Πρόοδοι

Αριθμητική πρόοδος

2ο θέμα

2.474.

Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών:1, 3, 5, 7, …

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού 2.Άρα είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1=1$ και $\omega=2$.

$$\alpha_{100}=\alpha_1+99\omega=1+99\cdot 2=199$$

β) $S_\nu=\frac{\nu}{2}\left(2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right)=\frac{\nu}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\cdot 1+(\nu-1)\cdot\cancel{2}\right)=\nu(\cancel{1}+\nu-\cancel{1})=\nu\cdot\nu=\nu^2$

2.480.

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει α καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 12)

β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά; (Μονάδες 13)

Λύση

α) Αν θεωρήσω μία ακολουθία (α_ν),όπου α_1 η πρώτη σειρά καθισμάτων ,α_2 η δεύτερη σειρά καθισμάτων …. Κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού α. Άρα είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά α.

β) $\alpha_7=36\Leftrightarrow\alpha_1+6\alpha=36\Leftrightarrow a_1=36-6a\ \ (1)$

$$S_{10}=300\Leftrightarrow\frac{10}{2}\left(2a_1+9a\right)=300\Leftrightarrow 5\left(2a_1+9a\right)=300\overset{(:5)}{\Leftrightarrow}2a_1+9a=60\ \ (2)$$

$$(2)\overset{(1)}{\Rightarrow}2(36-6a)+9\alpha=60\Leftrightarrow 72-12\alpha+9\alpha=60\Leftrightarrow -3a=-12\Leftrightarrow\alpha=4\ \ (3)$$

$$(1)\overset{(3)}{\Rightarrow}\alpha_1=36-6\cdot 4=12$$

Άρα η πρώτη σειρά έχει	12	καθίσματα (α_1)
η δεύτερη σειρά έχει	12+4 =16	καθίσματα(α_2)
η τρίτη σειρά έχει	16+4=20	καθίσματα(α_3)
η τέταρτη σειρά έχει	20+4=24	καθίσματα(α_4)
η πέμπτη σειρά έχει	24+4=28	καθίσματα(α_5)
η έκτη σειρά έχει	28+4=32	καθίσματα(α_6)
η έβδομη σειρά έχει	36	καθίσματα(α_7)

η όγδοη σειρά έχει 36+4=40 καθίσματα(α_8)
η ένατη σειρά έχει 40+4=44 καθίσματα(α_9)
η δέκατη σειρά έχει 44+4=48 καθίσματα(α_{10})

2.508.

α) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων 1,2,3,…ν (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45. (Μονάδες 13)

Λύση

α)Έχουμε την ακολουθία $\alpha_\nu = \nu$ και $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \nu + 1 - \nu = 1$, άρα είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 1$.

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left(2\alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega\right) = \frac{\nu}{2}\left(2\cdot 1 + (\nu-1)\cdot 1\right) = \frac{\nu}{2}\left(2+\nu-1\right) = \frac{\nu}{2}\left(1+\nu\right) = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

β) $S_\nu = 45 \Leftrightarrow \dfrac{\nu(\nu+1)}{2} = 45 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu = 90 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 90 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-90) + 360 = 361 = 19^2$

$\nu = \dfrac{-1+19}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$ ή $\nu = \dfrac{-1-19}{2} = \dfrac{-20}{2} = -10$ απορρίπτεται (ν>0)

2.1015.

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2 = 0, \alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98. (Μονάδες 15)

Λύση

α) $\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \omega = 0$ (1)

$\alpha_4 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega = 4$ (2)

Από $(2)-(1) \Rightarrow \cancel{\alpha_1} + 3\omega - \cancel{\alpha_1} - \omega = 4 - 0 \Leftrightarrow 2\omega = 4 \Leftrightarrow \omega = 2$ (3)

$(1) \overset{(3)}{\Rightarrow} \alpha_1 + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = -2$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega = -2 + (\nu-1)\cdot 2 = -2 + 2\nu - 2 = 2\nu - 4$

$\alpha_\nu = 98 \Leftrightarrow 2\nu - 4 = 98 \Leftrightarrow 2\nu = 102 \Leftrightarrow \nu = 51$

2.1050.

