

ΕΡΓΑΣΙΑ 7 ΚΥΚΛΟΣ

Εύρεση Εξίσωσης Κύκλου

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και
α) διέρχεται από το σημείο $M(-6, 8)$
β) εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon : 2x - y + 5 = 0$
2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και
α) διέρχεται από το σημείο $M(-1, 2)$
β) εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon : 3x - 4y + 15 = 0$
3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και
α) διέρχεται από το σημείο $M(-2, 1)$
β) εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon : 4x - 3y + 10 = 0$
4. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(0, -3)$
και εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon : 5x - 12y - 10 = 0$
5. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(1, 2)$ και
εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon : 4x + 3y + 5 = 0$
6. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που είναι ομόκεντρος του κύκλου
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3$ και εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon : 3x - 4y + 4 = 0$
7. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το τμήμα AB
με $A(5, -1)$ και $B(-1, 7)$
8. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(5, -3)$ και εφάπτεται στον :
α) άξονα $x'x$ β) άξονα $y'y$
9. Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$
με $A(-2, 1)$, $B(1, 0)$ και $\Gamma(1, 4)$

- ### Η Εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$

12. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο τη διάκεντρο των κύκλων $C_1: 4x^2 + 4y^2 = 1$ και $C_2: (x-1)(x+3) + y(y-2) = 0$
13. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(1, 1)$, $E(0, 2)$ και $Z(-1, 1)$ και να αποδείξετε ότι ο κύκλος αυτός εφάπτεται στον άξονα x'
14. Να αποδείξετε ότι καθένας από τους κύκλους $C_1: x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$, $C_2: x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$ διέρχεται από το κέντρο του άλλου.
15. Να βρεθεί η εξίσωση ενός κύκλου που είναι ομόκεντρος με τον $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ και :
α) έχει διπλάσια ακτίνα από αυτόν
β) εφάπτεται της ευθείας $y = -x + 1$
γ) διέρχεται από το σημείο $A(3, 4)$
16. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ (1)
α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
β) Να βρείτε την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται η διάμετρος του προηγούμενου κύκλου που είναι κάθετη στην $\zeta: 2x + y + 2017 = 0$
γ) Να βρείτε τα άκρα της παραπάνω διαμέτρου
17. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις παριστάνει κύκλο και μετά, να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα τους.
α) $x^2 + y^2 + 2\lambda x - 4\lambda y + 6\lambda^2 - 1 = 0$ β) $x^2 + y^2 + 2\lambda y - \lambda - 1 = 0$
18. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 1 = 0$ (1)
α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η (1) να παριστάνει κύκλο
β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την (1)
19. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda + 2)y + \lambda - 1 = 0$ (1)
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
β) Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ το κέντρο του κύκλου της (1) ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 2x - 5y - 8 = 0$
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ακτίνα του κύκλου της (1) είναι $2\sqrt{5}$
20. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (\lambda - 1)x + (3 - \lambda)y - 2\lambda - 1 = 0$ (1)
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων της (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ανήκουν σε ευθεία
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ο κύκλος της (1) έχει ακτίνα ίση με 4

21. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 1 = 0$ (1)

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η (1) να παριστάνει κύκλο

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την (1)

22. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda + 2)y + \lambda - 1 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ το κέντρο του κύκλου της (1) ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 2x - 5y - 8 = 0$

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ακτίνα του κύκλου της (1) είναι $2\sqrt{5}$

23. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (\lambda - 1)x + (3 - \lambda)y - 2\lambda - 1 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων της (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ανήκουν σε ευθεία

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ο κύκλος της (1) έχει ακτίνα ίση με 4

24. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + (2 - \lambda)y + \lambda + 7 = 0$ (1)

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η (1) να παριστάνει κύκλο

β) Έστω ότι η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου το κέντρο Κ απέχει από την $\varepsilon: 3x + 4y + 5 = 0$ απόσταση $\frac{2}{5}$

Να βρείτε το λ , καθώς και την εξίσωση του κύκλου C που είναι ομόκεντρος με τον κύκλο της εξίσωσης (1) και διέρχεται από το σημείο $A(-5, 2)$

25. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4\lambda^2 = 4\lambda(x + y)$ (1)

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η (1) να παριστάνει κύκλο. Ποιο το κέντρο και ποια η ακτίνα του κύκλου;

β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων της (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ανήκουν σε ευθεία

γ) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται στους άξονες $x'x$ και $y'y$

Εύρεση Εφαπτομένης κύκλου

26. Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ που είναι κάθετες στην ευθεία $\delta: x + 2y - 21 = 0$

27. Δίνεται ο κύκλος C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην ευθεία $\delta: 3x - 4y - 50 = 0$.

Να βρείτε:

α) την εξίσωση του κύκλου C

β) τις εφαπτόμενες του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο $K(-10, 20)$

28. Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 20$ όταν:

α) είναι παράλληλες στην ευθεία $\delta: 2x + y - 2017 = 0$

β) διέρχονται από το σημείο $M(-2, 6)$

29. Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 10$ όταν:

α) είναι παράλληλες στην ευθεία $\delta: 3x - y + 7 = 0$

β) διέρχονται από το σημείο $M(10, 0)$

30. Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 20$ που σχηματίζουν με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο με εμβαδό ίσο με 25 τ.μ.

