

ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΡΓΑΣΙΑ 6: ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ-ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

5.1 Εκθετικές Συναρτήσεις

Γραφική Παράσταση Εκθετικής Συνάρτησης

1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^x + 1$, $h(x) = 2^x - 1$

β) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{x-1}$, $h(x) = 2^{x+1}$

γ) $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$, $g(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}$, $h(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x-3}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (4 - \lambda^2)^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ορίζεται η συνάρτηση

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα

γ) Να βρείτε το λ ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $K\left(1, \frac{1}{2}\right)$

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = (3\lambda - 9)^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ β) είναι εκθετική γ) είναι γνησίως αύξουσα δ) είναι γνησίως φθίνουσα

4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = (2\lambda^2 - 5\lambda + 2)^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ β) είναι εκθετική γ) είναι γνησίως αύξουσα δ) είναι γνησίως φθίνουσα

5. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = (\lambda^2 - 4\lambda + 4)^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ β) είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

6. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\lambda + 3}{6 - \lambda}\right)^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ β) είναι εκθετική γ) είναι γνησίως αύξουσα δ) είναι γνησίως φθίνουσα

7. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\lambda + 1}{5 - \lambda}\right)^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ β) είναι εκθετική γ) είναι γνησίως αύξουσα δ) είναι γνησίως φθίνουσα

8. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1 - 5\lambda}{\lambda + 1}\right)^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ β) είναι εκθετική γ) είναι γνησίως φθίνουσα

Εκθετικές Εξισώσεις

9. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $(3^{x^2-9})^{x+2} = 1$

β) $8^{|2x-7|-5} = 1$

γ) $2^{x^3+3x^2-6x-8} = 1$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $(5^x - \sqrt{5})(e^x - 1) = 0$

β) $(13^{2x+1} - 1)\left(e^{3x-3} - \frac{1}{e^2}\right) = 0$

γ) $(2^{|2x-4|} - 2)(3^{x^2-4} - 3)(x^2 - 4x + 3) = 0$

δ) $(e^x + 3)(2^{x^2-2x} - 8^{x-2}) = 0$

11. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 2^{x+2} + 2^{x+3} + 48 \cdot 2^{x-4} + 2 \cdot 2^{x-1} = 1$$

$$\beta) 3^{x+2} = 24 \cdot 3^{x-1} + \frac{1}{9}$$

$$\gamma) 2^{x+3} - 2^{x+2} + 2^{x+1} = 48$$

$$\delta) 3^{x+2} + 5 \cdot 3^x + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 128$$

12. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$$

$$\beta) 2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+3} + 128 = 0$$

$$\gamma) 2^x - 5 \cdot \sqrt{2^{x+4}} + 64 = 0$$

13. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$$

$$\beta) 9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$$

$$\gamma) 2^x - 5 \cdot \sqrt{2^x} + 4 = 0$$

Εκθετικές Ανισώσεις

14. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\alpha) 8^{2x+1} \geq 8^{13-x} \quad \beta) \left(\frac{5}{9}\right)^{3-2x} > \left(\frac{5}{9}\right)^{3x-7} \quad \gamma) \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-x} < \frac{1}{25} \quad \delta) 9^{|2x-3|-5} \leq 1$$

$$\epsilon) 5^{x^2-7} \cdot 5^{4x-5} > 1 \quad \zeta) \left(\frac{1}{27}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-x-6} \quad \eta) 9 \cdot 3^{x^2-2x-8} < 27^x$$

15. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\alpha) 3^{x^2+3} < 81$$

$$\beta) 4^{x^2-7x+6} > 1$$

$$\gamma) (2^x - \sqrt{2})(e^x + 3) \leq 0$$

$$\delta) \frac{2^x - 4}{2^x - 8} \leq 0$$

16. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\alpha) 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 > 0$$

$$\beta) 4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 \leq 0$$

$$\gamma) 2^x + 2^{3-x} \geq 9$$

$$\delta) 2^{x+3} + 15 \cdot 3^{x-1} < 3^{x+2} - 2^x$$

$$\epsilon) (x^2 - 3x - 4) \cdot (e^x - 1) \cdot (2^x - 16) \leq 0$$

Εκθετικά Συστήματα

17. Να λυθούν τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} 2^x + 3^y = 13 \\ 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -6 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 5^{3x+1} \cdot 5^{y-x} = 25 \\ 7^{2x-13} \cdot 7^{x-y} = 7 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 9^{x+1} = 3^{y+3} \\ 4^{x+y} = 8 \cdot 2^x \end{cases}$$

