

ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΕΦ 2^ο (Πράξεις – Διάταξη – Απόλυτα – Ρίζες)

Πράξεις

1. Να υπολογίσετε την τιμή στις επόμενες παραστάσεις, αν οι x, y είναι αντίστροφοι :

$$A = \frac{2^{15} x^5 (-3)^{16} y}{6^{14} x^4} \quad B = \left[\left(\frac{2^{15} x^5 (-3)^{14} y}{6^{10} (6x)^4} \right)^{-1} \right]^{-2} \quad \Gamma = \frac{[(x^2 y^3)^{-1} (xy^3)^2]^2}{(x^3 y)^{-3}}$$

2. Να αποδείξετε τις ταυτότητες

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & \alpha^2 - (\alpha - \beta)^2 = 2\alpha\beta - \beta^2 \\ \text{ii.} & \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 - 2 = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \quad (\alpha \neq 0) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{iii.} & \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 = \alpha\beta \\ \text{iv.} & (x + y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x + y) \end{array}$$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις αφού πρώτα βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται:

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^2 - 3x} \\ \text{ii.} & \frac{x^2 - x + 5x - 5}{x^2 - 1} \\ \text{iii.} & \frac{x(x - 4) + 4}{(x - 2)(x + 1)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{iv.} & \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} \\ \text{v.} & \frac{(x - 2)(x - 3) - (3 - x)(x - 7)}{x^2 - 9} \\ \text{vi.} & \frac{(x - 1)(x + 1)^3 - x^4 + 1}{2x^3 - 2x} \end{array}$$

4. Να γίνουν οι πράξεις για $x, y \neq 0$

$$\begin{array}{lll} \text{i.} & \left(\frac{x}{y} \right)^5 \cdot x^{-3} \cdot y^8 & \text{ii.} & \left(\frac{x^3}{y^{-2}} \right)^4 \cdot \left(\frac{x^5}{y^{-3}} \right)^{-2} & \text{iii.} & \left(\frac{x^4}{y^3} \right)^2 \cdot \left(\frac{y^2}{x^3} \right)^3 \\ \text{iv.} & \left(\frac{x^{-3}}{y^{-5}} \right)^{-3} : \left(\frac{x}{y^3} \right)^7 & \text{v.} & (x^6 \cdot y^7)^{-2} : (x^{-5} \cdot y^{-4})^3 & \text{vi.} & (x^5 : y^4)^3 : (x^4 : y^2)^4 \end{array}$$

Να βρείτε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων, αν $x=8$ και $y=2$:

$$A = (x^4 y^{-1})^{-3} \cdot (x^3 y^{-2})^5 \cdot y^2 \quad B = \frac{(x^{-2} y)^{-4}}{(xy)^3 \cdot (xy)^{-1}}$$

5. Να αποδείξετε τις ταυτότητες

i. $(2x-3)^2 - [2(x+1)]^2 = 5 - 20x$

ii. $(x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = [(x-y)(x+y)]^2$

iii. $(a+2\beta)^2 + (2\alpha-\beta)^2 = 5[(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]$

iv. $(x+2)^2 - 2(2-x)(2+x) = (2x)^2 - (x-2)^2$

v. $x(x+1)^2 - (2x)^2 = (x-1)^2 - (1-x)^3$

vi. $(\alpha-3)^3 - 9(1-\alpha) = \alpha^3 - 9(\alpha-2)^2$

vii. $(\omega+2)^3 - 6(\omega+1)^2 = \omega^3 + 2$

viii. $(3-x)^3 - (x-1)^2 = 18x^2 + 26 - x(x+5)^2$

6. Αν $x + \frac{1}{x} = 5$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

i. $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ii. $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

7. Αν $\alpha + \beta = 7$ και $\alpha\beta = 10$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

i. $\alpha^2 + \beta^2$ ii. $\alpha^3 + \beta^3$.

8. Έχοντας υπόψη την ταυτότητα Euler (Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ή $\alpha = \beta = \gamma$ τότε: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$) να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

A) $(2x-1)^3 + (6-5x)^3 + (3x-5)^3$.

