

ΑΛΓΕΒΡΑ Β

Κεφάλαιο 4^ο Πολυώνυμα

Πολυώνυμα

1. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^4 + (\lambda^2 + 2\lambda)x + \lambda + 2$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
2. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 2\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x + \frac{\lambda}{2} - 1 = 0$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
3. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε να είναι ίσα τα πολυώνυμα $P(x) = (\lambda^2 - 4)x^3 + (\lambda^2 + 2\lambda)x^2 - \lambda^2 x + 3\lambda - 8$ και $Q(x) = (3\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + \lambda - \lambda^2$.
4. Να βρεθούν οι τιμές των κ, λ, μ ώστε να είναι ίσα τα πολυώνυμα $P(x) = (2\kappa - 2\lambda)x^2 + (\kappa + \lambda)x + (2\mu - 2)$ και $Q(x) = (\mu + \lambda + 1)x^2 + \mu x + 2\lambda$
5. Να βρείτε τα α, β, γ έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 4x^2 - 2x + 1$ να παίρνει τη μορφή $P(x) = \alpha x(x - 3) + (\beta + 2)x + \gamma - 1$
6. Να προσδιοριστεί ο βαθμός του πολυώνυμου $P(x) = (\lambda^2 + 5\lambda + 9)x^2 + (\lambda - 3)x + (\lambda^2 - 1)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
7. Να προσδιοριστεί, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ο βαθμός του πολυώνυμου :
 $P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x^2 + (\lambda^2 + 1)x + 2$
8. Δίνεται το πολυώνυμο : $P(x) = (\lambda^3 - \lambda)x^2 + (\lambda^2 + \lambda)x + \lambda^2 - 2\lambda - 3$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το $P(x)$ είναι :
i. είναι σταθερό πολυώνυμο, ii. είναι μηδενικό πολυώνυμο, iii. έχει βαθμό μηδέν.
9. Έστω τα πολυώνυμα $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 8$ και $Q(x) = \alpha x^3 - \beta x^2 + \gamma x - \delta$. Να βρείτε τι πρέπει να ισχύει για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ώστε το πολυώνυμο $P(x) - Q(x)$ να είναι :
i. 3^{ου} βαθμού ii. το πολύ 2^{ου} βαθμού iii. Μηδενικό πολυώνυμο.
10. Να βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η αριθμητική τιμή του πολυώνυμου $P(x) = (\lambda^2 + 4\lambda)x^3 - (1 + \lambda)x^2 + (3\lambda + 2)x + 3$ για $x = -2$ να είναι 5.
11. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 4, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(1 - 3x)$ έχει ρίζα τον αριθμό -1.
12. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί -3 και 2 είναι ρίζες του πολυώνυμου $P(x) = -3x^2 + 5x + 2$
13. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \kappa x^2 + (\lambda - 2)x + 6$ έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 2.

14. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο $P(x) = (2\lambda^2 - 3)x^3 + 4\lambda x^2 - (\lambda - 5)x + 2005$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.
15. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$ έχει ρίζα τον αριθμό 2 και το άθροισμα των συντελεστών του είναι 8. (Υπόδειξη : Για να βρούμε το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$, υπολογίζουμε το $P(1)$)
16. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x-1)^{2017} - x^{2018}$. Να βρείτε :
i. τον σταθερό όρο του $P(x)$ ii. το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$.
17. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa - 1)x^3 + \kappa x^2 - (3\kappa - \lambda)x + 3\lambda$. Να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$ να έχει ρίζα το 2 και η αριθμητική τιμή του για $x = -1$ να είναι 6.
18. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει : $(3x-1) \cdot P(x) = 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3$.
19. Έστω το πολυώνυμο $P(x)$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι :
 $P(2x+1) = 3P(x) + 2$ για κάθε και $P(0) = 0$ Να δείξετε ότι $P(15) = 80$.
20. Βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:
 $(x-3)P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.
21. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + (\alpha - 1)x + 2\alpha$ έχει ρίζα το -1, να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει για το $K(x) = x^3 + 4x^2 + (\alpha^2 - 1)x$.
22. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ είναι: $P(3x+5) = x^3 - x^2 + 12$, να δείξετε ότι το -1 είναι ρίζα του $P(x)$.
23. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ως ρίζα το 1, να δείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(x^2 - 3) + (x-2)P(3x)$ έχει ρίζα το 2.
24. Να βρεθεί το πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού, το οποίο να έχει ρίζα το 0 και να ικανοποιεί τη σχέση: $P(x-1) = P(x) - x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
25. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + 2x + 5$. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός α αν ισχύει $P(\alpha - 1) = 13$.
26. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^2 - (2\alpha + 1)x + 2\beta$ και $Q(x) = x^2 - (\beta + 2)x + 5\alpha$. Προσδιορίστε τους α, β αν ο αριθμός 3 είναι κοινή ρίζα των $P(x)$ και $Q(x)$.
27. Το πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο για κάθε πραγματικό αριθμό x ικανοποιεί την ταυτότητα $xP(x) = (x-3)P(x+1)$ έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες. Βρείτε τρεις από τις ρίζες αυτές.

Διαίρεση Πολυωνύμων

1. Να γίνουν οι διαιρέσεις και να γραφεί σε κάθε περίπτωση η ταυτότητα της διαίρεσης:

$$A) (x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1) : (x^2 - x + 1) \quad B) (2x^3 + 3x^2 + 3x + 1) : (2x + 1)$$

$$\Gamma) (2x^5 - x^3 + 2x^2 - 9) : (x^2 - 1) \quad \Delta) (x^4 - x^2 + 1) : (x^2 - 1)$$

$$E) (x^4 - 7x^3 + 2x - 15) : (x^3 + 5) \quad \Sigma T) (2x^4 + 2x^3 + 3x^2) : (2x^2 + 1)$$

$$Z) (x^4 - 2x^2 + 3x - 2) : (x^2 + x + 1) \quad H) (3x^3 - 4\alpha^2 x + \alpha^3) : (x - 2\alpha)$$

$$\Theta) (3x^3 - 4\alpha x^2 - 8\alpha^3) : (x - 2\alpha) \quad I) (x^3 - \alpha x^2 + 2\alpha^2 x - 8\alpha^3) : (x - 2\alpha)$$

$$IA) (x^4 - \alpha^4) : (x + \alpha) \quad IB) (x^3 - 2\alpha^2 x - 21\alpha^3) : (x - 3\alpha)$$

Οι εκφράσεις:	σημαίνουν:
• Το ρ είναι ρίζα του $P(x)$ • Το $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$ • Το $x - \rho$ διαιρεί το $P(x)$ • Το $P(x)$ διαιρείται από το $x - \rho$ • Η διαίρεση $P(x) : (x - \rho)$ είναι τέλεια. • Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - \rho)$ είναι μηδέν	$P(\rho) = 0$

2. Βρείτε το πολυώνυμο $F(x)$ το οποίο αν διαιρεθεί με το $x^2 + 1$ δίνει πηλίκο $3x - 1$ και υπόλοιπο $2x + 5$.

3. A) Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 - \alpha x + \beta$. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν το πολυώνυμο έχει ρίζες $1, 2$.

B) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + (2\alpha + 1)x^2 + (\alpha - \beta)x + 1$.

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x - 1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$, να είναι 8.

4. Βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν το $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$ διαιρείται ακριβώς με το $x - 2$ και ισχύει $P(1) = 8$.

5. Βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν το $P(x) = x^3 - 2x^2 + \alpha x + \beta$ έχει παράγοντα το $x - 1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x + 2$ είναι 3.

6. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο των παρακάτω διαιρέσεων:
- A) $(x^3 - 2x^2 + 3x - 1) : (x - 2)$ B) $(x^4 - x^2 + x + 1) : (x + 1)$
 Γ) $(3x^4 - 2x^2 + x - 2) : (x - 1)$ Δ) $(x^4 - 3x^2 - 2) : (x + 3)$
 E) $(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x - 14) : (x - 2)$ ΣΤ) $(x^5 - 3x^2 + x + 1) : (x - 1)$
 Ζ) $(x^4 + 1) : (x + 1)$ Η) $(4x^3 - 6x^2 - 15) : (2x - 5)$
 Θ) $(5x^3 + 8x^2 + 6x + 1) : (5x - 2)$ Ι) $(x^6 - x^3 + 3x^2 - 2x - 64) : (x - 2)$
 ΙΑ) $(5x^2 - 2\alpha x - 3\alpha^2) : (x - \alpha)$ ΙΒ) $(x^3 - \alpha x^2 - 3\alpha^2 x + 2\alpha^3) : (x - 2\alpha)$
7. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 5x + 4$. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η διαίρεση του $P(x)$ με το $x+1$ να αφήνει υπόλοιπο 6, ενώ η διαίρεση του με το $x-1$ να αφήνει υπόλοιπο 2.
8. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $x^2 + x - 2$ είναι $3x + 1$ βρείτε το υπόλοιπο των διαιρέσεων: $Q(x) : (x - 1)$ και $Q(x) : (x + 2)$.
9. Αν το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$ διαιρείται με το $x^2 - x - 6$, να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
10. Αν $P(x) = x^4 - x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1$ να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το $P(x)$ διαιρούμενο δια $x^2 - 3x + 2$ να δίνει υπόλοιπο 2.
11. Αν $P(x) = x^3 - 3x^2 + \alpha x + \beta$ να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το $P(x)$ διαιρούμενο δια $x^2 - x - 2$ να δίνει υπόλοιπο $2x - 1$.
12. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης: $(x^{2017} + 4x^{1982} - x^{1999} + 2004x + 1) : (x - 1)$
13. Να αποδείξετε ότι το $(x-2)$ είναι παράγοντας του πολυώνυμου $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 6$
14. Να βρείτε τα $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha - 2)x^3 + \alpha x^2 + 3x - 6$ να διαιρείται με το $(x+2)$.
15. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda x^3 + (2\mu - 1)x^2 + (\lambda - \mu)x + 1$. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x - 1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ να είναι 4.
16. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 3x^2 + 10$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $(x-p)$.

17. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9$, διαιρείται με το $(x-1)(x-3)$ και να βρείτε το αντίστοιχο πηλίκο.
18. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12$, διαιρείται με το $x^2 - 4$ και να βρείτε το αντίστοιχο πηλίκο.
19. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τα οποία το $P(x) = x^3 - (\alpha + 1)x^2 + \beta x + 1$ έχει παράγοντα το $x^2 - 3x + 2$.
20. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24$ έχει παράγοντα το $(x - 2)^2$.
21. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 + (\mu - 2)x + 3$. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x^2 + x - 2$.
22. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \lambda x^2 + \mu$. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $(x - 2)^2$.
23. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + (\alpha - \beta)x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + x - 6$ να έχει ρίζες τις $x = 2, x = -3$. Στη συνέχεια, για τις τιμές των α, β που βρήκατε να υπολογίσετε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)(x + 3)$.
24. Να αποδείξετε ότι το $2x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x) = 2x^3 + x^2 - 12x + 9$.
25. Να αποδείξετε ότι το $3x + 1$ είναι παράγοντας του $P(x) = (3x + 2)^{2016} + (3x)^5 - 12x - 4$.
26. Το πολυώνυμο $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + \alpha x + \beta$ έχει παράγοντα το $3x - 2$, ενώ το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (2x - 1)$ είναι 3. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
27. Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του $P(x)$ με τα $x - 2$ και $x + 3$ είναι 4 και -1 αντίστοιχα, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 + x - 6)$.
28. Αν το $(x+4)$ είναι παράγοντας του $P(x)$, να αποδείξετε ότι το $(x-3)$ είναι παράγοντας του $P(11-5x)$.
29. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - x - 6$ είναι $-4x + 1$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 3$ καθώς και το υπόλοιπο με το $x + 2$.
30. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης $(x^{100} - 3x^{47} + 5x^{13} - 4x + 1) : (x^2 - 1)$.
31. Ένα πολυώνυμο $\Delta(x)$, όταν διαιρεθεί με το $\delta(x) = x^2 - 2x$ δίνει πηλίκο $\pi(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.
 - i. Να βρεθεί ο βαθμός του $\Delta(x)$.
 - ii. Αν επιπλέον το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης είναι $\nu(x) = -3x + 5$, να βρείτε το $\Delta(x)$.