18. Να λυθούν τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} 4^{x-2} \cdot 2^{y-3} = 1 \\ 3^x \cdot 3^{y-3} = 9 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 5^{x+1} = 25^{y-3} \\ 9^{x+y} = 27 \cdot 3^y \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 27^{x^2-4x+3} = 1 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Νόμος της Εκθετικής μεταβολής

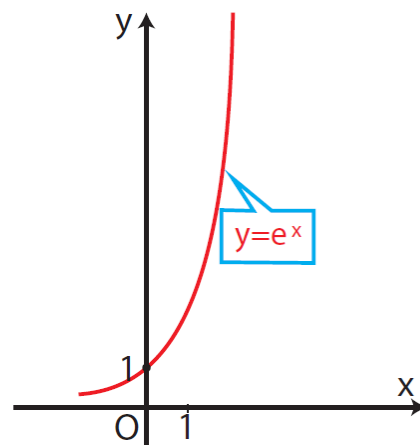
Μία ακολουθία φυσικών αριθμών που εμφανίζεται πολύ συχνά σε εφαρμογές διαφόρων κλάδων της επιστήμης (π.χ. οικονομία, φυσική, χημεία, βιολογία κ.α.) είναι η:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ με } n \in \mathbb{N}$$

Παρατηρούμε ότι, καθώς το n αυξάνει, αυξάνει και το $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ και προσεγγίζει έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό. Ο αριθμός αυτός είναι άρρητος και συμβολίζεται με e . Ο συμβολισμός αυτός οφείλεται στο μεγάλο Ελβετό, μαθηματικό Leonhard Euler (1707-1783). Ο αριθμός e με προσέγγιση πέντε δεκαδικών ψηφίων είναι $e = 2,71828$.

Συμβολικά γράφουμε
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Σε πολλές πραγματικές εφαρμογές εμφανίζονται εκθετικές συναρτήσεις με βάση τον αριθμό e . Η απλούστερη τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x) = e^x$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται απλώς **εκθετική** και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Μία ακόμη εκθετική συνάρτηση με βάση το e είναι η

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct} \quad (1)$$

Αυτή εκφράζει ένα φυσικό μέγεθος, που μεταβάλλεται με το χρόνο t . Το Q_0 είναι η **αρχική τιμή** του Q (για $t = 0$) και είναι $Q_0 > 0$, ενώ το c είναι μια σταθερά που εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη εφαρμογή. Η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή ως **νόμος της εκθετικής μεταβολής**. Αν $c > 0$ η συνάρτηση Q είναι γνησίως αύξουσα και εκφράζει το νόμο της **εκθετικής αύξησης**, ενώ αν $c < 0$ η Q είναι γνησίως φθίνουσα και εκφράζει το νόμο της **εκθετικής απόσβεσης**. Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής αποτελεί ένα ικανοποιητικό μοντέλο για πάρα πολλές εφαρμογές της Φυσικής, της Βιολογίας, της Στατιστικής και άλλων επιστημών.

Παράδειγμα: Χρόνος ημίσειας ζωής ραδιενεργού ουσίας.

Ο αριθμός των γραμμαρίων μιας ραδιενεργού ουσίας κατά τη χρονική στιγμή t (σε δευτερόλεπτα) δίνεται από τον τύπο $Q(t) = 200 \cdot e^{-0,3t}$.

Αυτό σημαίνει ότι η ουσία που παραμένει αδιάσπαστη μετά από

7 δευτερόλεπτα είναι: $Q(7) = 200e^{-0,3 \cdot 7} \approx 200(2,718)^{-2,1} \approx 24,5$ γραμμάρια.

