

ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΕΦ 3^ο (Εξισώσεις: 1^{ου} βαθμού, $x^n=a$, 2^{ου} βαθμού)

Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

1. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^3 - 4\lambda)x = \lambda^2 + 4\lambda + 4$. Να συμπληρωθεί ο πίνακας

Τιμή του λ	Εξίσωση	Λύση της εξίσωσης
$\lambda=1$		
$\lambda=2$		
$\lambda=-2$		
$\lambda=0$		
$\lambda \neq 0, 2, -2$		

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

α. $2(x+2)-3(x-1)=4(2-x)$

β. $\frac{x+7}{4} - \frac{x+2}{3} = \frac{x-1}{6}$

γ. $1 - \frac{x}{3} = x - \frac{x}{12}$

δ. $1 - \frac{2x-1}{6} = 2x - \frac{x-1}{3}$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

α. $x^2(x-4)+2x(x-4)+(x-4)=0$

β. $x(x^2-1)-x^3+x^2=0$

γ. $(x^2-4)(x-1)=(x^2-1)(x-2)$

δ. $x^3-2x^2-(2x-1)(x-2)=0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

α. $\frac{1}{x+2} = \frac{x}{x^2-4}$

β. $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x^2-x}$

γ. $\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις

α. $x^2-4x=0$

β. $x^2-2x+1=0$

γ. $x^3-3x^2-x+1=0$

δ. $9-4x^2=0$

ε. $9x^2-6x+1=0$

στ. $x^3-2x^2-9x+18=0$

6. Διάλογος στην τάξη:

Καθηγητής: Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{x-12}{2000} + \frac{x-11}{2001} + \frac{x-10}{2002} = \frac{x-2000}{12} + \frac{x-2001}{11} + \frac{x-2002}{10}$$

Μαθητές: Πολύ δύσκολη, ούτε μέχρι το 2012 δεν λύνεται!

Καθηγητής: Βρείτε ένα απλό και έξυπνο τρόπο, και θα λυθεί σε τρεις γραμμές.

Παραμετρικές Εξισώσεις - Εξίσωση $x^n=a$ - Επίλυση Τύπων - Προβλήματα

7. Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{x-\lambda}{2} + \frac{x+2}{\lambda} = \frac{\lambda^2-1}{2\lambda}$$

8. Αν η εξίσωση $(\lambda^2-4)x=\lambda^2-5\lambda+6$ είναι ταυτότητα τότε η εξίσωση $(\lambda^2-3\lambda+2)x=\lambda-2$ είναι:
i. Ταυτότητα ii. Αδύνατη
(Να επιλέξετε την σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε)

9. Αν η εξίσωση $(\lambda^2-9)x=\lambda^3-27$ είναι ταυτότητα να βρείτε το μ ώστε η εξίσωση $(\lambda+\mu^2-4)x=\mu^2-\mu$ να είναι αδύνατη.

10. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $x^3=27$

β. $(2x-1)^3=-8$

γ. $(x+1)^4=16$

δ. $x^2=\lambda^3$

ε. $\sqrt{x+3}=2$

στ. $x^5+x^3=0$

ζ. $8x^3+1=0$

η. $(x+1)^5-16(x+1)=0$

11. Να λυθούν οι παρακάτω τύποι

α. $v=v_0+\gamma t$, ως προς t β. $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, ως προς R_1 γ. $F = \frac{mv^2}{R}$, ως προς R

δ. $E = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} v$, ως προς v ε. $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} v$, ως προς x στ) $E=mc^2$, ως προς m

12. Αν οι μαθητές μιας τάξης Λυκείου καθήσουν στα θρανία ανά 2, θα μείνουν όρθιοι 3 μαθητές. Αν όμως καθήσουν ανά 3 τότε χρειάζονται άλλοι 5 μαθητές για να συμπληρώσουν τα θρανία. Πόσα είναι τα θρανία και πόσοι οι μαθητές;

13. Ο αριθμός των σελίδων ενός βιβλίου είναι τριψήφιος και τα ψηφία του είναι διαδοχικοί περιττοί αριθμοί. Αν το άθροισμα των ψηφίων του είναι 15 να βρεθεί ο αριθμός αυτός.