Πολυωνυμικές Εξισώσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις :

- i. $(x-1)^3 - 3(x^2-1) + 2(x-1) = 0$ ii. $x^3 - 1 + 6(x^2-1) = x^2 - 2x + 1$
iii. $2x^3 - 5x^2 = 5 - 2x$ iv. $x^6 - 32x = 0$
v. $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$ vi. $(x^2-2)^4 - 16 = 0$
vii. $x^3 + x^2 - 12 = 0$ viii. $2x^3 - x^2 - 7x + 6 = 0$
ix. $6x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4 = 0$ x. $x^4 - 9x^2 + 4x + 12 = 0$

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 5x^3 + x - 2 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

3. Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{Z}$ για τις οποίες η εξίσωση $x^3 - kx^2 + 6x + 2 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

4. Να λυθεί η εξίσωση : $(x^2 + x - 1)^2 - 3(x^2 + x + 3) + 14 = 0$

5. Να λυθεί η εξίσωση : $x^6 - 3x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\frac{1}{20}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{10}x - \frac{4}{10} = 0$ ii. $x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 2x + 1 = 0$ (Αντίστροφη εξίσωση)

7. Το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 - 20x + \mu$ έχει παράγοντα το $x+2$, ενώ διαιρούμενο με το $x-1$ δίνει υπόλοιπο -15 .

i. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

8. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης τη συνάρτησης : $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ με τον άξονα $x'x$.

(Υπόδειξη : για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$)

9. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων : $f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 7x$ και $g(x) = 2x^3 + x^2 + 6$

(Υπόδειξη : για να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων δυο συναρτήσεων f, g λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$)

10. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 11x - 2\alpha$ διέρχεται από το σημείο $M(-1, 6)$. Να βρείτε :

i. το $\alpha \in \mathbb{R}$. ii. τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

11. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x^3 + \alpha x^2 - 5x - \alpha - 2$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 6. Να βρείτε :

i. το $\alpha \in \mathbb{R}$. ii. τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

12. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$ και $g(x) = x^3 - \beta x^2 + \alpha x + 10$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $f(x)$ με το $x-1$ είναι -12 και το πολυώνυμο $g(x)$ έχει παράγοντα το $x+2$. Να βρείτε :
- i. τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ii. τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f, g .
13. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων:
- $$2x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x = 0 \text{ και } 2(2x-1)^{1998} + (4x-1)^{1997} = 4x+1 .$$
14. Να βρεθεί ένα πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο να ισχύει $(2x-3)P(x) = 12x^3 - 8x^2 + x - 24$ και να λυθεί η εξίσωση :
- $$12x^3 - 8x^2 + x - 6 = 18 .$$
15. Να βρεθεί ένα πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο να ισχύει $(3x-2)P(x) = 6x^3 - 7x^2 - x + 2$ και να λυθεί η εξίσωση :
- $$6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0 .$$
16. Να βρεθούν οι ρίζες της $x^3 - 13x^2 + 15x + 189 = 0$, αν δύο απ' αυτές διαφέρουν κατά 2 . (Υπόδειξη: Έστω ρ και $\rho+2$ οι ρίζες , κάνω Horner για τη ρ οπότε το υπόλοιπο που θα βρω πρέπει να έχει ρίζα $\rho+2$)
17. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.
Αν $\alpha\gamma > 0$ και $\beta\gamma = \alpha\delta$,δείξτε ότι έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$. (Υπόδ: $\delta = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$)