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί :

$x+2, (x+1)^2$, $3x+2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν

i) $x=1$ ii) $x=-1$. (Μονάδες 12)

Λύση

α)Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει (2β=α+γ)

$$2(x+1)^2 = x+2+3x+2 \Leftrightarrow 2x^2+\cancel{4x}+2=\cancel{4x}+4 \Leftrightarrow 2x^2=2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

β) i) Για $x=1$ οι αριθμοί που μας δίνονται είναι οι $x+2=3,\ (x+1)^2=4,\ 3x+2=5$

Τότε $\omega = 4-3=1$.

ii) Για $x=-1$ οι αριθμοί που μας δίνονται είναι οι

$x+2=1,\ (x+1)^2=0,\ 3x+2=-1$, τότε $\omega=0-1=-1$

2.1057.

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς. (Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; (Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο; (Μονάδες 8)

Λύση

α) Αν θεωρήσω μία ακολουθία ($α_ν$),όπου α_1 η πρώτη σειρά καθισμάτων ,α_2 η δεύτερη σειρά καθισμάτων …. Κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού 20. Άρα είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=20$ και $\alpha_1=120$. Το πλήθος των καθισμάτων της ν- οστής σειράς είναι:

$$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega=120+(\nu-1)\cdot 20=120+20\nu-20=100+20\nu$$

β) $\alpha_{10}=100+20\cdot 10 =100+200=300$

γ) $S_{10}=\frac{10}{2}(2a_1+9\omega)=5(2\cdot 120+9\cdot 20)=5(240+180)=5\cdot 420=2100$

2.1064.

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (αν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1=19$ και $\alpha_{10}-\alpha_6=24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega=6$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον α_{20} . (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου. (Μονάδες 8)

Λύση

α) $\alpha_{10}-\alpha_6=24 \Leftrightarrow \alpha_1+9\omega-(\alpha_1+5\omega)=24 \Leftrightarrow$
$\cancel{\alpha_1}+9\omega-\cancel{\alpha_1}-5\omega=24 \Leftrightarrow 4\omega=24 \Leftrightarrow \omega=6$

β) $\alpha_{20}=\alpha_1+19\omega=19+19\cdot 6=19+114=133$

γ) $S_{20}=\frac{20}{2}\left(2\alpha_1+19\omega\right)=10(2\cdot 19+19\cdot 6)=10\cdot(38+114)=10\cdot 152=1520$

2.1086.

Οι αριθμοί $\mathrm{A}=1$, $\mathrm{B}=\mathrm{x}+4$, $\Gamma=\mathrm{x}+8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να βρείτε τη τιμή του x. (Μονάδες 10)

β) Αν $\mathrm{x}=1$ και ο αριθμός Α είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν),

i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω. (Μονάδες 7)

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 8)

Λύση

α)Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει
$2\mathrm{B}=\mathrm{A}+\Gamma \Leftrightarrow 2(\mathrm{x}+4)=1+\mathrm{x}+8 \Leftrightarrow 2x\cancel{+8}=1+x\cancel{+8} \Leftrightarrow x=1$

β) Για $x=1$ οι αριθμοί που μας δίνονται είναι οι $\mathrm{A}=\alpha_1=1$,$\mathrm{B}=5$ και $\Gamma=9$.

i) Τότε $\omega=\mathrm{B}-\mathrm{A}=5-1=4$

ii) $a_{20}=a_1+19v=1+19\cdot 4=1+76=77$

2.1101.

Δίνεται η εξίσωση: $\mathrm{x}^2-2\beta\mathrm{x}+\left(\beta^2-4\right)=0$, (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $\mathrm{x}_1=\beta-2$ και $\mathrm{x}_2=\beta+2$ (Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

Λύση

α) $\Delta=(-2\beta)^2-4\cdot 1\cdot(\beta^2-4)=\cancel{4\beta^2}\cancel{-4\beta^2}+16=16=4^2$

$x_1=\frac{2\beta+4}{2}=\frac{\cancel{2}(\beta+2)}{\cancel{2}}=\beta+2$ και $x_2=\frac{2\beta-4}{2}=\frac{\cancel{2}(\beta-2)}{\cancel{2}}=\beta-2$

β) οι αριθμοί x_1, β, x_2, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν:
$2\beta=x_1+x_2 \Leftrightarrow 2\beta=\beta\cancel{+2}+\beta\cancel{-2} \Leftrightarrow 2\beta=2\beta$ ισχύει

2.1301.

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (αν) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$. (Μονάδες 12)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 13)

Λύση

α) $\alpha_4 - \alpha_2 = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega - (\alpha_1 + \omega) = 10 \Leftrightarrow \cancel{\alpha_1} + 3\omega \cancel{-\alpha_1} - \omega = 10 \Leftrightarrow$
$2\omega = 10 \Leftrightarrow \omega = 5$

β) $S_3 = 33 \Leftrightarrow \frac{3}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}a_1 + \cancel{2}\omega\right) = 33 \Leftrightarrow 3 \cdot (a_1 + 5) = 33 \overset{(:3)}{\Leftrightarrow} a_1 + 5 = 11 \Leftrightarrow \alpha_1 = 6$

2.1513.