Σχετικές Θέσεις Κύκλων

31. Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 4$ ως προς:

α) το σημείο $M(1, 3)$

β) την ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y - 5 = 0$

γ) τον κύκλο $C_1: (x - 3)^2 + y^2 = 1$

32. Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου $C: x^2 + y^2 - 4y = 0$ ως προς τα σημεία $A(\sqrt{3}, 3), B(1, 3), \Gamma(2, 1)$

33. Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου $C: x^2 + y^2 - 2x = 0$ ως προς τις ευθείες:

α) $\varepsilon: 3x - 4y + 3 = 0$

β) $\delta: 3x - 4y + 1 = 0$

γ) $\zeta: 3x - 4y + 2 = 0$

34. Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ και $C_2 : x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$
 α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων
 β) Να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται
 γ) Να βρείτε την κοινή χορδή των δύο κύκλων

Γεωμετρικοί Τόποι

35. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων $C : x^2 + y^2 + (4\lambda + 8)x - (12\lambda - 28)y - 15 = 0$
 36. Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(3, 2)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $|\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2 = 4$
 37. Δίνονται τα σημεία $A(4, -3)$ και $B(-2, -5)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $|\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2 = 70$
 38. Δίνονται τα σημεία $A(4, -1)$ και $B(-2, 7)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία το τρίγωνο AMB είναι ορθογώνιο στο M .
 39. Δίνονται τα σημεία $A(x, y)$, $B(3, 2)$ και $\Gamma(1, 0)$. Αν τα σημεία αυτά σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με υποτεινούσα τη $B\Gamma$, τότε:
 α) να αποδείξετε ότι το σημείο A κινείται σε κύκλο
 β) να βρείτε το A ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές

ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΡΑΠΕΖΑ

15028. Έστω κύκλος C με κέντρο $K(1, 2)$ και ακτίνα $\rho=2$ και ευθεία (ε) με εξίσωση $3x + 4y - 1 = 0$.

- α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C . (Μονάδες 8)
 β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου $K(1, 2)$ από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2. (Μονάδες 9)
 γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C . (Μονάδες 8)

15680. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ με κέντρο $K(1, 2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y + 1 = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho = 2$. (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι $\frac{12}{5}$. (Μονάδες 10)
 γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 5)

15994. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ (1).

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 13)
 β) Να σχεδιάσετε τον κύκλο και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες. (Μονάδες 12)

16773.α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $O(0, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$. (Μονάδες 08)

β) Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$.

- i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο A . (Μονάδες 09)
 ii. Να βρεθεί το σημείο B , το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του A σε αυτόν τον κύκλο. (Μονάδες 08)

18241. Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

α) τον κύκλο C . (Μονάδες 9)

β) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον $y'y$ και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 8)

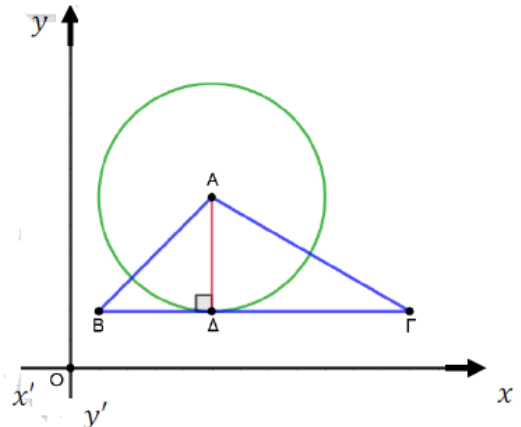
γ) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον xx' και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 8)

18749. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ ώστε $A(5, 6)$, $B(1, 2)$, $\Gamma(12, 2)$ και το ύψος του AD , όπου D σημείο της $B\Gamma$, όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $B\Gamma$ και AD . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου D . (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο A , ο οποίος εφάπτεται της ευθείας $B\Gamma$ στο σημείο D . (Μονάδες 10)



19039. Δίνεται η εξίσωση $(x-1)(x+3) + (y+1)(y-3) = -4$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1, 1)$ και ακτίνα $R = 2$. (Μονάδες 9)

β) i. Να βρείτε τα σημεία A και B του κύκλου (K, R) τα οποία έχουν τετμημένη ίση με -1 . (Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά. (Μονάδες 8)

20890. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(3, -3)$, $B(2, -8)$ και $\Gamma(7, -3)$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 10)

β) την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το A και εφάπτεται στην πλευρά $B\Gamma$. (Μονάδες 15)

21962. Δίνονται τα σημεία $A(0, 3)$, $B(3, 4)$ και $\Gamma(1, 0)$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το μέσο K της υποτεινουσας $B\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A , B και Γ . (Μονάδες 7)

21965. Δίνονται τα σημεία $A(2, -4)$ και $B(0, -2)$

α) Να βρείτε το μέσο M του τμήματος AB . (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος AB . (Μονάδες 5)

γ) Αν (ζ): $y = x - 4$ και (ϵ): $y = 2x - 6$, τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ζ), (ϵ).

(Μονάδες 9)

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A , B και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία (ϵ) είναι η $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$. (Μονάδες 7)

22147. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0$ (1).

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $R = 2$. (Μονάδες 9)
- β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ είναι σημείο του κύκλου (K,R). (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (K,R) στο A. (Μονάδες 8)

22172. Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y = 0$ και το σημείο $A(-2, 1)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου A από την ευθεία είναι 2. (Μονάδες 08)
- β) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (η) κάθετης στην (ε) που διέρχεται από το σημείο A. (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο A και εφάπτεται στην ευθεία (ε). (Μονάδες 07)

22279. Δίνεται η εξίσωση $(y-1)^2 = (3+x)(1-x)$ (1). Να αποδείξετε ότι:

- α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1, 1)$ και ακτίνα $R = 2$. (Μονάδες 9)
- β) Η αρχή $O(0, 0)$ των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K,R). (Μονάδες 7)
- γ) Η ευθεία (ε): $x + y = 2$ είναι τέμνουσα του κύκλου (K,R). (Μονάδες 9)