Ο χρόνος που χρειάζεται για να διασπασθεί ή να εξαφανισθεί η μισή ποσότητα μιας ραδιενεργού ουσίας λέγεται **ημιζωή** ή **χρόνος υποδιπλασιασμού** της ραδιενεργού ουσίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι 5 χρόνια, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού είναι $Q(t) = Q_0 2^{-\frac{t}{5}}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού η ημιζωή είναι 5 χρόνια, από το νόμο της εκθετικής απόσβεσης

$Q(t) = Q_0 \cdot e^{c \cdot t}$ έχουμε:

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 \cdot e^{c \cdot 5} \Leftrightarrow e^{5c} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^c = \sqrt[5]{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{5}}$$

Άρα $Q(t) = Q_0 2^{-\frac{t}{5}}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: B6, B7, B8, B9, B10, B11 σχολικού σελ. 171-173

Θέματα στις Εκθετικές Συναρτήσεις

ΘΕΜΑ Α

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3^x - 3^{x+\alpha} - 2^{x+2} - 2^{x-1}$ διέρχεται από το σημείο $A(3, -12)$. Να βρείτε:

- Την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$
- Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = (\alpha + 2)^x - 5\alpha^{x+1} + 20$ με $\alpha > 0$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(2, -4)$.

- Να βρείτε τον αριθμό α .
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 4$.

iii. Να λύσετε το σύστημα :

$$\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = (f(1))^{\frac{3}{2}} \\ 2^x + 2^y = 3(f(3))^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\frac{4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8}{2^{x-2} + 4}}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνετε το σύστημα $\begin{cases} 4^{\alpha-3} \cdot 8^{\beta-2} = 2 \\ 7^{3\alpha-2\beta} = 1 \end{cases}$

- i. Να βρείτε τις τιμές των α και β
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x < \frac{8}{27}$
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $\alpha^{x-1} \cdot \beta^{x+1} = 54$

ΘΕΜΑ Ε

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5^x + x$

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- β) Αν $\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι $5^\alpha - 5^\beta < \beta - \alpha$
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $5^{x^2-1} + x^2 = 5^{x+1} + x + 2$

ΘΕΜΑ ΣΤ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3$

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- β) Να λύσετε την ανίσωση $(x+1)^3 - (x^2+1)^3 > e^{x^2+1} - e^{x+1}$

ΘΕΜΑ Ζ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- β) Να λύσετε την εξίσωση $e^x = 1 - x$
- γ) Αν $\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι $e^\alpha - e^\beta < \beta - \alpha$
- δ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^3} - e^x > x - x^3$

5.2 Λογάριθμοι

Ιδιότητες Λογαρίθμων

1. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\begin{array}{lll} \alpha) 3\log 2 + \log 125 & \beta) 2\log 5 + \log 20 + \log 2 & \gamma) 2\log 40 - 4\log 2 \\ \delta) \log 4 + \log 20 - 3\log 2 & \epsilon) \log 300 - \frac{1}{2}\log 9 & \end{array}$$

2. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha) \log 5 + \log 6 - \log 3 \quad \beta) 2\log 5 + \log 12 - \log 3 \quad \gamma) \frac{1}{2}\log 16 + \log 75 - \log 3$$

3. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\begin{array}{ll} \alpha) \log 2 + \log 40 - 2\log 4 & \beta) 2\log 20 + \log 4 - 4\log 2 \\ \gamma) 2\log_2 5 + \log_2 6 - \log_2 3 - \log_2 25 & \end{array}$$

4. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\begin{array}{ll} \alpha) \frac{\log 70 + \log 30 - 2}{\log 7 + \log 3} & \beta) \frac{2\log 5 + \log 3 + 4\log 2 - 2}{\log 30 + 2\log 20 - 3} \\ \gamma) \frac{\ln(9e^4) - 2\ln 3 - 2}{\ln(2e^2) - \ln 2 + 1} & \delta) \frac{\log \sqrt{125} + \log \sqrt{27} - \log \sqrt{8}}{\log 15 - \log 2} \end{array}$$

5. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\begin{array}{ll} \alpha) \log(6 - \sqrt{26}) + \log(6 + \sqrt{26}) & \beta) \log 40 - \log(3 - \sqrt{5}) - \log(3 + \sqrt{5}) \\ \gamma) \log(10 - 4\sqrt{5}) + \log(10 + 4\sqrt{5}) - \log 2 & \delta) 2\ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(7 - 4\sqrt{3}) \end{array}$$

6. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha) 10^{\log 3} \quad \beta) 10^{1-\log 2} \quad \gamma) (\sqrt{10})^{4\log 3} \quad \delta) \frac{3\log 2 + \log 5 - \log 4}{10^{2\log 4 - \log 8}}$$

7. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha) 10^{1-\log 5} \quad \beta) 10^{2\log 6} \quad \gamma) 10^{2\log 6 - \log 12} \quad \delta) e^{\ln 24 - 3\ln 2} \quad \epsilon) \frac{e^{2-\ln 5}}{100^{\log e}}$$