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (αν) με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_3 = 9$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο ν, ώστε να ισχύει $\alpha_\nu > 30$. (Μονάδες 13)

Λύση

α) $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\omega \Leftrightarrow 9 = 1 + 2\omega \Leftrightarrow 8 = 2\omega \Leftrightarrow \omega = 4$

β) $\alpha_\nu > 30 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega > 30 \Leftrightarrow 1 + (\nu - 1) \cdot 4 > 30 \Leftrightarrow$
$1 + 4\nu - 4 > 30 \Leftrightarrow 4\nu > 33 \Leftrightarrow \nu > \frac{33}{4} > 8$

Άρα ο μικρότερος θετικός ακέραιος είναι ο αριθμός 9.

2.4300.

Σε μία αριθμητική πρόοδο (αν) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152. (Μονάδες 13)

Λύση

α) $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39 \Leftrightarrow \cancel{\alpha_1} + 24\omega = \cancel{\alpha_1} + 11\omega + 39 \Leftrightarrow 13\omega = 39 \Leftrightarrow \omega = 3$

β) $\alpha_\nu = 152 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 152 \Leftrightarrow 2 + (\nu - 1) \cdot 3 = 152 \Leftrightarrow$
$2 + 3\nu - 3 = 152 \Leftrightarrow 3\nu = 153 \Leftrightarrow \nu = \frac{153}{3} = 51$

Άρα ο 51ος όρος είναι ίσος με 152.

2.4301.

Δίνεται αριθμητική πρόοδος ($α_ν$) με διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι: $\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=2$ (Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha_{15}-\alpha_9=18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 12)

Λύση

α) $\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=2 \Leftrightarrow \alpha_{15}-\alpha_9=2(\alpha_{10}-\alpha_7) \Leftrightarrow$

$\alpha_1+14\omega-(\alpha_1+8\omega)=2[\alpha_1+9\omega-(\alpha_1+6\omega)] \Leftrightarrow$

$\cancel{\alpha_1}+14\omega-\cancel{\alpha_1}-8\omega=2(\cancel{\alpha_1}+9\omega-\cancel{\alpha_1}-6\omega) \Leftrightarrow 6\omega=2\cdot 3\omega \Leftrightarrow 6\omega=6\omega$ *ισχύει*

β) $\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=2\,(1)$, $\alpha_{15}-\alpha_9=18\,(2)$

Από την $(1)\overset{(2)}{\Rightarrow}\frac{18}{\alpha_{10}-\alpha_7}=2 \Leftrightarrow 18=2(\alpha_{10}-\alpha_7)\overset{(:2)}{\Leftrightarrow} 9=\alpha_{10}-\alpha_7 \Leftrightarrow$

$9=\cancel{\alpha_1}+9\omega-\cancel{\alpha_1}-6\omega \Leftrightarrow 9=3\omega \Leftrightarrow \omega=3$

2.4303.

Σε αριθμητική πρόοδο ($α_ν$) ισχύουν: $\alpha_4-\alpha_9=15$ και $\alpha_1=41$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu=\nu$. (Μονάδες 13)

Λύση

α) $\alpha_4-\alpha_9=15 \Leftrightarrow \alpha_1+3\omega-(\alpha_1+8\omega)=15 \Leftrightarrow \cancel{\alpha_1}+3\omega-\cancel{\alpha_1}-8\omega=15 \Leftrightarrow$

$-5\omega=15 \Leftrightarrow \omega=-3$

β) $\alpha_\nu=\nu \Leftrightarrow \alpha_1+(\nu-1)\omega=\nu \Leftrightarrow 41+(\nu-1)(-3)=\nu \Leftrightarrow$

$41-3\nu+3=\nu \Leftrightarrow 4\nu=44 \Leftrightarrow \nu=11$

2.4304.

