

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΡΓΑΣΙΑ 7: ΚΥΚΛΟΣ

Εύρεση εξίσωσης Κύκλου

1. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου C όταν:
 - α. έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $A(2, 7)$ και $B(-6, 5)$
 - β. έχει κέντρο το σημείο $K(-1, 0)$ κι εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon : x + 3y - 4 = 0$
 - γ. διέρχεται απ' τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(2, 3)$.

ΘΕΜΑ Α

Δίνονται τα σημεία $A(-3, 2)$, $B(6, -4)$ και $\Gamma(-5, -1)$

- α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A
- β) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$

Εξίσωση εφαπτομένης Κύκλου

2. Δίνεται ο κύκλος $C : (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$ και το σημείο $A(5, 1)$.

- α. Να δείξετε ότι το σημείο $A(5, 1)$ ανήκει στον κύκλο.
- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο A .

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο $A(10, -4)$

Εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$

3. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$ (1).

- α. Να δείξετε ότι η (1) παριστά κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ .
- β. Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon : 3x + y - 5 = 0$ εφάπτεται στον κύκλο και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda + 2)y + \lambda - 1 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ το κέντρο του κύκλου της (1) ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : 2x - 5y - 8 = 0$

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ακτίνα του κύκλου της (1) είναι $2\sqrt{5}$

Εφαπτομένη που άγεται από σημείο

4. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο $P(4, -2)$.

α. Να βρεθεί η σχετική θέση του σημείου P ως προς τον κύκλο C .

β. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται απ' το P .

γ. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο εφαπτομένων.

Σχετική θέση κύκλων - ευθειών

5. Δίνονται οι κύκλοι μ' εξισώσεις $C_1 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$ και

$C_2 : x^2 + (y+1)^2 = 9$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου C_1 στο σημείο του

$A(5, -1)$ εφάπτεται και στον κύκλο C_2 .

ΘΕΜΑ Δ

Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου $C : x^2 + y^2 - 2x = 0$ ως προς τις ευθείες :

α) $\varepsilon : 3x - 4y + 3 = 0$

β) $\delta : 3x - 4y + 1 = 0$

γ) $\zeta : 3x - 4y + 2 = 0$

ΘΕΜΑ Ε

Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ και $C_2 : x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$

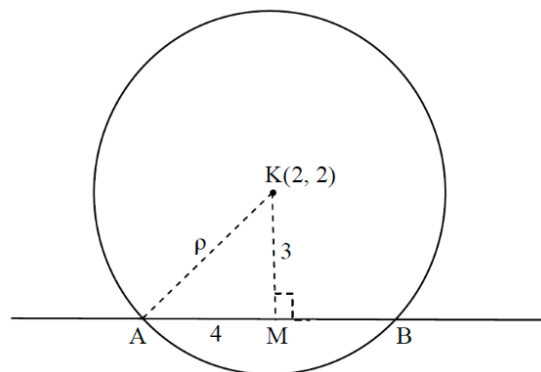
α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων

β) Να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται

γ) Να βρείτε την κοινή χορδή των δύο κύκλων

Κύκλος που αποκόπτει χορδή

6. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(2, 2)$ κι αποκόπτει απ' την ευθεία $\varepsilon : 3x + 4y + 1 = 0$ χορδή μήκους 8.

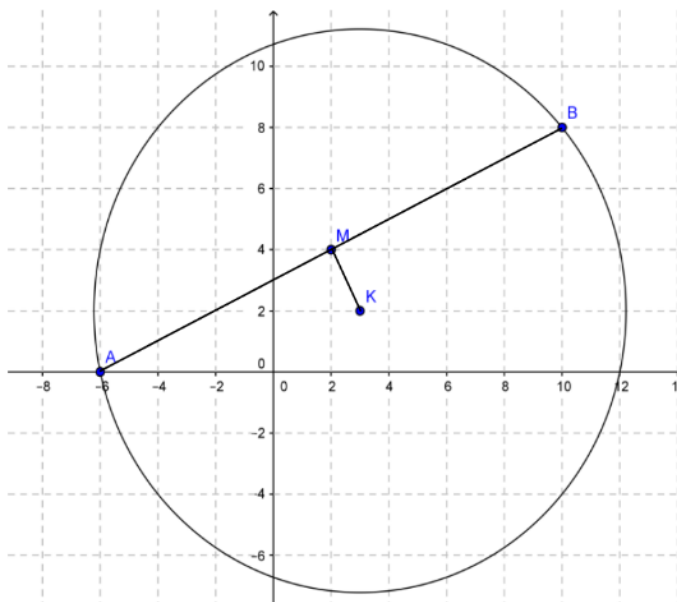


Κύκλος που εφάπτεται στους άξονες

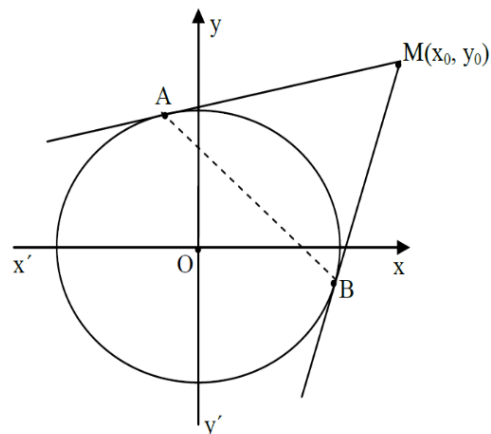
7. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά απ' τις παρακάτω περιπτώσεις:
- α. ο κύκλος έχει ακτίνα $\rho=6$, εφάπτεται στον άξονα $x'x$ και διέρχεται απ' το σημείο $A(2, 6)$
 - β. ο κύκλος έχει κέντρο $K(-4, 5)$ κι εφάπτεται του άξονα $y'y$
 - γ. ο κύκλος έχει κέντρο $K(2, -2)$ κι εφάπτεται στους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Κύκλος και μέσον χορδής

8. Έστω ο κύκλος $C : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 85$ και το σημείο $M(2, 4)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε , η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία A και B και το σημείο M είναι το μέσο της χορδής AB .



9. Από το σημείο $M(x_0, y_0)$ εκτός του κύκλου $C : x^2 + y^2 = \rho^2$ φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενες του. Αν A, B είναι τα σημεία επαφής, να δείξετε ότι η χορδή AB έχει εξίσωση $xx_0 + yy_0 = \rho^2$.



Η ευθεία AB ονομάζεται **πολική** του M ως προς τον κύκλο C και το σημείο M **πόλος** της ευθείας AB ως προς τον κύκλο C .