ΘΕΜΑ Α

Το πολυώνυμο $P(x) = \log 2 \cdot x^3 + \log 5 \cdot x^2 - \log 4 \cdot x + \lambda$ έχει παράγοντα το $x - 2$.
Να βρείτε :

- α) την τιμή του πραγματικού αριθμού λ
- β) το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$

Γραφική Παράσταση Λογαριθμικής Συνάρτησης

8. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

α) $f(x) = \ln x$ β) $g(x) = \ln x + 2$ γ) $h(x) = \ln(x + 1)$

9. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = \log(2 - 10x)$ β) $f(x) = \ln(x + 3) + \ln(2 - x)$ γ) $f(x) = \log(x^2 - 6x + 8)$

δ) $f(x) = \log(16 - x^2)$ ε) $f(x) = \ln \frac{5-x}{x+2}$

10. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = \log(x^3 - 8) - 7 \log(x^2 - 6x + 9)$ β) $(x) = \log \frac{2x-4}{5-x}$ γ) $f(x) = \ln(e^x - e)$

11. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = \ln(e^x - 1)$ β) $f(x) = \ln(16 - 2^{4x})$ γ) $f(x) = \log(3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3)$

12. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = \log(5 - |4 - x|)$ β) $f(x) = \ln(-x^2 + 4x + 5)$ γ) $f(x) = \log(-x^3 + 7x + 6)$

δ) $f(x) = \ln \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + x}$ ε) $f(x) = \log \left(\left(\frac{1}{9} \right)^x - \frac{1}{27} \right)$ ζ) $f(x) = \ln(4^x - 10 \cdot 2^x + 16)$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{6-x}{6+x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β) Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\varphi^2 x - 3 = \frac{f(2) + f(4)}{\sin^2 x}$

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή

δ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Λογαριθμικές Εξισώσεις

13. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $\log(3 - x) + \log(1 - x) = 3 \log 2$

β) $\log(2x - 5) + \log(2x - 1) = \log 5$

γ) $2 \log x - \log(5x - 4) = 0$

δ) $\log(x - 3) + \log(x + 6) = 1$

ε) $\frac{1}{2} \cdot \log(x^2 - 16) - 1 = \log 3 - \frac{1}{2} \cdot \log(x^2 + 16)$ ζ) $\frac{1 - \log 2}{\log 5} \cdot \log x = \log 3 - \log(x - 2)$

14. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $\ln(9^x + 3^x - 5) = 0$

β) $\log(3^{2x-2} + 10) = 1 + \log(3^{x-1} - 1)$

15. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $\ln^2 x - 4 \ln x - 5 = 0$ β) $\log^2 x - 5 \log x + 4 = 0$ γ) $\log^2(x + 1) - 2 \log(x + 1) + 1 = 0$

δ) $\ln^4 x - 7 \ln^2 x + 6 = 0$ ε) $\log^3 x + 2 \log^2 x - \log x - 2 = 0$

16. Να αποδείξετε ότι $x^{\log 2} = 2^{\log x}$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $2^{\log x} + x^{\log 2} = 16$
17. Να αποδείξετε ότι $x^{\log 3} = 3^{\log x}$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $9^{\log x} - 10x^{\log 3} + 9 = 0$
18. Να λυθούν οι εξισώσεις :
- α) $5^x = 7$ β) $3 \cdot 5^x - 12 = 0$ γ) $5^{1-x} = 2^{x+3}$ δ) $25^x - 5^{x+1} + 6 = 0$
19. Να λυθούν οι εξισώσεις :
- α) $3^{x-2} = 2^{x+1}$ β) $5^{x-1} = 10^{2-x}$ γ) $2^{1+x} = e^x$

Λογαριθμικές Ανισώσεις

20. Να λύσετε τις ανισώσεις :

- α) $\ln x > 0$ β) $\ln x > 1$ γ) $\log(2-x) < 0$ δ) $\log(x^2 - 6x + 9) \leq 0$
 ε) $\log(1-x) < \log(x+3)$ ζ) $\ln(x+9) > \ln(x^2 + 2x - 3)$ η) $\ln(2^x + 1) < \ln(16 + 2^{x-4})$

21. Να λύσετε τις ανισώσεις :