B) $(x+y-3)^3 + (2x-3y-1)^3 + (4-3x+2y)^3$.

Γ) $(x+y)^3 + (2-x+y)^3 + (y-x+1)^3$ αν $x-3y=3$.

Δ) $(2x-1)^3 - (x+1)^3 + (2-x)^3$.

9. Να γίνουν οι πράξεις:

A) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta^2}$

B) $\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-x}$

Γ) $\frac{\alpha}{\alpha+1} - \frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{2\alpha^2}{\alpha^2-1}$

Δ) $\frac{\alpha^3 + \beta^3}{(\alpha-\beta)^2 + \alpha\beta}$

E) $\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha-\beta}\right) : \left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$

Z) $\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$

H) $\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} - 1\right) \left(1 - \frac{1}{1+\alpha}\right)$

10. Να γίνουν οι πράξεις: A) $\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2}\right) : \frac{x^3 - y^3}{x^3y^2 - x^2y^3}$.

B) $\frac{x^3-1}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+x}{x^3+x^2+x}$

Γ) $\frac{x^3-x^2-2x}{x^2-4} \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)$

Διάταξη

1. Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι :
 - i. $x^2 + 1 \geq 2x$
 - ii. $x^2 + 4y^2 \geq -4xy$
 - iii. $(x + y)^2 \geq 4xy$
2. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β να αποδείξετε ότι :
 - i. $\alpha^2 + \alpha\beta \geq \beta(3\alpha - \beta)$
 - ii. $(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2) \geq 4\alpha\beta$
 - iii. $(\alpha^2 + 4)(\beta^2 + 4) \geq 4(\alpha + \beta)^2$
3. Αν $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι :
 - i. $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \geq 2$
 - ii. $\frac{1}{\alpha^4} + 1 \geq \frac{2}{\alpha^2}$
4. Να αποδείξετε ότι :
 - i. αν $x > 4$, τότε $5(x - 1) > 15$
 - ii. αν $\alpha > 3$ και $\beta > 1$, τότε $\alpha\beta + 3 > \alpha + 3\beta$
 - iii. αν $\kappa \geq 4$ και $\lambda \leq 3$, τότε $\kappa(\lambda - 3) \leq 4\lambda - 12$
5. Να αποδείξετε ότι :
 - i. $(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 4) \geq (2\alpha + \beta)^2$
 - ii. αν $\alpha < 3 < \beta$ τότε : $\alpha\beta + 9 < 3(\alpha + \beta)$
 - iii. Αν $\alpha > 1$ τότε : $\alpha^3 > \alpha^2 - \alpha + 1$
 - iv. $x(x + 6) \geq 2(x - 2)$
 - v. $25 - 2(x - 3)^2 \geq 8x - (2x + 1)^2$
6. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha + \beta = 6$, τότε :
 - i. $\alpha\beta \leq 9$
 - ii. $\alpha^2 + \beta^2 \geq 18$
7. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha + \beta \geq 0$, τότε :
 - i. $\alpha^3 + \beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha + \beta)$
 - ii. $\frac{\alpha^3 + \beta^3}{2} \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^3$