14. Ο Γιάννης είναι τώρα 14 χρόνια μεγαλύτερος από τον Βασίλη. Αν σε 10 χρόνια ο Γιάννης θα έχει ηλικία διπλάσια της ηλικίας του Βασίλη, πόσων χρονών θα είναι ο Γιάννης σε πέντε χρόνια από τώρα;

Εξισώσεις με απόλυτα

15. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $|x|-6=0$

β. $|2x-1|=|x+2|$

γ. $3|x|+7=0$

δ. $4-2|x|=0$

ε. $2|x|+8=0$

στ. $|3x-4|=0$

16. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $||x-1|-3|=0$

β. $|x^2-1|+|x^4-1|=0$

γ. $d(x, x^2)=d(x, 0)$

17. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $|2x-4|-3|4-2x|+2=0$

β. $||x-2|+1|=4$

γ. $x^2-3|x|=0$

18. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $||x|+2|=6$

β. $||x-1|-4|=5$

γ. $||x|-5|=|2|x|+3|$

19. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{|x^2-9|}{|x^2+3x|+|3x+9|}$

- i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A και να την απλοποιήσετε.
ii. Να λύσετε την εξίσωση $A=1$.

20. Α) $||x-3|-4|=1$ Β) $||x-2|+1|=3$ Γ) $|2|x-1|-3|=1$

Δ) $||x-2|-x|=3$ Ε) $||x+3|-2|=|x-5|$

21. Α) $\left|\frac{x+2}{x-1}\right|=2$ Β) $|x-2|=-|(x-1)(x-2)|$ Γ) $|x-2| \cdot |x+2|=|7x-4|$

22. Α) $\frac{3}{|x-2|+1}=1$ Β) $|x-|x||=3-2|x|$

23. Α) $|2x+3|=x+4$ Β) $|3x+1|=x-2$ Γ) $|5-x|=x-5$

(Διακρίνω περιπτώσεις για το x).

Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

24. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^2 - 16 = 0$

γ) $x^2 + 1 = 0$

ε) $x^2 - 3x + 2 = 0$

ζ) $x^2 - x + 3 = 0$

θ) $3x^2 - 5x + 7 = 0$

ια) $x^2 - 5x + 5 = 0$

β) $x^2 - 5 = 0$

δ) $x^2 + x = 0$

στ) $x^2 + 6x + 9 = 0$

η) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

ι) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

ιβ) $x^2 - x - 1 = 0$

25. Α) $x^2 - 4x + 4 + 3(x - 2) = 0$

Β) $(2x - 1)(x + 2) = 4x^2 - 1$

26. Α) $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$

Β) $\frac{1}{x-1} + \frac{4}{x+1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

27. Α) $\frac{7 - 5x}{x + 1} = \frac{2 - 5x}{x}$

Β) $\frac{x + 1}{x - 2} + \frac{x + 1}{x + 2} = \frac{2x^2 + 4}{x^2 - 4}$

28. Α) $\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{8}{x^2 - 1}$

Β) $\frac{x}{x-2} + \frac{x+1}{x} = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 2x}$

Παραμετρικές

29. Να λυθεί η εξίσωση $kx^2 - (2k + 1)x + 2 = 0$.

30. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ αν η εξίσωση $x^2 - (\lambda^2 + 1)x + 2(\lambda + 1) = 0$ έχει λύση το 2.

31. Βρείτε το a ώστε η εξίσωση $(a + 2)x^2 + (a + 1)x - |a| = 0$ να είναι 2^{ου} βαθμού και να έχει ρίζα το -1.

32. Βρείτε το λ ώστε η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + |\lambda|x - \lambda = 0$ να είναι 2^{ου} βαθμού και να έχει ρίζα το 1.

33. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ έχει μια διπλή ρίζα.
34. Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $(2\lambda + 1)x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda + 1 = 0$ να έχει μία διπλή ρίζα η οποία και να βρεθεί.
35. Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $x^2 - 3x + 2\lambda - 3 = 0$ να είναι αδύνατη.
36. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση: $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$
 Α) Να έχει δυο ρίζες άνισες
 Β) Να έχει μια ρίζα διπλή
 Γ) Να μην έχει καμιά πραγματική ρίζα.
37. Η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$ έχει διακρίνουσα 4.
 Α) Να βρείτε τις τιμές του λ .
 Β) Για τη μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε, να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.
38. Δίνεται η εξίσωση $\kappa^2 x^2 - 2\lambda \kappa^2 x + \lambda^2 (\kappa^2 - 1) = 0$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι :
 i. η εξίσωση έχει δυο πραγματικές ρίζες άνισες,
 ii. οι αριθμοί $\lambda - \frac{\lambda}{\kappa}$ και $\lambda + \frac{\lambda}{\kappa}$ είναι ρίζες της εξίσωσης.
39. Η εξίσωση $x^2 + \lambda x + \lambda^2 - 7 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, έχει ρίζα το -2.
 α. Να βρείτε τις τιμές του λ
 β. Για κάθε τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να λύσετε την εξίσωση
40. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - 1 = 0$. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει:
 α. Δυο ρίζες άνισες β. Μια ρίζα διπλή γ. Ρίζες πραγματικές
 δ. Καμία ρίζα πραγματική.
41. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + (2\lambda + 1)x + \lambda = 0$
 Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση :
 α. Έχει μία μόνο ρίζα; Ποια είναι αυτή;
 β. Έχει μια ρίζα διπλή;
 γ. Έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες;

Τύποι Vieta

42. Να βρείτε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς :
- i. -5 και 2 ii. 4 και $\frac{1}{4}$ iii. $1-\sqrt{7}$ και $1+\sqrt{7}$ iv. $-\sqrt{2}-\sqrt{5}$ και $-\sqrt{2}+\sqrt{5}$
43. Να βρείτε δυο αριθμούς, εφόσον υπάρχουν, που να έχουν
- i. Άθροισμα 2 και γινόμενο -1. ii. Άθροισμα $\frac{5}{6}$ και γινόμενο $\frac{1}{6}$
44. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x + 1 = 0$, να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:
- i. $x_1 + x_2$ ii. $x_1 x_2$ iii. $x_1^2 + x_2^2$ iv. $x_1^3 + x_2^3$ v. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ vi. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$
45. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 5 = 0$. Να βρείτε εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς:
- i. $x_1 + 2$ και $x_2 + 2$ ii. $2x_1 - 3$ και $2x_2 - 3$ iii. x_1^2 και x_2^2 iv. x_1^3 και x_2^3
46. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 1 - \lambda = 0$ (1), με $\lambda \in (0, +\infty)$.
- A) Να βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει διπλή ρίζα.
- B) Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες x_1, x_2 για τις οποίες ισχύει: $x_1 + x_2 = 2x_1 x_2 + 1$.
47. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x + k = 0$ βρείτε το $k \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2}$.
48. Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε για τις ρίζες της εξίσωσης :
- $$x^2 - \lambda x + \lambda + 3 = 0 \text{ να ισχύει: } x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 4.$$
49. Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε για τις ρίζες της εξίσωσης :
- $$x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda = 0 \text{ να ισχύει: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1.$$
50. Προσδιορίστε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε οι ρίζες της εξίσωσης
- $$x^2 - (\alpha - 2)x - (\alpha + 3) = 0 \text{ να έχουν άθροισμα τετραγώνων ίσο με 9.}$$
51. Βρείτε το $k \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $3x^2 - 5kx + 10x = 7$ να έχει ρίζες αντίθετες .
52. Βρείτε το $k \in \mathbb{R}$ ώστε η $(k + 2)x^2 - (7k + 3)x + 4k^2 + 2 = 0$ να έχει ρίζες αντίστροφες .

53. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x + 2\lambda - 6 = 0$.
- A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .
- B) Να βρείτε για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει ρίζες
B1) αντίθετες και B2) αντίστροφες.
54. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4(\lambda + 1)x + 8\lambda - 1 = 0$
- α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .
- β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της, να αποδείξετε ότι η παράσταση:
 $A = (x_1 - 2)(x_2 - 2)$ είναι ανεξάρτητη του λ .
55. Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + kx + 12 = 0$ είναι τέτοιες ώστε $x_1 - x_2 = 1$. Να βρείτε τον $k \in \mathbb{R}$
56. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda + 5)x + 2\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε οι ρίζες ρ_1, ρ_2 της εξίσωσης
- α. Να είναι αντίθετες
β. Να είναι αντίστροφες
γ. Να ικανοποιούν τη σχέση $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 20$
δ. Να ικανοποιούν τη σχέση $\left(\rho_1 - \frac{2}{\rho_2}\right)\left(\rho_2 - \frac{2}{\rho_1}\right) = 8$
57. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$ (1)
- i. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
ii. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε το λ , ώστε να ισχύει:
$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = -\frac{2}{3}$$
58. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$ (1).
- i. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
ii. Να βρείτε το λ , ώστε η μια ρίζα της εξίσωσης (1) να είναι ίση με το τετράγωνο της άλλης.
iii. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) για την μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε.
- α. Να υπολογίσετε την επόμενη παράσταση: $A = \frac{x_1 + 2}{x_2} + \frac{x_2 + 2}{x_1}$.
- β. Να βρείτε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1 - 1}$ και $\frac{1}{x_2 - 1}$.

59. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x - \lambda^2 - 5 = 0$ (1).

- i. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), να λύσετε την εξίσωση : $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$.
- iii. Για την μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο υποερώτημα, να βρείτε την εξίσωση που έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1 = 2x_1 + 1$, $\rho_2 = 2x_2 + 1$.

60. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 3x - 7 = 0$ (1).

- i. Να υπολογίσετε τις τιμές των $x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι οι ρίζες x_1, x_2 είναι ετερόσημες.
- ii. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις : $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ και $B = (2x_1 + 1)(2x_2 + 1)$.
- iii. Να δείξετε ότι : $x_1^2 + x_2^2 = 23$.
- iv. Να βρείτε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τα τετράγωνα των ριζών της (1).

Εξισώσεις που ανάγονται σε 2^{ου} βαθμού

61. Α) $x^2 - 3|x| - 10 = 0$

Β) $(x-3)^2 - |x-3| = 2$

Γ) $|x-1|^2 - 3|x-1| - 4 = 0$

Δ) $2x^2 - 5|x| - 3 = 0$

62. Α) $2\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - 3 = 0$

Β) $|x^2 - x + 2| = 4$

Γ) $x - \sqrt{x} - 2 = 0$

Δ) $x - 6\sqrt{x} + 8 = 0$

63. Α) $2x^4 + x^2 - 1 = 0$

Β) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

Γ) $(4x-1)^2 + 3(4x-1) - 4 = 0$

Δ) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$

Ε) $(2x-1)^6 + 7(2x-1)^3 - 8 = 0$

ΣΤ) $(x-2)^{10} - 31(x-2)^5 - 32 = 0$

64. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $|x^2 - 5x + 5| = 1$

β. $x^2 - x - 6 = |x - 3|$

Προβλήματα

65. Δύο αδέρφια είναι σήμερα 3 ετών και 7 ετών αντίστοιχα .
Σε πόσα χρόνια το γινόμενο των ηλικιών τους θα είναι ίσο με 60
66. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος 8 cm και πλάτος 4 cm . Αν αυξήσουμε το μήκος και το πλάτος κατά $x\text{ cm}$,το εμβαδόν του θα αυξηθεί κατά 28 cm^2 . Να βρείτε το x .
67. Στο διπλανό σχήμα ,το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο .Οι σημειωμένες διαστάσεις είναι σε cm .Αν το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$ είναι 24 cm^2 .
Να βρείτε τις διαστάσεις του.
68. Στο διπλανό σχήμα ,το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.
69. Τα μήκη των τριών πλευρών ενός τριγώνου είναι 4 cm , 6 cm και 8 cm .Αν αυξήσουμε το μήκος κάθε πλευράς κατά $x\text{ cm}$,το τρίγωνο γίνεται ορθογώνιο. Να βρείτε το x .
70. Σε μια τάξη μοιράστηκαν ισομερώς 210 ευρώ.
Αν η τάξη είχε 5 μαθητές λιγότερους ο κάθε μαθητής θα έπαιρνε 7 ευρώ περισσότερα. Πόσοι είναι οι μαθητές;

