

ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΡΓΑΣΙΑ 1:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.1 Γραμμικά Συστήματα

Γραμμική Εξίσωση $ax+by+\gamma=0$

- 1 Δίνεται η γραμμική εξίσωση $3x + 4y = -10$. Να εξετάσετε ποιο από τα ζεύγη $(-1, 3), (2, -4)$ είναι λύση της γραμμικής εξίσωσης.
- 2 Δίνεται η γραμμική εξίσωση $3x - 5y = -16$. Να βρείτε τον αριθμό μ , ώστε το ζεύγος $(\mu, \mu + 2)$ να είναι λύση της εξίσωσης. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση.
- 3 Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης και να σχεδιάσετε τις παρακάτω ευθείες:
α) $3x - y + 6 = 0$ β) $6x + 2y + 1 = 0$ γ) $2x - 6 = 0$ δ) $-3y + 12 = 0$
- 4 Δίνεται η γραμμική εξίσωση $ax + (a - 5)y = 6$. Αν το ζεύγος $(6, 2)$ είναι λύση της εξίσωσης :
α) να βρείτε τον αριθμό a
β) να σχεδιάσετε την ευθεία που παριστάνει η εξίσωση

Γραμμικό Σύστημα 2×2 . Μέθοδοι Αντικατάστασης – Αντίθετων Συντελεστών

- 5 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :
α) $\begin{cases} -8x + 5y = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 4x + 7y = 2 \\ 6x + 7y = -10 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 5x - 2y = -20 \end{cases}$
- 6 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + y = 5$, $\varepsilon_2: -2x + 3y = 0$ και $\varepsilon_3: 3x + 2y = 7$. Να βρείτε :
α) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$
β) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_3$
γ) να αποδείξετε ότι το κοινό σημείο των $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ είναι σημείο της ε_1
- 7 Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος x cm, πλάτος y cm, περίμετρο ίση με 38 cm και με την ακόλουθη ιδιότητα:
Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 2 cm και μειώσουμε το πλάτος του κατά 4 cm, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του αρχικού.
Να βρείτε τα x, y .
- 8 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2: x - 2y = -3$
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$
β) Να βρείτε για ποια τιμή του α η ευθεία $3x + \alpha y = \alpha + 5$ διέρχεται από το M
- 9 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(4, 7)$ και $B(1, -2)$

10 Να βρείτε τους αριθμούς α και β ώστε το σύστημα $\begin{cases} (\alpha - 1)x + \beta y = \alpha + 3 \\ \alpha x + (2\beta - 1)y = 3\beta + 5 \end{cases}$ να έχει λύση το ζεύγος $(x, y) = (3, 2)$

11 Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ ώστε τα συστήματα $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ -2x + 5y = 1 \end{cases}$ και $\begin{cases} (\lambda + 1)x + (2\mu - 1)y = 1 \\ 2\lambda x + (\mu + 4)y = 53 \end{cases}$ να έχουν κοινή λύση.

Γραμμικό Σύστημα 2x2. Μέθοδος με Ορίζουσες.

12 Να λυθούν για τις διάφορες τιμές του λ τα συστήματα:

i. $\begin{cases} \lambda x + 4y = 2 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} (\lambda - 1)x + 8y = 4 \\ x + (\lambda + 1)y = 2 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} (\lambda + 1)x + 8y = 4\lambda \\ \lambda x + (\lambda + 3)y = 3\lambda - 1 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ x + y = 2\lambda \end{cases}$ v. $\begin{cases} \lambda x - 2y = \lambda \\ (\lambda - 1)x - y = 1 \end{cases}$

13 Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 2x + y = \lambda + 2 \\ 3x - 2y + \lambda = 5 \end{cases}$.

α. Να δείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β. Να υπολογίσετε τα x και y .