Πολυωνυμικές Ανισώσεις

18. Να λυθούν οι ανισώσεις :
- i. $(1-x)(x^2-3x+2)(x^2+x+2) > 0$ iv. $x^5 - 5x^3 + 4x < 0$ vii. $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 < 0$
 ii. $x^3 + 5x^2 - x - 5 > 0$ v. $x^3 + 2x^2 - 11x - 12 < 0$ viii. $x^4 - 7x^3 + 16x^2 - 15x + 9 \geq 0$
 iii. $x^3(x+1) - 2 > x(x-1)$ vi. $-4x^3 - 4x^2 + 7x - 2 \geq 0$ ix. $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 12x + 8 < 0$
19. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση τη συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. Πότε βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$;
20. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση τη συνάρτησης $P(x) = 4x^5 + 12x^4 + x^3 - 18x^2 - 5x + 6$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
21. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση τη συνάρτησης $f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$ δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

23. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

$$\text{i. } f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 - 2} \quad \text{ii. } f(x) = \sqrt[4]{x^3 + 5x^2 + 2x - 8} \quad \text{iii. } f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}}{x^3 - 6x^2 + 5x + 12}$$

24. Δίνονται τα πολυώνυμα : $P(x) = x^3 + x^2 + \alpha x - 3\beta - 1$ και $Q(x) = x^3 + \beta x^2 + (\alpha - 3)x + 15$. Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$, ενώ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $x + 1$ είναι 24.

- Να αποδείξετε ότι $\alpha = -10$ και $\beta = -3$.
- Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $P(x) \geq 0$ και $Q(x) \leq 0$.

25. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 17x + 4\alpha$ διέρχεται από το σημείο $M(3, -36)$.

- Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^3 - 7x - 36$.

26. Το πολυώνυμο : $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + \alpha$ διαιρούμενο με το $2x - 1$ αφήνει υπόλοιπο 5.

- Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$
- Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $2x - 1$.
- Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 5$.

27. Το πολυώνυμο : $P(x) = 12x^3 - 8x^2 - 10x + \alpha$ έχει παράγοντα το $3x + 1$.

- Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$
- Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 3x + 1$.

28. Το πολυώνυμο : $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 - 20x + \mu$ έχει παράγοντα το $x + 2$, ενώ διαιρούμενο με το $x - 1$ αφήνει υπόλοιπο -15 .

- Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
- Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

$$1. \text{ A) } \frac{x^3 - 11x}{x - 9} = \frac{2}{x - 1}$$

$$\text{B) } \frac{x}{x - 1} + \frac{6}{x - 3} = -\frac{6}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{Γ) } \frac{x^2}{x - 2} = \frac{4x - 8}{x} - \frac{x + 2}{x^2 - 2x}$$

$$\text{Δ) } \frac{2x^2}{x + 2} = \frac{3x}{x - 1} - \frac{2x + 3}{x^2 + x - 2}$$

$$\text{Ε) } \left(\frac{x - 1}{x} \right)^2 - 5 \left(\frac{x - 1}{x} \right) + 6 = 0$$

$$\text{ΣΤ) } x^2 + \frac{2}{2x - 1} = \frac{1}{x(2x - 1)}$$

2. A) $2\eta\mu^3x + 5\eta\mu^2x + 5\eta\mu x + 2 = 0$ Γ) $2\eta\mu^3x + 5\sigma\upsilon\nu^2x + \eta\mu x - 3 = 0$
 B) $2\eta\mu^3x - 5\eta\mu^2x - 4\eta\mu x + 3 = 0$

3. A) $2\eta\mu^3x + 2\sigma\upsilon\nu^2x - \eta\mu^2x - 3\eta\mu x = 0$
 B) $2\sigma\upsilon\nu^4x - 3\sigma\upsilon\nu^3x - 4\sigma\upsilon\nu^2x + 3\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$ iii. $\sqrt[3]{4x-1} + 4 = x$
 ii. $\sqrt{x+32} + \sqrt{x} = 16$ iv. $\sqrt[3]{2x-3} = \sqrt{x-6}$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\frac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}} = \frac{4-\sqrt{x}}{2}$ ii. $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$
 iii. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = \sqrt{8x+1}$ iv. $\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{4x-4} - 5x + 13 = 0$.

6. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i. $\frac{x^2-1}{x+2} \geq 0$ ii. $\frac{x^2-2x-3}{x-2} \geq 0$ iii. $\frac{(x+2)(x^2-9)}{-x^2-2x+3} \geq 0$ iv. $\frac{x-1}{x+2} \geq 2x$
 v. $\frac{x^3-4x+15}{x^2-9} < -3$ vi. $\frac{x^3+3x-8}{x-3} \leq 2$

7. Να λυθούν οι ανισώσεις :

A) $\frac{2x-1}{x-3} < 0$ B) $\frac{x^2-3x+2}{x+1} \geq 0$ Γ) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-17x+60} < 0$
 Δ) $\frac{(4-x^2)^3(x^2-2x-3)^5}{(x^2-5x)^2} \leq 0$ E) $\frac{2x+1}{x-5} > 0$ ΣΤ) $\frac{x^2+x}{x} \geq 0$
 Ζ) $\frac{x^2}{x+2} < 1$ Η) $\frac{1}{x-1} > \frac{2}{3x+1}$ Θ) $\frac{2x^2+x+6}{x-1} > -4$.

8. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x^2 + \alpha x + \beta$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 2 .
 Α) Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Β) Λύστε την εξίσωση : $P(x) = 0$.
 Γ) Λύστε την ανίσωση : $P(x) < 0$. Δ) Λύστε την εξίσωση: $P(x) = -18x$.
 Ε) Δείξτε ότι: $P(-\sqrt{2}) \cdot P\left(\frac{3}{4}\right) \cdot P\left(\frac{6}{5}\right) > 0$
9. Αν το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + \alpha x + \beta$ έχει παράγοντα το $x - 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x + 1$ είναι -6 :
 Α) Συμπληρώστε τα : $P(2) = \dots\dots\dots$ και $P(-1) = \dots\dots\dots$
 Β) Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
 Γ) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$ λύστε την εξίσωση : $P(x) = 0$
 Δ) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$ λύστε την ανίσωση : $P(x) < 0$.
10. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + 2\alpha x + 2 - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
 Α. Αν το 1 είναι ρίζα του $P(x)$ βρείτε το α .
 Β. Βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$.
 Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $x^3 + 4 = x^2 + 4x$.
 Δ. Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \geq 0$.
11. Αν το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 3$ έχει δύο θετικές ακέραιες ρίζες:
 Α) Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Β) Λύστε την εξίσωση $P(x) = 0$
 Γ) Λύστε την ανίσωση $P(x) \leq 0$
 Δ) Δείξτε ότι: $P\left(-\frac{10}{3}\right) \cdot P\left(\frac{1}{8}\right) \cdot P(\sqrt{2}) \cdot P(\pi) > 0$
12. Αν το $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + \alpha x + \beta$ έχει παράγοντα το $x - 1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x - 2$ είναι 12:
 Α) Συμπληρώστε τα : $P(1) = \dots\dots\dots$ και $P(2) = \dots\dots\dots$
 Β) Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
 Γ) Για $\alpha = -1$ και $\beta = 2$ λύστε την εξίσωση : $P(x) = 0$
 Δ) Για $\alpha = -1$ και $\beta = 2$ λύστε την ανίσωση : $P(x) < 0$.
 Ε) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $P(-\pi)$ και $P\left(-\frac{31}{27}\right)$
 ΣΤ) Λύστε την εξίσωση : $\sin^4 x + \sin^3 x - 3\sin^2 x - \sin x + 2 = 0$.