

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΡΓΑΣΙΑ 3: ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

ΘΕΜΑ 1

1 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$, τότε να βρείτε :

- α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ β) $\vec{\beta}^2$ γ) $3\vec{\alpha} \cdot (-4\vec{\beta})$ δ) $2\vec{\alpha}(3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$ ε) $(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})(3\vec{\alpha} + 5\vec{\beta})$

2 Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ τότε να βρείτε :

- α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ β) $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ γ) $(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2$

3 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}, |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$, τότε να βρείτε :

- α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ β) $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$ γ) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$ δ) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})(4\vec{\alpha} - 5\vec{\beta})$

4 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\beta}| = \sqrt{12}, \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -12$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 150^\circ$ να βρείτε :

- α) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$
β) το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

5 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 4, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = 28$ τότε να βρείτε :

- α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$
γ) το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})(2\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

ΘΕΜΑ 2

6 Αν $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 6$, να βρείτε το λ ώστε τα διανύσματα $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ και $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

7 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$.

Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ ώστε να ισχύει $(\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$

8 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$ τότε :

- α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$
β) Να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

9 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{5\pi}{6}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ τότε :

- α) Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{u}$
β) Να βρείτε το μέτρο του $\vec{u}$

10 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $3|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 9$ και $2|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$

- α) Να βρείτε τα μέτρα των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

11. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$ και $\vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$

- α) Να δείξετε ότι $\kappa = -2$
β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$
γ) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα

12. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $|3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| = \sqrt{13}$, τότε να βρείτε το $|\vec{\beta}|$

ΘΕΜΑ 3

- 13 Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$, $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $\vec{u} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, να βρείτε την γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{u})$
- 14 Αν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta})$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$
- 15 Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 45^\circ$, να βρείτε τη γωνία $(\vec{\beta} - \vec{\alpha}, \vec{\alpha})$
- 16 Αν $|\vec{\alpha}| = 5$, $|\vec{\beta}| = 3$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$, να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} - \vec{\beta})$
- 17 Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\delta} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, να βρείτε την γωνία $(\vec{\beta}, \vec{\delta})$

ΘΕΜΑ 4

- 18 Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο στις παρακάτω περιπτώσεις :
- α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ αν $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = (4, 5)$
 β) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ αν $A(3, 1)$, $B(2, -5)$, $\Gamma(-4, 3)$, $\Delta(-1, -2)$
- 19 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, \lambda)$ και $\vec{\beta} = (\lambda - 8, 1)$ για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$. Να βρείτε :
- α) τον πραγματικό αριθμό λ
 β) το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$
- 20 Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda - 3, 4\lambda - 1)$ και $\vec{\beta} = (-3\lambda + 9, \lambda - 3)$ να είναι κάθετα.
- 21 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2x - 1, x + 1)$ και $\vec{\beta} = (x + 1, 2x + 3)$. Να βρεθεί το $x \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα να είναι κάθετα.
- 22 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -\frac{1}{2})$
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$
 β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v} = (x^2, x - 1)$ είναι κάθετα

ΘΕΜΑ 5

- 23 Αν $\vec{\alpha} = (4, 3)$ και $\vec{\beta} = (7, -1)$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$
- 24 Αν $\vec{\alpha} = (0, 2)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$
- 25 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -7)$ και $\vec{\beta} = (-3, \lambda)$. Αν $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 135^\circ$, να βρείτε το λ .
- Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, 2)$, $B(-2, 1)$ και $\Gamma(3, 6)$. Να βρείτε τη γωνία A .
- 26 Αν $A(4, 1)$, $B(8, 2)$ και $\Gamma(1, 3)$, να δείξετε ότι η γωνία των $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ είναι αμβλεία.