

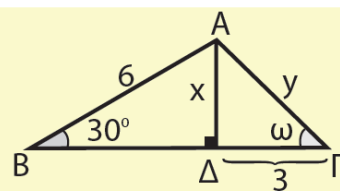
ΑΛΓΕΒΡΑ Β

ΕΡΓΑΣΙΑ 3:

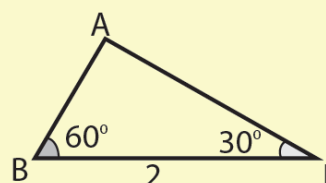
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ 3.1 ΩΣ 3.3

2.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

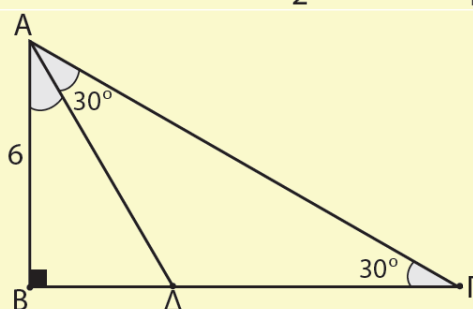
1. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα μήκη x , y και τη γωνία ω .



2. Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου του διπλανού σχήματος.



3. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΔ του διπλανού σχήματος.



4. Να εκφράσετε σε rad τη γωνία : α) 75° β) 150° γ) 240° δ) 300°
5. Να μετατρέψατε σε μοίρες την γωνία : α) $\frac{\pi}{4}$ β) $\frac{7\pi}{9}$ γ) $\frac{5\pi}{2}$ δ) $\frac{9\pi}{4}$
6. Η διαφορά δύο γωνιών είναι 30° και το άθροισμά τους $\frac{\pi}{3}$ rad .
α) Πόσα ακτίνια είναι η κάθε γωνία ;
β) Πόσες μοίρες είναι η κάθε γωνία ;
7. Μια επίκεντρη γωνία ω βαίνει σε τόξο $S = 6$ cm. Να εκφράσετε τη γωνία αυτή σε ακτίνια , αν η ακτίνα του κύκλου είναι : α) $\rho = 1$ cm β) $\rho = 2$ cm γ) $\rho = 3$ cm
8. Μια επίκεντρη γωνία ω βαίνει σε τόξο $S = 30$ cm. Να εκφράσετε τη γωνία αυτή σε ακτίνια , αν η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = 0,2$ cm
9. Μια επίκεντρη γωνία ω βαίνει σε τόξο $S = 2$ cm. Να εκφράσετε τη γωνία αυτή σε ακτίνια , αν η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = 10$ cm
10. Να βρείτε το μήκος S ενός τόξου στο οποίο βαίνει γωνία 15° , αν η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = 4$ cm

11. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $A = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + 2\eta\mu\frac{\pi}{6} + 3\sigma\varphi\frac{\pi}{3} - 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}$

β) $B = 3\eta\mu^2\frac{\pi}{3} + 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{3} - \varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{3}$

γ) $\Gamma = \eta\mu 0 + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + \varepsilon\varphi\pi + \sigma\varphi\frac{3\pi}{2}$

δ) $\Delta = \sigma\varphi\frac{\pi}{6} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} - 2\eta\mu\frac{\pi}{6}$

12. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{2\eta\mu 30^\circ + 2\varepsilon\varphi 30^\circ \cdot \eta\mu 60^\circ + \varepsilon\varphi 45^\circ}{2\sigma\upsilon\nu 60^\circ - 2\sigma\varphi 30^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ + \sigma\varphi 45^\circ}$

13. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $A = \frac{3}{2} \sigma\upsilon\nu 60^\circ + \eta\mu^2 60^\circ + (1 - 2\varepsilon\varphi 45^\circ)^{2018}$

β) $B = \eta\mu^2\frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{3} + \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} \cdot \sigma\varphi\frac{\pi}{6}$

14. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας : α) 1125° β) $\frac{25\pi}{3}$

15. Να αποδείξετε ότι : $\frac{\eta\mu 405^\circ - \eta\mu 750^\circ}{\sigma\upsilon\nu 1125^\circ + \sigma\upsilon\nu 1860^\circ} = 3 - 2\sqrt{2}$

16. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\sigma\upsilon\nu 60^\circ \cdot \varepsilon\varphi 1845^\circ \cdot \eta\mu (-690^\circ)}{\sigma\varphi 390^\circ \cdot \eta\mu 2070^\circ}$

17. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $A = \eta\mu 390^\circ + \eta\mu 780^\circ \cdot \varepsilon\varphi 1.140^\circ$