8. Αν οι αριθμοί x, y είναι ομόσημοι με $x < y$, να αποδείξετε ότι : $x - y < \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.
9. Αν ισχύει : $x < y < z$, να αποδείξετε ότι : α) $x < \frac{3x+4y}{7} < y$ β) $x < \frac{x+y+z}{3} < z$
10. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει:
 i. $\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha - \beta) + 2 = 0$ ii. $\alpha^2 + \beta^2 + 13 = 2(3\beta - 2\alpha)$
 iii. $\alpha^2 + \beta^2 = 4(\beta - 1)$ iv. $(\alpha + 5)^2 + (\beta - 2)^2 = 4(\alpha + \beta + 1)$
11. Αν $\alpha > 0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:
 i. $\alpha^2\beta - \alpha^3$ και $\alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta$ ii. $(\alpha + 1)^3$ και $1 + 3\alpha + 3\alpha^2$
12. Να αποδείξετε ότι: i. $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$ ii. $2\alpha^2 - 10\alpha + 25 > 0$
13. Αν ισχύει $1 < \alpha < 2$ και $-3 < \beta < -2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις: i. $4\alpha - 3\beta$ ii. $\alpha^2 + \beta^2$ iii. $\alpha\beta - 2$
14. Αν $2 < x < 3$ και $3 < y < 5$, να αποδείξετε ότι :
 i. $12 < 3x + 2y < 19$ ii. $-8 < -x - y < -5$
 iii. $0 < x - y + 3 < 3$ iv. $\frac{2}{5} < \frac{x}{y} < 1$
15. Αν $1 < \alpha < 3$ και $2 < \beta < 7$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών είναι οι παραστάσεις :
 i. $A = 2\alpha + 5\beta$ ii. $B = -\alpha + 4\beta - 3$ iii. $\frac{A}{B}$
16. α) Να αποδειχθεί ότι: $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$
 β) Ένα ορθογώνιο, του οποίου οι διαστάσεις είναι x και y , έχει περίμετρο 20m .
 i. Να εκφραστεί το y με τη βοήθεια του x .
 ii. Να εκφραστεί το εμβαδόν E του ορθογωνίου με τη βοήθεια του x , χρησιμοποιώντας τη σχέση του ερωτήματος (α).
 iii. Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν E είναι μικρότερο ή ίσο των 25m^2 .

17. Να δείξετε ότι:

A) $2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta + 2\alpha + 1 \geq 0$.

B) $\alpha^2 + \beta^2 + 8 \geq 4(\alpha - \beta)$

Γ) $\alpha^2 + \beta^2 + 2 \geq 2(\alpha + \beta)$

Δ) $2(\alpha + 1)^2 + 3\alpha > \alpha(\alpha + 5)$

E) $\alpha^2 + \alpha + 1 > 0$

ΣΤ) $\alpha^2 - \alpha + 1 > 0$

Z) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \geq 0$. (Πολλαπλασιάστε με το 2)

H) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha \geq 0$.

18. A) Δείξτε ότι $x^2 + y^2 - 2x + 1 \geq 0$

B) Αν $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$ βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$.

Γ) Αν $x^2 - 8x + y^2 - 2y + 17 \leq 0$ βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$.

Δ) Αν $2\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha + 1 = 0$, βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

19. A) Δείξτε ότι $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 4\beta + 5 \geq 0$

B) Αν $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 4\beta + 5 = 0$ βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Γ) Αν $9\alpha^2 - 6\alpha + \beta^2 - 2\beta + 2 \leq 0$ βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Δ) Αν $\alpha^2 + \beta^2 + 20 \leq 4(2\beta - \alpha)$ βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

E) Αν $2\alpha^2 + \beta^2 + 9 \leq 2\alpha(3 - \beta)$ βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

20. Αν $1 < x < 2$ μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι:

A) $3x - 2$ B) $4 - 3x$ Γ) $x^2 + 1$ Δ) $\frac{1}{x} + 2$

21. Αν $1 < x < 2$ και $2 < y < 3$ μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι:

A) $2x + 3y$ B) $3x - 2y$ Γ) $x + \frac{y}{2}$ Δ) $\frac{2x - y}{3}$ E) $3x^2 + 2y^2$.

Απόλυτα

1. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

i. $A = |\sqrt{6} + 3| + |\sqrt{5} - 3| - |1 - \sqrt{6}| + |2 - \sqrt{5}|$

ii. $B = |1 - \sqrt{2}| - |5 + \sqrt{2}| + |-x^2 - 2| - |x^2 + 4|, \quad x \in \mathbb{R}$

iii. $\Gamma = |5 - \pi| + |\sqrt{8} + \pi| - |-\sqrt{8} - 3|$

2. Αν $\alpha < 2 < \beta$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

i. $A = |\alpha - 2| - |2 - \beta|$ ii. $B = |\alpha - 2| + |\beta - 2|$ iii. $A = |\beta - \alpha| - 2|\alpha - \beta|$

3. Αν $x < 3$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$A = |x - 3| - 2|x - 4| + |x - 5|$ και $B = 5|3 - x| + |2x - 7|$