Σε αριθμητική πρόοδο ($α_ν$) με διαφορά $\omega=4$, ισχύει: $\alpha_6+\alpha_{11}=40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο $α_1$ της προόδου. (Μονάδες 12)

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

Λύση

α) $\alpha_6+\alpha_{11}=40 \Leftrightarrow \alpha_1+5\omega+\alpha_1+10\omega=40 \Leftrightarrow 2\alpha_1+15\omega=40 \Leftrightarrow$
$2a_1+15\cdot 4=40 \Leftrightarrow 2a_1+60=40 \Leftrightarrow 2a_1=-20 \Leftrightarrow a_1=-10$

β) $S_\nu=0 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left(2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right)=0 \overset{\nu\neq 0}{\Leftrightarrow} 2\cdot(-10)+(\nu-1)4=0 \Leftrightarrow$
$-20+4\nu-4=0 \Leftrightarrow 4\nu=24 \Leftrightarrow \nu=6$
Επομένως θα πρέπει να προσθέσουμε τους έξι πρώτους όρους

2.4312.
Οι αριθμοί $x+6,\ 5x+2,\ 11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.
α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega=4$. (Μονάδες 12)
β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1=0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει :
$2(5x+2)=x\cancel{+6}+11x\cancel{-6} \Leftrightarrow 10x+4=12x \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$
Άρα οι αριθμοί που δίνονται είναι οι 8,12,16 και $\omega=12-8=4$.

β) $S_8=\frac{8}{2}\left(2a_1+7\omega\right)=4\cdot(0+7\cdot 4)=4\cdot 28=112$

2.4319.
Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_1=2$ και $\alpha_5=14$.
α) Να αποδείξετε ότι $\omega=3$. (Μονάδες 12)
β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. (Μονάδες 13)
(Δίνεται: $\sqrt{1849}=43$).

Λύση

α) $\alpha_5=14 \Leftrightarrow \alpha_1+4\omega=14 \Leftrightarrow 2+4\omega=14 \Leftrightarrow 4\omega=12 \Leftrightarrow \omega=3$

β) $S_\nu=77 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left(2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right)=77 \overset{(\cdot 2)}{\Leftrightarrow} \nu(2\cdot 2+(\nu-1)\cdot 3)=154 \Leftrightarrow$
$\nu(4+3\nu-3)=154 \Leftrightarrow \nu(3\nu+1)-154=0 \Leftrightarrow 3\nu^2+\nu-154=0$
$\Delta=1^2-4\cdot 3\cdot(-154)=1+1848=1849$

Άρα $\nu=\frac{-1+\sqrt{1849}}{2\cdot 3}=\frac{-1+43}{6}=\frac{42}{6}=7$ ή

$\nu=\frac{-1-\sqrt{1849}}{2\cdot 3}=\frac{-1-43}{6}=\frac{-44}{6}=-\frac{22}{3}<0$ απορρίπτεται

4ο θέμα

4.2047.

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το ν^{o} όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της; (Μονάδες 6)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20η κυψέλη; (Μονάδες 6)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη; (Μονάδες 6)

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες; (Μονάδες 7)

Λύση

α) Κάθε κυψέλη απέχει από την προηγούμενη απόσταση 3.Άρα οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ο πρώτος όρος παριστάνει την απόσταση της $1^{ης}$ κυψέλης από την αποθήκη και η διαφορά την απόσταση των κυψελών μεταξύ τους.

Είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 1 + (\nu-1)\cdot 3 = 1 + 3\nu - 3 = 3\nu - 2$

β) Η ζητούμενη απόσταση είναι ο όρος α_{20} με $\alpha_{20} = 3\cdot 20 - 2 = 58\,\text{m}$

γ) i) $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \dfrac{3}{2}(2a_1 + 2\omega) = \dfrac{3}{2}(2\cdot 1 + 2\cdot 3) = \dfrac{24}{2} = 12\text{ m}$

ii) $S_{20} = a_1 + a_2 + ... + a_{20} = \dfrac{20}{2}(2a_1 + 19\omega) = 10(2\cdot 1 + 19\cdot 3) =$

$10(2+57) = 10\cdot 59 = 590m$

4.2083.

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου. (Μονάδες 5)

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Αφού τα καθίσματα από σειρά σε σειρά αυξάνονται κατά δύο, τότε έχουμε αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 12$ και διαφορά $\omega = 2$.

Οι σειρές του σταδίου είναι 25 (περιττός) άρα υπάρχει μεσαία σειρά και είναι η $\alpha_{\frac{25+1}{2}} = \alpha_{13}$.

Θα βρούμε πόσα καθίσματα έχει η α_{13} και η τελευταία δηλαδή η α_{25}.

$\alpha_{13} = \alpha_1 + 12\omega = 12 + 12\cdot 2 = 12 + 24 = 36$

Άρα η μεσαία σειρά έχει 36 καθίσματα .

$\alpha_{25} = \alpha_1 + 24\omega = 12 + 24\cdot 2 = 12 + 48 = 60$

Επομένως η τελευταία σειρά έχει 60 καθίσματα .