β) $B = \eta\mu\frac{49\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu\frac{37\pi}{3} - \varepsilon\varphi\frac{17\pi}{4}$

18. Να βρείτε τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών :

α) 50° β) 290° γ) 160° δ) $\frac{5\pi}{8}$ ε) $\frac{7\pi}{4}$

19. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων :

α) $A = 5\eta\mu\omega - 3$

β) $B = 3\eta\mu\omega + 10\sigma\upsilon\nu\omega + 2$

γ) $\Gamma = 4 + 3\eta\mu\omega - 2\sigma\upsilon\nu\omega$

20. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων :

α) $A = 2 + 3\eta\mu 2\omega$ β) $B = 5 - 2\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}$ γ) $\Gamma = \frac{1}{2 - \eta\mu\frac{\omega}{3}}$

21. Αν για μια γωνία ω και έναν $\lambda \in \mathbb{Z}$ ισχύει : $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1-3\lambda}{2}$, τότε να βρείτε τις δυνατές τιμές του λ

22. Αν για μια γωνία ω και έναν $\lambda \in \mathbb{Z}$ ισχύει : $\eta\mu\omega = \frac{3\lambda-2}{4}$, τότε να βρείτε τις δυνατές τιμές του λ

23. Να αποδείξετε ότι : α) $|5\sigma\upsilon\nu\omega + 2\sigma\upsilon\nu\theta| \leq 7$ β) $|2\eta\mu\omega + 3\sigma\upsilon\nu\theta| \leq 5$

24. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \eta\mu\theta = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού θ

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι $2x_1x_2 \leq x_1 + x_2$

2.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. Αν $\sin x = -\frac{12}{13}$ rad και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad
2. Αν $\cos x = \frac{3}{4}$ rad και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad
3. Αν είναι $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $(2\sin x + 1)(5\sin x - 4) = 0$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x
4. Αν είναι $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $\cos x = 9\sin x$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x
5. Αν $6\eta\mu^2\omega + \eta\mu\omega - 1 = 0$ και $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε το $\sin\omega$.
6. Αν $5\sin^2\omega - \sin\omega - 4 = 0$ και $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε το $\sin\omega$ και τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς
7. Για την γωνία ω ισχύουν $\eta\mu\omega = \frac{3\lambda + 1}{5\lambda}$ και $\sin\omega = \frac{4\lambda - 1}{5\lambda}$, $\lambda \neq 0$. Να βρείτε :
α) την τιμή του λ β) την $\varepsilon\phi\omega$ και $\sigma\phi\omega$
8. Για την γωνία ω ισχύουν $\eta\mu\omega = \frac{1-4\lambda}{5\lambda}$ και $\sin\omega = \frac{7-3\lambda}{5\lambda}$, $\lambda \neq 0$. Να βρείτε :
α) την τιμή του λ β) την $\varepsilon\phi\omega$ και $\sigma\phi\omega$
9. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :
α) $A = \eta\mu\omega \cdot \sqrt{1 - \sin^2\omega} - \sin\omega \cdot \sqrt{1 - \eta\mu^2\omega}$ αν $\omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
β) $B = \sqrt{(1 - \eta\mu^2\omega) \cdot (1 - \sin^2\omega)} + \eta\mu\omega \cdot |\sin\omega|$, αν $\omega \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$
10. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \frac{\eta\mu^3\omega \cdot \sin\omega + \sin^3\omega \cdot \eta\mu\omega}{2\varepsilon\phi\omega \cdot \sin^2\omega}$
11. Για μια γωνία $\omega \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ισχύει : $5\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega - 6 = 0$
i. Να αποδείξετε ότι : $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$
ii. Να υπολογίσετε τους αριθμούς $\sin\omega$, $\varepsilon\phi\omega$ και $\sigma\phi\omega$.
12. Αν είναι $3\sin x + 4\eta\mu x = 5$, τότε :
i. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu x$, $\sin x$, $\varepsilon\phi x$ και $\sigma\phi x$.
ii. Να βρείτε το τεταρτημόριο στο οποίο καταλήγει το τόξο x .

13. Αν είναι $3\eta\mu x - 4\sigma\upsilon\nu x = 5$, τότε :
- Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x, \epsilon\phi x$ και $\sigma\phi x$.
 - Να βρείτε το τεταρτημόριο στο οποίο καταλήγει το τόξο x .