- α) $\log_3(x-12) < 2$ β) $\log_2(2x-6) \geq 4$ γ) $\log_5(x+7) \leq \log_5(3-x)$
 δ) $\ln(x+5) \leq \ln(9-x)$ ε) $\ln(5-|x+1|) \leq 0$ ζ) $2\ln x \geq \ln(x-2) + \ln(x+6)$

22. Να λύσετε τις ανισώσεις :

- α) $\log\left(2x + \frac{2}{5}\right) < -1$ β) $(2\log x - 2)(3\log x + 3) \geq 0$ γ) $(5^x - 25)(1 - \log x)(2x^2 - 5x + 2) \leq 0$
 δ) $\frac{\ln x}{1 - \ln x} \leq 1$ ε) $(\log x + 1)(3 - \log x) \cdot \ln x \leq 0$

23. Να λύσετε τις ανισώσεις :

- α) $\log^2 x - 3 \log x - 4 \geq 0$ β) $\ln^2 x \leq \ln x$ γ) $2\ln^2 x - 5 \ln x + 3 \geq 1$

24. Να λύσετε τις ανισώσεις :

- α) $\log^2 x - 2 \log x - 3 > 0$ β) $\log^2 x - \log x^3 + 2 \leq 0$ γ) $\log^2 x \leq 4$ δ) $\frac{2\ln x - 1}{\ln x} \geq 1$

25. Να λύσετε τις ανισώσεις :

- α) $3^x < 5$ β) $2^{x-2} \geq 3^{x+1}$ γ) $4^x - 2^{x+3} + 15 < 0$ δ) $\frac{2 \cdot 3^x - 4}{3^x + 1} \geq 1$

Λογαριθμικά Συστήματα

26. Να λύσετε τα συστήματα :

- α) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 3 \\ \ln x + 2\ln y = 4 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x + y = 100 \\ \log x - \log y = \log 4 \end{cases}$

27. Να λύσετε τα συστήματα :

- α) $\begin{cases} \log(6x - 4y) = 1 \\ \ln(x - y) = 0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \log(y - x) = 1 - \log 5 \\ \log x + \log 6 = \log y + \log 2 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \log y - \log x = 2 - \log 50 \\ \log(y + 1) + \log x = 1 \end{cases}$

28. Να λύσετε τα συστήματα :

- α) $\begin{cases} x + y = 65 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \log(y - x) = 1 \\ \log x - \log y = \log 3 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2^{\log x} + 3^{\log y} = 13 \\ 4^{\log x} + 9^{\log y} = 97 \end{cases}$

Θέματα στις Λογαριθμικές Συναρτήσεις

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x-\alpha}{x+\alpha}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(2, -\ln 3)$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2f(x)} - 3e^{f(x)} + 2 = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 + 5x^2 + 3x - 8 = f\left(-\frac{2}{3}\right) + f\left(-\frac{4}{3}\right)$

ΘΕΜΑ Ε

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x-1) - \log(x^2 - 2x)$ και $g(x) = 1 - \log(x+1)$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου τομής των γραφικών τους παραστάσεων

γ) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = 0$ και $g(x) = 0$

δ) Να αποδείξετε ότι $f(4) - 3g(1) + 4 = \log 30$

ΘΕΜΑ ΣΤ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(2^x - 5)$. Να βρείτε :

α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

γ) τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$

ΘΕΜΑ Ζ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g

β) Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f, C_g

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$

ΘΕΜΑ Η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log[(k-1)x^2 - 2(k-3)x + k]$.

α) Να βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

β) Αν $k = 2$, να αποδείξετε ότι $f(0)f(-2) + 1 > \log \frac{1}{100^{f(0)}}$.

ΘΕΜΑ Ι

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$.

- α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g .
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$.
- δ) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.
- ε) Να λύσετε την εξίσωση $g(x) - g(1) = f(0)$

ΘΕΜΑ ΙΑ

Δίνεται η $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \ln(e^x - 1)$.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x$.
- δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > x + 2\ln 2$.

ΘΕΜΑ ΙΒ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}\right)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$.
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.
- δ) Έστω η συνάρτηση $g(x) = (e^x + 5)e^{f(x)}$.
 - i. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.
 - ii. Να λύσετε την εξίσωση $g(\eta\mu x + x) = g(x)$

ΘΕΜΑ ΙΓ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{2x} - 6e^x + 8)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq \ln 3$
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x + \ln 3$