

ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΡΓΑΣΙΑ 4: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ 3.4 ΩΣ 3.5

3.4 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Γραφική παράσταση

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu 3x$

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f

2. Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων :

α) $f(x) = 5\eta\mu 6x$ β) $f(x) = -12\sigma\upsilon\nu 8x$ γ) $f(x) = -2\eta\mu \frac{x}{4}$ δ) $f(x) = 4\eta\mu \frac{\pi x}{2}$

3. Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων :

α) $f(x) = 10\eta\mu 8x - 20$ β) $f(x) = 2 - 8\eta\mu 10x$ γ) $f(x) = \frac{1}{10} - \frac{\sigma\upsilon\nu 12x}{5}$

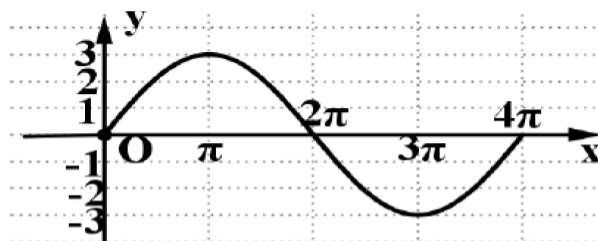
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu 2x - 3$

α) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή μ της f

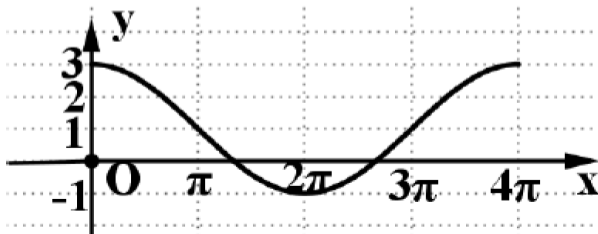
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $-\pi \leq x \leq 2\pi$

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$ με $\rho, \omega > 0$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών ω και ρ .



6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega x) + \beta$ με $x \in [0, 4\pi]$. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών ω και α, β .



7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu x + \beta$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ και $B\left(\frac{3\pi}{2}, 5\right)$ τότε να βρείτε :

α) τους πραγματικούς αριθμούς α και β

β) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.

8. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu \omega x$ με $\beta < 0$, έχει περίοδο $T = \pi$, μέγιστη τιμή 5 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α, β και ω

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $-\pi \leq x \leq 2\pi$

Περιοδικότητα – Μονοτονία - Συμμετρίες

9 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση :

α) $f(x) = \eta\mu 2x + \epsilon\phi x$ έχει περίοδο $T = \pi$

β) $f(x) = 2\eta\mu 8x - 3\sigma\upsilon\nu 4x$ έχει περίοδο $T = \frac{\pi}{2}$

γ) $f(x) = \eta\mu \frac{x}{3} + 3\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$ έχει περίοδο $T = 12\pi$

10 Να εξετάσετε αν καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτια ή περιττή :

α) $f(x) = 2\eta\mu x - \epsilon\phi x$ β) $f(x) = \frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x}{3 + \sigma\upsilon\nu x}$ γ) $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$

11 Να εξετάσετε αν καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτια ή περιττή :

α) $f(x) = x - \eta\mu x$ β) $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{1 + \eta\mu^2 x}$ γ) $f(x) = x \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$

12 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις :

α) $f(x) = 4x^7 + 2\eta\mu x$ στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ β) $f(x) = 5\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{\sigma\upsilon\nu x}$ στο $(0, \pi)$

13 Να συγκρίνετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς :

α) $\eta\mu \frac{\pi}{5}$ και $\eta\mu \frac{\pi}{7}$ β) $\eta\mu \frac{6\pi}{5}$ και $\eta\mu \frac{13\pi}{10}$ γ) $\eta\mu \frac{7\pi}{4}$ και $\eta\mu \frac{15\pi}{8}$

14 Να συγκρίνετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς :

α) $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{8}$ και $\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{8}$ β) $\sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{10}$ και $\eta\mu \frac{9\pi}{10}$ γ) $\sigma\upsilon\nu \frac{8\pi}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu \frac{9\pi}{5}$

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \eta\mu(\pi + x)$

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f

β) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή μ της f

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε διάστημα μιας περιόδου.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(7\pi - 2x) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{17\pi}{2} + 2x\right)$

α) Να γράψετε τη συνάρτηση στη μορφή $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$

β) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή μ της f

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $-\pi \leq x \leq \pi$

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -4\sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{x}{3}\right) - \eta\mu\left(\frac{3\pi - 2x}{6}\right)$

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f

β) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή μ της f

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε διάστημα μιας περιόδου.