4. Αν $0 < x < 2$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$A = |x + 1| + |x + 2| + 2|x - 2|$ και $B = |x - 2| + |2x - 5| + |3x|$

5. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση : $A = |x + 2| + |x - 2|$ όταν :

i. $x < -2$ ii. $-2 \leq x < 2$ iii. $x > 2$

6. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής:

i. $A = |x - 3|$ ii. $B = |x + 2| + x$ iii. $\Gamma = 2x - |x - 1|$

iv. $\Delta = x - |4 - x|$ v. $E = x + 1 - |2x - 6|$ vi. $Z = 3 - |2 - x|$

7. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

i. $A = \frac{x^4 + 2|x^5|}{2|x| + 1}$ ii. $B = \frac{x^2 + 2|x|}{|x| + 2}$ iii. $\Gamma = \frac{|x|^3 + 3x^2}{2|x| + 6}$ iv. $\Delta = \frac{x^2 + 4|x| + 4}{|x| + 2}$

v. $E = \frac{x^2 - 1}{|x| + 1}$ vi. $Z = \frac{|x - 1|}{|1 - x|} + \frac{|2x + 2|}{|-x - 1|} + \frac{|x^2 - 1|}{|1 - x^2|}, \quad x \neq -1 \text{ και } x \neq 1$

8. Να αποδείξετε ότι:

i. $|\alpha + 1|^2 - 4\alpha = |\alpha - 1|^2$

ii. $(|a| - |\beta|)^2 + 2|\alpha\beta| = \alpha^2 + \beta^2$

iii. $|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$

iv. $\alpha^2 - (|\alpha| - |\beta|)(|\alpha| + |\beta|) = \beta^2$

9. Αν $\alpha < 1 < \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $K = d(1, \alpha) + d(1, \beta) - d(\alpha, \beta)$.

10. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \frac{|x + 2| - |x - 2|}{|x + 2| + |x - 2|}$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

11. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-3| < 1$

i. Να αποδείξετε ότι : $x \in (2,4)$

ii. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $K = \frac{|x-4|+|x-2|}{2} + |3x-6| + 3|x-5| + \left| \frac{x-1}{1-x} \right|$.

12. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \frac{|2x-6|+1}{4x^2-49}$ για $x \in (-\infty, 3]$.

13. Αν η απόσταση του x από το y στον πραγματικό άξονα είναι 4, να γραφεί χωρίς απόλυτη τιμή η παράσταση : $A = |x-y| + |-3y+3x|$.

14. Αν $|x| < 1$ και $|y| < 2$ να δείξετε ότι : i. $|x+y| < 3$ ii. $|x-y| < 3$ iii. $-10 < 3x-2y-3 < 4$

15. Δίνεται η παράσταση : $A = \frac{x^2-4}{|x|-2}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

ii. Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

iii. Να λύσετε την ανίσωση : $A > 3$.

16. Α) Αν $1 < x < 2$ απλοποιήστε τις παρακάτω παραστάσεις αφού βγάλετε τα απόλυτα:

$$A = |x-1| + 2|x-2|, \quad B = |3x-2| + |1-x|, \quad \Gamma = |x| - |x^2-4| - x.$$

Β) Αν $0 < x < 1$ απλοποιήστε την: $Z = |x| + |x-1| - 3|x-2| + |4-3x|$.

17. Απλοποιήστε (γράψτε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής) τις παρακάτω παραστάσεις: $A = |x^2+1| - x^2 + 1$, $B = 2|x| - x + 2$,

$$\Gamma = |x-3| + x - 1, \quad \Delta = |2x-1| + x - 2, \quad E = 2|x-1| + |x-3|,$$

$$Z = |x+2| + |1-x|, \quad H = |2x-1| + |3-x|, \quad \Theta = \frac{x^2-1}{|x|+1}.$$

18. Α) Βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$ αν $|x-2| + |y-4| = 0$.

Β) Βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$ αν $|x+y-4| + |2x-y-5| = 0$.

19. Δείξτε ότι : $\left| \frac{2\alpha}{\alpha^2+1} \right| \leq 1$.

