

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΡΓΑΣΙΑ 5: ΕΞΙΣΩΣΗ $AX+BY+Γ=0$

Ασκήσεις ίδιας μεθοδολογίας με την παράγραφο 2.1 με τη διαφορά ότι η εξίσωση ευθείας αναγράφεται $αχ+βψ+γ=0$

1. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης των ευθειών με εξισώσεις :
 - i. $(ε) : 3x + y - 8 = 0$
 - ii. $(ζ) : 4x - y + 4 = 0$
 - iii. $(η) : 5x + 2y + 1 = 0$
 - iv. $(θ) : 2x - 5y + 3 = 0$ Ποιες από τις παραπάνω ευθείες είναι κάθετες;
2. Δίνεται ευθεία $(ε) : 3x + y - 1 = 0$. Να βρείτε :
 - i. Ευθεία $(ζ)$ που είναι κάθετη στην $(ε)$ και διέρχεται από το σημείο $A(-2,-3)$
 - ii. Το σημείο τομής των ευθειών $(ε)$ και $(ζ)$
3. Δίνονται οι ευθείες $ε : 3x + y + 3 = 0$, $δ : x + 2y - 4 = 0$.
 - α) Να βρείτε το σημείο τομής A των ευθειών $ε$ και $δ$
 - β) Αν η ευθεία $(ε)$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B και η ευθεία $(δ)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $Γ$ τότε :
 - β₁) τις συντεταγμένες των σημείων B και $Γ$
 - β₂) την εξίσωση της ευθείας $BΓ$
4. Σε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ οι πλευρές του AB και AD βρίσκονται πάνω στις ευθείες $2x + y + 2 = 0$ και $x - 2y + 6 = 0$ αντίστοιχα. Αν το κέντρο του είναι το $K(-1, -2)$, να βρείτε :
 - α) τις συντεταγμένες του A και του $Γ$
 - β) την εξίσωση της πλευράς $ΓΔ$ και την κορυφή $Δ$.
5. Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου $A(-1,3)$ ως προς την ευθεία $(ε) : x-y+6=0$.
6. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τους άξονες και την ευθεία $(ε) : 3x+4y-12=0$.
7. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών $(ε)$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $(ζ) : 2x-3y+5=0$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 3τμ.

Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας $AX+BY+Γ=0$

8. Έστω η εξίσωση $(3 - λ)x + (4 - λ)y + λ = 0$ (1) όπου $λ$ πραγματικός αριθμός.
 - α) Να δείξετε ότι για κάθε $λ$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.
 - β) Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.
 - γ) Να βρείτε το $λ$ ώστε η ευθεία που έχει εξίσωση την (1) να είναι παράλληλη στην ευθεία $δ: 4x + 2y + 13 = 0$.
9. Έστω η εξίσωση $(3 + λ)x + λy + λ - 4 = 0$ (1) όπου $λ$ πραγματικός αριθμός.
 - α) Να δείξετε ότι για κάθε $λ$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.
 - β) Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.
 - γ) Να βρείτε το $λ$ ώστε η ευθεία που έχει εξίσωση την (1) να είναι κάθετη στην ευθεία $δ: x - 3y - 7 = 0$.

10. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 4)x + (\lambda^2 + 2\lambda - 8)y + \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1):
- Παριστάνει ευθεία
 - Παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$
 - Παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$
 - Παριστάνει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων
11. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 + 2\lambda - 8)x + (\lambda^2 - 4)y + \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :
- η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \neq 2$
 - όλες οι ευθείες της μορφής (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.
12. Δίνεται η εξίσωση $(x + y - 5) + \lambda(2x + y - 7) = 0$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :
- η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
 - όλες οι ευθείες της μορφής (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Σχετική θέση δύο ευθειών

13. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda + 3)y - 6 = 0$ και $\varepsilon_2 : (\lambda - 1)x + (\lambda + 2)y - 3 = 0$
- Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο για κάθε λ πραγματικό αριθμό.
 - Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του λ , το σημείο τομής M των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ κινείται πάνω σε ευθεία.
14. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\lambda - 1)x + \lambda y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : (\lambda - 2)x + (\lambda - 1)y - 1 = 0$
- Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο για κάθε λ πραγματικό αριθμό.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 5
15. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda + 1)y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : (\lambda - 2)x + \lambda y - 1 = 0$.
- Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο για κάθε λ πραγματικό αριθμό.
 - Να βρείτε το λ , ώστε η ευθεία $\zeta : 3x + 2y + 3 = 0$ να διέρχεται από το μοναδικό κοινό σημείο των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.
16. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda - 3)y - 5 = 0$ και $\varepsilon_2 : (\lambda - 3)x + (\lambda - 4)y + 2 = 0$.
Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει
- $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$
 - $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$
17. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\lambda - 1)x + \lambda y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : (\lambda^2 - 1)x - (\lambda + 2)y - 3\lambda + 2 = 0$.
Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$
18. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : (3\lambda + 2)x + (\lambda + 1)y + \lambda - 7 = 0$ και $\varepsilon_2 : (\lambda + 1)x - 4\lambda y + 2\lambda = 0$.
Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$
19. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = 2x - 5$ και $\varepsilon_2 : y = -3x - 1$
20. Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1 : x + 7y - 5 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3x - 4y + 10 = 0$
21. Οι ευθείες $\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda - 1)y - 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : \mu x + (\mu + 1)y + 6 = 0$ τέμνονται στο σημείο $K(1, -2)$.
Να βρείτε :
- τους αριθμούς λ και μ
 - την οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2 .
22. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \alpha x + y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : 5x - 3y + 8 = 0$. Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2 να σχηματίζουν οξεία γωνία ίση με 45° .

Εξίσωση της μορφής $Ax^2 + B\psi^2 + \Gamma\chi\psi + \Delta\chi + E\psi + Z = 0$

23. Δίνεται η εξίσωση $6x^2 - y^2 = xy$ (1).

- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δυο ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.
- ii. Να βρείτε τη γωνία των δυο αυτών ευθειών.

24. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2y^2 - xy - 3x + 9y - 4 = 0$ (1). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δυο ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

25. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y - 3 = 0$ (1).

- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δυο παράλληλες ευθείες ϵ_1, ϵ_2
- ii. Έστω ότι οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα και έστω M το μέσο του AB. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από το M και είναι παράλληλη στις ϵ_1, ϵ_2 .

26. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 2y^2 - 3xy - 7x - y + 3 = 0$ (1).

- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δυο ευθείες, οι οποίες είναι κάθετες
- ii. Να βρείτε το σημείο τομής των δυο ευθειών.