3.5 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $2\eta\mu^2x - \eta\mu x = 0$ β) $\sigma\upsilon\nu^2x + \sigma\upsilon\nu x = 0$ γ) $\eta\mu x - \eta\mu^3x = 0$ δ) $\eta\mu x = \epsilon\varphi x$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x = 0$ β) $2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2x = -2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ γ) $2\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu^2x = \sigma\upsilon\nu x$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $2\eta\mu^2x + \sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 0$ β) $2\sigma\upsilon\nu^2x + \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$ γ) $\epsilon\varphi^2x + \sqrt{3} \cdot \epsilon\varphi x = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x + 1$ β) $\eta\mu^3x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^3x = 0$ γ) $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - \epsilon\varphi x + 1 = 0$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\sigma\upsilon\nu 3x = \sigma\upsilon\nu \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ β) $\eta\mu \left(x - \frac{\pi}{8}\right) - \eta\mu \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ γ) $\epsilon\varphi \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \epsilon\varphi x$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\eta\mu \left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu x$ β) $\sigma\upsilon\nu \left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \sigma\upsilon\nu x$ γ) $\epsilon\varphi \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \epsilon\varphi \left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\eta\mu \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \eta\mu \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ β) $\sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0$ γ) $\epsilon\varphi \left(x + \frac{3\pi}{4}\right) + \epsilon\varphi \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ β) $\sigma\upsilon\nu \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu \left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ γ) $\epsilon\varphi \left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sigma\varphi \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$
δ) $\eta\mu \left(x + \frac{3\pi}{8}\right) + \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ β) $\eta\mu x + \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$ γ) $\eta\mu x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \eta\mu x \cdot \epsilon\varphi x$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $6\eta\mu^2x + 5\eta\mu x - 4 = 0$ β) $2\sigma\upsilon\nu^2x - 3\sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x + 3 = 0$ γ) $2\sigma\upsilon\nu^4x - 5\sigma\upsilon\nu^2x + 2 = 0$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $8\eta\mu^2x + 2\eta\mu x - 3 = 0$ β) $2\sigma\upsilon\nu^2x + 3\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$ γ) $\epsilon\varphi^2x - (\sqrt{3} - 1) \cdot \epsilon\varphi x - \sqrt{3} = 0$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $2\eta\mu^2x - \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$ β) $\sigma\upsilon\nu^2x + 2\eta\mu x + 2 = 0$ γ) $4 - 3\sigma\upsilon\nu x = 3\eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^2x$

13. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $1 - \eta\mu x = \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x$ β) $\sqrt{2 + \eta\mu x} = \eta\mu x$ γ) $\sqrt{1 + \epsilon\varphi^2x} = \sigma\upsilon\nu x$

14. Να λύσετε στο $[0, \pi)$ τις εξισώσεις :

α) $2\sigma\upsilon\nu \left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$ β) $2\eta\mu \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $2\sigma\upsilon\nu \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$ στο $(-\pi, \pi)$ β) $\sqrt{3} \cdot \sigma\varphi \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0$ στο $(0, 2\pi)$

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x - \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$

- α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$

ΘΕΜΑ2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \eta\mu(\pi - 2x) + \eta\mu(\pi + 2x)$

- α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$
- β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, \pi]$ και να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 3.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu 3x$

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha + 2 \cdot \eta\mu(2\beta x)$ και $g(x) = \alpha + \beta + \sigma\upsilon\nu((\alpha + \beta)x)$, $\alpha, \beta > 0$
Αν οι συναρτήσεις έχουν την ίδια μέγιστη τιμή και την ίδια περίοδο, τότε :

- α) να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$
- β) να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + g\left(\frac{\pi}{4}\right)$
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + 3 = 2g(x)$ στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f(x) = \eta\mu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x + 2$.

- i) Να παραγοντοποιηθεί η $f(x)$.
- ii) Να δείξετε ότι $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$.
- iii) Να βρείτε το x ώστε $f(x) = 0$.
- iv) Να δείξετε ότι η f είναι άρτια, περιοδική με περίοδο το 2π , και μέγιστο το 4.

ΘΕΜΑ 5

Να λυθούν οι εξισώσεις : i) $\frac{1 + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} = 4$ ii) $\varepsilon\phi x - 1 + 2\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2\eta\mu x$