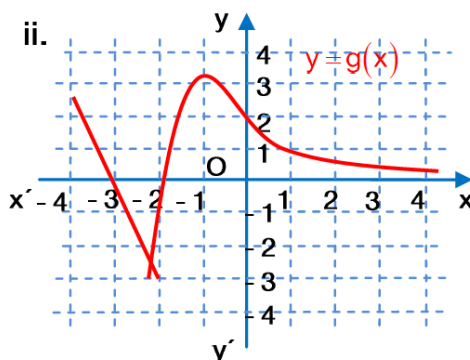
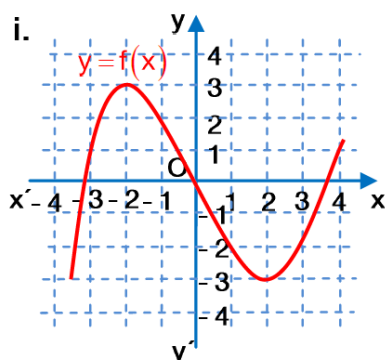


ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΡΓΑΣΙΑ 2: ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

2.1 Μονοτονία – Ακρότατα - Συμμετρίες

Μονοτονία

1. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς:
 $f(0), f(5), f(-3), f(2012), f(1821), f(-1)$
2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις:



3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = -x + 4$ β) $f(x) = 6x - 38$ γ) $f(x) = \sqrt{3-x}$ δ) $f(x) = 3 - 2\sqrt{x+1}$

4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού τους:

α) $f(x) = \frac{3}{x}$ β) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ γ) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$
δ) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ε) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ στ) $f(x) = x^{1821} + 3x^{1453} - 2$

5. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(5, 2)$ και $B(4, 9)$ τότε :

- α) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
- β) Να λύσετε την ανίσωση $f(5 - 3x) < 2$

6. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(4, 5)$ τότε :

- α) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
- β) Αν η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2 , να δείξετε ότι $f(0) > 0$

7. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2, 1)$ και $B(3, 5)$ τότε :

- α) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
- β) Να λύσετε την ανίσωση $f(|x| - 3) \geq 1$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} + \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $K(6, 1)$:
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και τον αριθμό α
 - β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
 - γ) Να λύσετε την εξίσωση : $\sqrt{x-2} = \frac{6}{x} - 1$.
9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \alpha + 9$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1, -7)$ και $B(2, 5)$ τότε :
- α) Να βρείτε τα α, β
 - β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

Ακρότατα

10. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{4}{x}$, με πεδίο ορισμού $A_f = (0, +\infty)$, παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 2$.
11. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x_1 = 1$ και ελάχιστο για $x_2 = -1$.
12. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 3 - |x - 2|$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 2$.
13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - ax + 2$
- α. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $K(1, 5)$
 - β. Για την τιμή του α που βρήκατε να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς το ακρότατα.
14. Να βρείτε τα ακρότατα της f αν η συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$ έχει πεδίο ορισμού
- α) $A = [-1, 3]$
 - β) $A = [1, 5]$
 - γ) $A = (-5, -1]$
15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{6 - 2x} - 3x$
- α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία
 - β) Να βρείτε τα ακρότατα της f
16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{7 - x} - \sqrt{x + 2}$
- α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία
 - β) Να βρείτε τα ακρότατα της f

Συμμετρίες

1. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές :

$$\alpha) f(x) = x^4 + 3x^2 + 2 \qquad \beta) f(x) = x^5 - 2x^3 + 4x \qquad \gamma) f(x) = \frac{x^2}{|x| - 1}$$

2. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές :

$$\alpha) f(x) = x^4 - 5x^3 + x - 4 \qquad \beta) f(x) = \frac{3x}{x - 5} \qquad \gamma) f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

3. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές :

$$\alpha) f(x) = \frac{x^3 - 5x}{|x|} \qquad \beta) f(x) = \frac{-2x^2}{x - 3} \qquad \gamma) f(x) = \frac{x^2 + 4|x|}{x^5 - 5x}$$

4. Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$ ή ως προς την αρχή των αξόνων :

$$\alpha) f(x) = \frac{2|x| - 3}{\sqrt{5 - |x|}} \qquad \beta) f(x) = \frac{-2x^3}{\sqrt{|x|} - 3} \qquad \gamma) f(x) = \frac{\sqrt{|x|} - 2}{x^2 - 16}$$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 + \alpha|x|}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-1, -2)$. Να βρείτε το α , το πεδίο ορισμού της f και να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.

6. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + (\alpha - 2)x^3$

α) Να βρείτε τον αριθμό α

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

7. Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f(x) = \alpha|x| + (\alpha + 3)x - \alpha$

α) Να βρείτε τον αριθμό α

β) Να προσδιορίσετε τα ακρότατα της f

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 1$

β) Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

9. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{2}{|x| - 1} - 3\sqrt{\alpha - |x|}$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -8

α) Να βρείτε τον αριθμό α

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = f(\sqrt{3} + 2) - f\left(\frac{1}{\sqrt{3} - 2}\right)$

2.2 Κατακόρυφη – Οριζόντια Μετατόπιση Συνάρτησης

- 1 Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :
α) $\varphi(x) = |x|$ β) $f(x) = |x| + 3$ γ) $g(x) = |x| - 1$
- 2 Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :
α) $\varphi(x) = x^2$ β) $f(x) = (x - 2)^2$ γ) $g(x) = (x - 2)^2 - 3$
- 3 Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :
α) $\varphi(x) = x^3$ β) $f(x) = x^3 + 2$ γ) $g(x) = x^3 - 1$
- 4 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3|x| + 1$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h , της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει κατά :
α) 1 μονάδα προς τα αριστερά και 2 μονάδες προς τα πάνω
β) 2 μονάδες προς τα δεξιά και 3 μονάδες προς τα κάτω
γ) 1 μονάδα προς τα δεξιά και 2 μονάδες προς τα κάτω
δ) 2 μονάδες προς τα αριστερά και 3 μονάδες προς τα πάνω .
- 5 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:
 $f(x)=|x|-1$ και $g(x)=1-|x|$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και C_g .
- 6 i. Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=|x+1|$
ii. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
 $f(x)=|x-2|$ και $g(x)=|x+1|$
iii. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $|x-2|<|x+1|$ και να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα συμπεράσματα.