20. Αν $|\alpha| < 1$ και $|\beta| < 1$, δείξτε ότι : $\left| \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta} \right| < 1$.

21. Α) $\text{Av } |2x-1| = |x-2| \text{ τότε } |x| = 1.$

Β) Δείξτε ότι: $\left| \frac{x-4}{x-1} \right| > 2 \Leftrightarrow |x| < 2.$

Γ) $\text{Av } |6x-1| = |2x-3| \text{ δείξτε ότι: } |x| = \frac{1}{2}.$

Δ) $\text{Av } |6x+2| < |3x+4| \text{ δείξτε ότι } |x| < \frac{2}{3}.$

22. Δείξτε ότι Α) $|3x+2| = |2x+3| \Leftrightarrow |x| = 1 \text{ και}$

Β) $|4x-3| > |3x-4| \Leftrightarrow |x| > 1.$

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

20. Α) $2|x-1| + |x-3| = 5$ Β) $2|x-1| + |2-x| = 5$

21. Α) $|x| + 3|2x-1| = x+4$ Β) $|x| - |x-1| + 3x-5 = 0$

Γ) $|3x+1| + |2-5x| = 3$ Δ) $|x-4| + 2x-1 = 3$

22. Α) $||x-3|-4| = 1$ Β) $||x-2|+1| = 3$ Γ) $|2|x-1|-3| = 1$

Δ) $||x-2|-x| = 3$ Ε) $||x+3|-2| = |x-5|$ ΣΤ) $||x|-3| = |2|x|-1|$

Ζ) $|2x-|x+1|| = 6$ Η) $|3x-|x-1|| = 3$

23. Α) $\left| \frac{x+2}{x-1} \right| = 2$ Β) $|x-2| = -|(x-1)(x-2)|$

Ανισώσεις με απόλυτα

24. Α) $|x-2| < 4$ Β) $|2x-3| \leq 3$ Γ) $2|x+1|-1 > 9$ Δ) $|1-3x|-1 \geq 0$

25. Α) $|x-3| < -1$ Β) $|x-2| \geq -2$ Γ) $|x+3| \leq 0.$

26. Α) $2(|x|+4) < 5$ Β) $\frac{2|x|-1}{3} < 1$ Γ) $2\left(\frac{|x-1|+1}{3}-1\right) = 1$

27. A) $\frac{|2x-6|}{3} - \frac{|x-3|}{4} < 3$ B) $\frac{|2x-1|}{5} + \frac{|2-4x|-1}{2} > \frac{7}{10}$
 Γ) $|3x-2|-1 > \left|x-\frac{2}{3}\right|$ Δ) $|4x-3|-3 < \left|\frac{3}{4}-x\right|$ E) $\frac{|x-2|+1}{3} + \frac{|2-x|-2}{4} < 1$
28. A) $2 < |x| < 3$ B) $3 < |2x+1| < 5$ Γ) $1 \leq |1-2x| \leq 3$
29. A) $1 < |x-3| < 2$, B) $3 \leq |2x-1| \leq 5$ Γ) $2 < |2-3x| \leq 3$
 Δ) $\|x-1|-2\| \leq 3$, E) $\|x-2|-5\| < 2$ ΣΤ) $\|4x-1|-3\| < 1$.

Πίζες

1. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\text{i. } \sqrt[7]{5^4} \cdot \sqrt[7]{5^3} \quad \text{ii. } \sqrt[6]{3^5} \cdot \sqrt[6]{3} \quad \text{iii. } \frac{\sqrt[5]{4^9}}{\sqrt[5]{4^4}} \quad \text{iv. } \sqrt[5]{7^{11}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{7^6}} \quad \text{v. } \frac{\sqrt[7]{5^8} \cdot \sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^5}} \quad \text{vi. } \frac{\sqrt[5]{3^6} \cdot \sqrt[5]{3^8}}{\sqrt[5]{3^9}}$$

2. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\begin{array}{ll} \text{i. } A = (\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{27})\sqrt{3} & \text{ii. } B = (\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{18})\sqrt{8} \\ \text{iii. } \Gamma = (\sqrt{20} + \sqrt{45})(\sqrt{80} - \sqrt{5}) & \text{iv. } \Delta = (\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54})\sqrt[3]{4} \end{array}$$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i. } (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 & \text{ii. } (\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} - \sqrt{6}) \\ \text{iii. } (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} & \text{iv. } 2\sqrt{5} - (\sqrt{5} + 1)^2 \end{array}$$

4. Να δείξετε ότι :

$$\begin{array}{ll} \text{i. } A = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} & \text{iii. } \Gamma = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \sqrt[6]{3^5} \\ \text{ii. } B = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{3}}} = \sqrt[12]{3} & \text{iv. } \Delta = \sqrt[5]{5^2\sqrt{5\sqrt{5}}} = \sqrt[20]{5^{11}} \end{array}$$

5. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις :

$$\text{i. } \sqrt{x+1} \quad \text{ii. } \sqrt[4]{-2x+4} \quad \text{iii. } \sqrt[7]{9-3x}$$

6. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι επόμενες παραστάσεις.

$$\begin{array}{lll} \text{i. } A = \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} & \text{ii. } B = \sqrt{2x-6} - \sqrt[3]{x-5} & \text{iii. } \Gamma = \frac{\sqrt[3]{3x+12}}{\sqrt[4]{7-x}} \\ \text{iv. } \Delta = \sqrt{12-4x} + \frac{1}{\sqrt[4]{2x-14}} \end{array}$$

7. Αν ισχύει ότι: $x = 2 - \sqrt{3}$ και $y = 2 + \sqrt{3}$ να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\text{i. } A = (y-x)^2 \quad \text{ii. } B = x^2 + y^2 \quad \text{iii. } \Gamma = xy \quad \text{iv. } \Delta = x^2 + 3xy + y^2$$

8. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\begin{array}{ll} \text{i. } A = \sqrt{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}} & \text{ii. } B = \sqrt{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{50} - \sqrt{32}) \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} \\ \text{iii. } \Gamma = \sqrt[3]{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2(7 - 2\sqrt{10})} & \text{iv. } \Delta = \sqrt[3]{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{2}-3} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{2}+3} \end{array}$$

9. i. Να βρείτε τα αναπτύγματα $(\sqrt{3} + 2)^2$ και $(\sqrt{3} - 2)^2$.
 ii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = (\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}})\sqrt{3}$
10. Αν ισχύει $-1 < x < 3$, να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x + 1} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$
11. Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x + 4} - \sqrt{2 - x})(\sqrt{x + 4} + \sqrt{2 - x})$
 i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .
 ii. Να απλοποιήσετε την παράσταση A .
12. Να δείξετε ότι : $(\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 7})(\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 7}) = 9$.
13. Να δείξετε ότι : $\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} + \sqrt{(5 - \sqrt{10})^2} = 2$
14. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι:
 i. $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 \geq 4\sqrt{\alpha\beta}$
 ii. $\frac{(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2}{2} \leq \alpha + \beta$
 iii. $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) \geq 2(\sqrt{\alpha\beta} - \beta)$
 iv. $\sqrt{\frac{\alpha + 4\beta}{2}} \geq \frac{\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\beta}}{2}$
15. Δίνεται ο αριθμός : $\alpha = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 - \sqrt{12}}$
 i. Να βρείτε τον αριθμό α .
 ii. Να βρείτε τον αριθμό $\beta = \sqrt{8} \cdot (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha})$
 iii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = (\sqrt{6 + \beta\sqrt{\alpha}} - 3)(1 + \sqrt{2})$
16. Να μετατρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρανομαστή:
 i. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ii. $\frac{4}{\sqrt[5]{2}}$ iii. $\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}$ iv. $\frac{20}{\sqrt[5]{6^3} \cdot \sqrt[4]{5}}$
 v. $\frac{4}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})}$ vi. $\frac{8}{\sqrt[3]{3} \cdot (3 - \sqrt{5})}$ vii. $\frac{12}{\sqrt[6]{2^5} \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{6})}$ viii. $\frac{6}{\sqrt[7]{3^4} \cdot (\sqrt{5} - 1)}$