14. Αν για τη γωνία x , ισχύει $3\sigma\upsilon\nu^2 x + 4\eta\mu x + 1 = 0$, να βρείτε το $\eta\mu x$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

15. Να γίνουν οι Ασκήσεις του σχολικού βιβλίου ΟΜΑΔΑΣ Α: 10, 11, 12, 13 στις σελίδες 63-64

16. Να γίνουν οι Ασκήσεις του σχολικού βιβλίου ΟΜΑΔΑΣ Β: 1, 2, 3, 4 στη σελίδα 64

17. Να αποδείξετε ότι : $\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \leq \frac{1}{2}$

18. Να αποδείξετε ότι :

α) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta \leq 1 + 2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$ β) $9\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 6\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta + \sigma\upsilon\nu^2\beta \leq 10$

19. Δίνεται η εξίσωση $4x^2 + (5 - 3\eta\mu\alpha)x + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης και ισχύει $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{9}{2}$ και $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, να βρείτε τους

τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α .

2.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα γράφοντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας φ , συναρτήσει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω

φ	$\frac{\pi}{2} - \omega$	$\frac{\pi}{2} + \omega$	$\pi - \omega$	$\pi + \omega$	$\frac{3\pi}{2} - \omega$	$\frac{3\pi}{2} + \omega$	$2\pi - \omega$
ημ φ							
συν φ							
εφ φ							
σφ φ							

2. Να αποδείξετε ότι:
$$\frac{\eta\mu \frac{5\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{6} \cdot \epsilon\varphi \frac{4\pi}{3}}{2\eta\mu \frac{4\pi}{3} \cdot \epsilon\varphi \frac{5\pi}{4} \cdot \sigma\varphi \frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
$$\frac{\eta\mu 150^\circ + \sigma\upsilon\nu 120^\circ + \sigma\varphi 240^\circ}{\sigma\upsilon\nu (-45^\circ) + \eta\mu 225^\circ + \eta\mu 120^\circ + \epsilon\varphi 150^\circ}$$

4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
$$\frac{\eta\mu \frac{5\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{6} \cdot \epsilon\varphi \frac{4\pi}{3} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4}}{\eta\mu \frac{2\pi}{3} \cdot \epsilon\varphi \frac{3\pi}{4} \cdot \sigma\varphi \frac{5\pi}{6} \cdot \eta\mu \left(-\frac{\pi}{6}\right)}$$

5. Να αποδείξετε ότι: α)
$$\frac{\epsilon\varphi(\pi + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(-\omega) \cdot \eta\mu(9\pi + \omega)}{\sigma\upsilon\nu(\omega - 2\pi) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{17\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2} + \omega\right)} = 1$$

β)
$$\frac{\sigma\upsilon\nu(\omega - 2\pi) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \epsilon\varphi(3\pi + \omega)}{\eta\mu(5\pi - \omega) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) \cdot \eta\mu\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)} = -1$$

6. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α)
$$\frac{\eta\mu(90^\circ - \omega) \cdot \eta\mu(180^\circ + \omega)}{\sigma\upsilon\nu(90^\circ + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)}$$
 β)
$$\frac{\sigma\upsilon\nu(720^\circ - \omega) \cdot \epsilon\varphi(90^\circ - \omega)}{\eta\mu(270^\circ - \omega) \cdot \epsilon\varphi(270^\circ + \omega)}$$

7. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \eta\mu^2(B + \Gamma) + \sigma\upsilon\nu^2 A = 1 \quad \beta) \sigma\phi A \cdot \epsilon\phi(B + \Gamma) = -1$$

8. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \eta\mu(A + 2B + \Gamma) + \eta\mu B = 0 \quad \beta) \sigma\upsilon\nu(2A + B + \Gamma) - \sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = 0$$

9. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ . Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha) K = \sigma\upsilon\nu A \cdot \epsilon\phi(B + \Gamma) + \eta\mu(B + \Gamma) \quad \beta) M = \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \cdot \sigma\phi \frac{B + \Gamma}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{2}$$

10. Σε κάθε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ , να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \eta\mu \frac{A + B}{2} = \eta\mu \frac{\Gamma + \Delta}{2} \quad \beta) \epsilon\phi \frac{A + B}{2} = -\epsilon\phi \frac{\Gamma + \Delta}{2}$$

11. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$A = \frac{\eta\mu\left(\frac{9\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{19\pi}{2} - \theta\right) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{29\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{39\pi}{2} - \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{17\pi}{2} + \theta\right) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{27\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{37\pi}{2} + \theta\right)}$$

$$B = \frac{\eta\mu\left(\frac{91\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{191\pi}{2} + \theta\right) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{219\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{391\pi}{2} + \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{73\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{173\pi}{2} - \theta\right) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{273\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{373\pi}{2} - \theta\right)}$$

12. Να δείξετε ότι: $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) + \eta\mu^2\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$

13. Αν $\epsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και ισχύει $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{\eta\mu(\pi + x) \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \epsilon\phi(-x)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}.$$