γ. Για ποια τιμή του λ η λύση (x, y) που βρήκατε επαληθεύει τη σχέση $x + y = 5$;

14 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

α) $\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x + 2\sqrt{2}y = -2 \\ \sqrt{2}x + (\sqrt{2} + 1)y = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$ β) $\begin{cases} (2 - \sqrt{3})x + y = -1 \\ x + (2 + \sqrt{3})y = -2 - \sqrt{3} \end{cases}$

15 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x - y = -1$ και $\varepsilon_2: (\lambda - 1)x - y = 6$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία οι ευθείες είναι παράλληλες

β) Να παραστήσετε γραφικά τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ για $\lambda = 3$

γ) Υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να ταυτίζονται;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

16 Αν το σύστημα $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda^2 \\ x - \lambda y = 2 - \lambda \end{cases}$ (Σ) έχει άπειρες λύσεις, να δείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} 2\lambda x - y = \lambda \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$ (Σ') έχει μοναδική λύση.

17 Να βρείτε το α , ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + \alpha^2 y = 4$ και $\varepsilon_2: x + \alpha y = \alpha + 2$
 i. Να τέμνονται
 ii. Να είναι παράλληλες

18 Να βρείτε τις τιμές των λ και μ για τις οποίες τα συστήματα $(\Sigma_1): \begin{cases} (2\lambda - 1)x + 10\mu y = 3 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$ $(\Sigma_2): \begin{cases} (\lambda - 2)x - (\mu - 1)y = 7 \\ 3x - 6y = 5 \end{cases}$ είναι συγχρόνως αδύνατα. (Εξετάσεις 1987)

19 Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων x, y ισχύει:
 $D_x + D_y = 7D$
 $D_x - D_y = 5D$
 Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση να βρεθεί η λύση αυτή.

20 Αν x και y λύσεις του συστήματος $\begin{cases} x + 2y = \mu \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$ να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ οι οποίες επαληθεύουν την ανίσωση $(x-1)^2 + (y-2)^2 < 8$.

Γραμμικό Σύστημα 3x3.

21 Να λυθούν τα συστήματα:

$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 5 \\ x + y + 3z = 3 \\ -x + 4y + 2z = 2 \end{array} \right\} \text{ i.}$	$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = -3 \\ 2x + y + 2z = 4 \\ x + 2y + z = 3 \end{array} \right\} \text{ ii.}$
--	---

22 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

$\alpha) \begin{cases} x - y + \omega = -1 \\ x + y + 3\omega = 5 \\ x + 2y + 4\omega = 8 \end{cases}$	$\beta) \begin{cases} x + 2y - \omega = 1 \\ x + y - 2\omega = 0 \\ -2x - y + \omega = 1 \end{cases}$
--	---

1.2 Μη Γραμμικά Συστήματα

23 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 3x^2 - y^2 = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} x \cdot y = 8 \\ x + y = -6 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -5 \\ \frac{2}{x} + \frac{6}{y} = 1 \end{cases}$$

$$\zeta) \begin{cases} (y - 2x)(x + y) = 0 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

24 Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$$\text{i.} \begin{cases} 3\sqrt{x} - 6\sqrt{y} = 7 \\ 2\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = -1 \end{cases}$$

$$\text{ii.} \begin{cases} \sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 3 \\ 3\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = -11 \end{cases}$$

25 Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$$\text{i.} \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{7}{12} \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = \frac{5}{12} \end{cases}$$

$$\text{ii.} \begin{cases} \frac{5}{x} - \frac{2}{y} = 23 \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{23}{2} \end{cases}$$

$$\text{iii.} \begin{cases} \frac{-3}{x-7} + \frac{5}{y+3} = 7 \\ \frac{5}{x-7} - \frac{4}{y+3} = -3 \end{cases}$$

Εφαρμογές στην Γεωμετρία

26 Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 12 cm^2 . Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου όταν η περίμετρός του είναι 14 cm .

27 Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα 5 cm και εμβαδόν του 6 cm^2 . Να βρείτε τις κάθετες πλευρές του τριγώνου

28 Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής $y^2 = 3x^2$ και της ευθείας $2x - y = -1$

29 Να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με εξίσωση $x + y = 2$ και του κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$

ΘΕΜΑ 4 – 20920

α) Να λύσετε το σύστημα $(\Sigma_1): \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$. (Μονάδες 10)

β) Είναι οι λύσεις του συστήματος (Σ_1) λύσεις και του $(\Sigma_2): \begin{cases} |xy| = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Είναι οι λύσεις του συστήματος (Σ_2) λύσεις και του (Σ_1) ;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)