17. Αν $\alpha \geq 0$, να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μιας ρίζας:

i. $A = \sqrt{\alpha^4 \cdot \sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha^5}}$

ii. $B = \sqrt[3]{\alpha \cdot \sqrt[5]{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha^3}}$

iii. $\Gamma = \sqrt[7]{\alpha^4 \cdot \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[4]{\alpha^7}}$

iv. $\Delta = \sqrt[3]{\alpha^2 \cdot \sqrt[3]{\alpha^4} \cdot \sqrt[4]{\alpha^3} \cdot \sqrt[5]{\alpha}}$

18. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

i. $\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2} - \frac{\sqrt{x^2}}{x}$, αν $d(x, 1) < 1$ ii. $\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{-x}} \cdot \frac{\sqrt{-x^2 - 2x}}{\sqrt{x + 2}}$, αν $d(x, -1) < 1$

19. Δείξτε ότι: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} = \frac{5}{2}$.

Όμοια δείξτε ότι $\frac{1}{5 - 2\sqrt{6}} + \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}} = 10$.

20. Να γίνουν οι πράξεις:

A) $\frac{1}{1 - \sqrt{2}} + \frac{17}{3\sqrt{2} + 1}$

B) $\frac{1}{(3 - \sqrt{2})^2} - \frac{1}{(3 + \sqrt{2})^2}$

21. Βρείτε τα εξαγόμενα:

A) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$

B) $\sqrt{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2}$

Γ) $\sqrt[12]{\alpha^7} \cdot \sqrt[20]{\alpha^3} \cdot \sqrt[15]{\alpha^2}$

Δ) $\frac{\sqrt{5^3} \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[6]{5}}$

E) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3^5}}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{3^2}}$

ΣΤ) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^7}}{\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^2}}$

22. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: A) $1 - \sqrt{2}$ και $3 - \sqrt{5}$, B) $\sqrt{5}$ και $\sqrt{2} + \sqrt{3}$,

Γ) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ και $\sqrt{21} + 1$, Δ) $\sqrt{7} - \sqrt{8}$ και $\sqrt{5} - \sqrt{6}$

E) $\sqrt{6} + \sqrt{5}$ και $\sqrt{30} + 1$ ΣΤ) $\sqrt[5]{5}$ και $\sqrt[3]{3}$ Ζ) $\sqrt{3}$ και $\sqrt[3]{5}$.

23. Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{13} - 3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{13} + 3}$

24. Να λυθούν οι εξισώσεις: A) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2|x - 1|$ και

B) $\left| \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 3 \right| = 1$.

25. Δείξτε ότι: $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2}$.

26. Αν $x = \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}$:

1) Δείξτε ότι $x < 0$, 2) Υπολογίστε το x^2 και 3) Υπολογίστε το x .

27. Αν $x = \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}}$:

1) Δείξτε ότι $x < 0$, 2) Υπολογίστε το x^2 και 3) Υπολογίστε το x .

28. Απλοποιήστε την παράσταση: $A = \frac{\sqrt{20} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{12}}{\sqrt{45} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{27}}$.

29. Αν για τους αριθμούς $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει: $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$.

A) Να δείξετε ότι $x = 2$ και $y = -1$.

B) Να δείξετε ότι οι αριθμοί $\sqrt{x} + y$ και $\sqrt{x} - y$ είναι αντίστροφοι.

Γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \sqrt{x+y+2\sqrt{x}} - \sqrt{x+y-2\sqrt{x}}.$$

30. Για τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 6\beta + 13 = 0$.

A) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -3$.

B) Να μετατρέψετε το κλάσμα: $A = \frac{15}{\sqrt{\alpha-\beta} \cdot (\sqrt{\alpha} + \beta)}$ σε ισοδύναμο με

ρητό παρονομαστή.

Γ) Να υπολογίσετε την παράσταση: $B = \sqrt{-\beta + \alpha\sqrt{\alpha}} - \sqrt{-\beta - \alpha\sqrt{\alpha}}$

Δ) Να αποδείξετε ότι: $\sqrt[3]{\alpha^3 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt[5]{\alpha}} = \sqrt[5]{64}$.