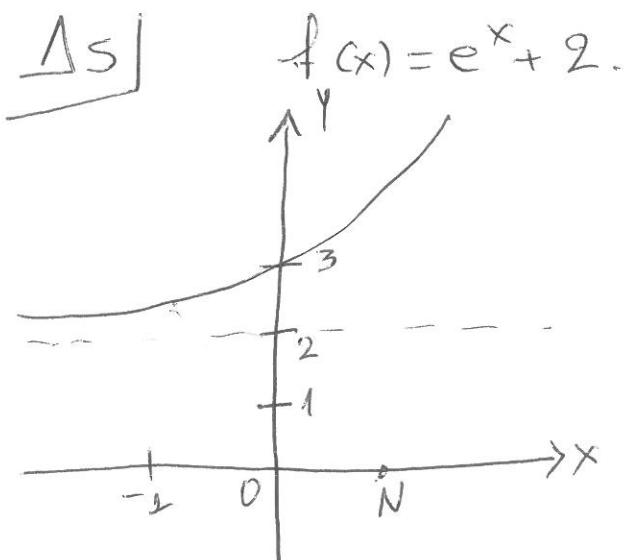
Η g κυρτή άρα $g(x) \geq x + 3$. οηοζε
 $E(\underline{\quad}) = \int_0^1 |g(x) - (x + 3)| dx = \int_0^1 (g(x) - x - 3) dx =$

$$= \int_0^1 \left(e^x + 2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 3 \right) dx =$$

$$\left[e^x - \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 =$$

$$e - \frac{1}{24} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - 1 - 1 = e - \frac{1}{24} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - 2 =$$

$$e - \frac{1 + 4 + 12 + 48}{24} = \left(e - \frac{65}{24} \right) \text{ τ.μ.}$$



Εστω $M(x, y)$ το
σημείο.

$$\begin{aligned} d(M, N) &= \sqrt{(x-1)^2 + (e^x+2)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 - 2x + 1 + e^{2x} + 4e^x + 4} = \\ &= \sqrt{e^{2x} + 4e^x + x^2 - 2x + 5} \end{aligned}$$

$$d(x) = \sqrt{e^{2x} + 4e^x + x^2 - 2x + 5} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$d'(x) = \frac{2e^{2x} + 4e^x + 2x - 2}{2\sqrt{e^{2x} + 4e^x + x^2 - 2x + 5}} = \frac{e^{2x} + 2e^x + x - 1}{\sqrt{e^{2x} + 4e^x + x^2 - 2x + 5}}$$

Θεωρώ $k(x) = e^{2x} + 2e^x + x - 1 \quad x \in \mathbb{R}.$

$$k'(x) = 2e^{2x} + 2e^x + 1 > 0 \quad \text{άρα η } k \uparrow.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} + 2e^x + x - 1) = -\infty$$

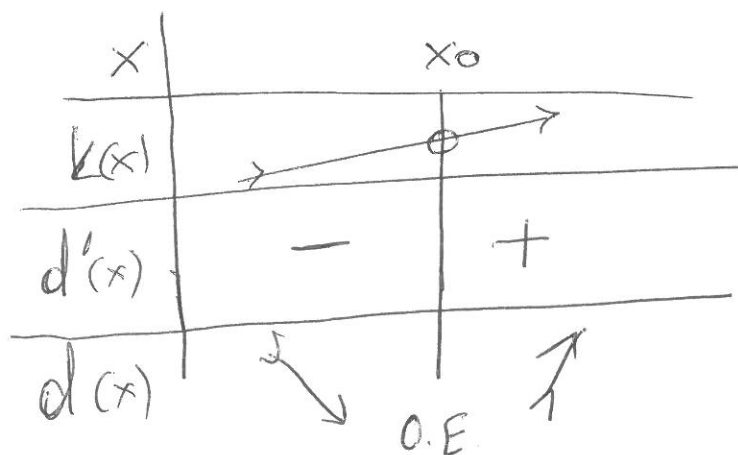
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} + 2e^x + x - 1) = +\infty$$

άρα το σύνολο Τιμών της k είναι

$$k(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$0 \in k(\mathbb{R})$ άρα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τ.ω

$k(x_0) = 0$ και η $k \uparrow$ άρα μοναδικό



$$\begin{array}{ll}
 x < x_0 & \nearrow \quad x > x_0 \searrow \\
 L(x) < L(x_0) & L(x) > L(x_0) \\
 L'(x) < 0 & L'(x) > 0
 \end{array}$$

$L(x)$ συνεχής στο $[-1, 0]$

$$\begin{aligned}
 L(-1) &= e^{-2} + 2e^{-1} - 2 = \frac{1}{e^2} + \frac{2}{e} - 2 = \frac{1 + 2e - 2e^2}{e^2} = \\
 &= \frac{2e(1-e) + 1}{e^2} < 0
 \end{aligned}$$

$$L(0) = 1 + 2 + 0 - 1 = 2 > 0$$

οηότες $L(-1) L(0) < 0$

Σύμφωνα με το θ. Bolzano υπάρχει

1 του $\exists x_0 \in (-1, 0)$ τ.ω $L(x_0) = 0$ και η

$L \nearrow$ άρα μοναδικό