β) Για να βρω τη χωρητικότητα του σταδίου θα προσθέσω τα καθίσματα και των 25 σειρών , δηλαδή $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{25} = S_{25}$.

$S_{25} = \frac{25}{2}(2a_1 + 24\omega) = \frac{25}{\cancel{2}}(\cancel{2}\cdot 12 + 24\cdot \cancel{2}) = 25\cdot 36 = 900$ θέσεις έχει το στάδιο .

γ) Το πλήθος των καθισμάτων από την 7η έως την 14η σειρά δίνεται από το άθροισμα: $\alpha_7 + \alpha_8 + \ldots + \alpha_{14} = S_{14} - S_6$

$S_{14} = \frac{14}{2}(2a_1 + 13\omega) = 7(2\cdot 12 + 13\cdot 2) = 7(24 + 26) = 350$ θέσεις έχουν οι 14 πρώτες σειρές .

$S_6 = \frac{6}{2}(2a_1 + 5\omega) = 3(2\cdot 12 + 5\cdot 2) = 3(24 + 10) = 102$ θέσεις έχουν οι 6 πρώτες σειρές .

Άρα Το πλήθος των καθισμάτων από την 7η έως την 14η σειρά είναι $S_{14} - S_6 = 350 - 102 = 248$. Άρα το Λύκειο έχει 248 μαθητές .

4.2323.

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (Μονάδες 7)

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Ναι γιατί κάθε αριθμός προκύπτει από τον προηγούμενο όταν προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό (4).Έχει πρώτο όρο τον αριθμό $\alpha_1 = 3$ και διαφορά $\omega = 4$

β) $S_{40} = \frac{40}{2}\cdot(2\alpha_1 + 39\omega) = 20\cdot(2\cdot 3 + 39\cdot 4) = 20\cdot(6+156) = 20\cdot 162 = 3240$

γ) $\alpha_\nu = 120 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 120 \Leftrightarrow 3 + (\nu-1)4 = 120 \Leftrightarrow$

$3 + 4\nu - 4 = 120 \Leftrightarrow 4\nu - 1 = 120 \Leftrightarrow 4\nu = 121 \Leftrightarrow \nu = \frac{121}{4} \notin \{1,2,3,...,40\}$

Άρα ο αριθμός 120 δεν ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς.

δ) $\alpha_\nu = 235 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 235 \Leftrightarrow 3 + (\nu-1)4 = 235 \Leftrightarrow$

$3 + 4\nu - 4 = 235 \Leftrightarrow 4\nu - 1 = 235 \Leftrightarrow 4\nu = 236 \Leftrightarrow \nu = \frac{236}{4} \Leftrightarrow \nu = 59$

Ο Γιώργος έγραψε τους αριθμούς $\alpha_{41}, \alpha_{42,}\alpha_{43,}\ldots,\alpha_{59}$

Θέλουμε το άθροισμα $S = \alpha_{41} + \alpha_{42} + \alpha_{43} + \ldots + \alpha_{64} = S_{59} - S_{40}$

$S_{59} = \frac{59}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}a_1 + \overset{29}{\cancel{58}}\,\omega\right) = 59\cdot(3 + 29\cdot 4) = 59\cdot(3+116) = 7021$

Άρα το ζητούμενο άθροισμα είναι : $S = 7021 - 3240 = 3781$

4.4671.

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 10\omega$. (Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30$ και $\alpha_1 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 3\nu - 2$. (Μονάδες 6)

γ) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30; (Μονάδες 7)

δ) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60; (Μονάδες 6)

Λύση

α) $\alpha_{20} - \alpha_{10} = \alpha_1 + 19\omega - (\alpha_1 + 9\omega) = \cancel{\alpha_1} + 19\omega - \cancel{\alpha_1} - 9\omega = 10\omega$

β) $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30 \Leftrightarrow 10\omega = 30 \Leftrightarrow \omega = 3$

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega = 1 + (\nu-1)\cdot 3 = 1 + 3\nu - 3 = 3\nu - 2$

γ) $\alpha_\nu > 30 \Leftrightarrow 3\nu - 2 > 30 \Leftrightarrow 3\nu > 32 \Leftrightarrow \nu > \frac{32}{3} \simeq 10,6$.Επομένως ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30 είναι ο 11.

δ) $\alpha_\nu < 60 \Leftrightarrow 3\nu - 2 < 60 \Leftrightarrow 3\nu < 62 \Leftrightarrow \nu < \frac{62}{3} \simeq 20,6$. Άρα 20 όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60.

4.4858.

Μια περιβαλλοντική οργάνωση ξεκινά να καταγράφει τον πληθυσμό των ελαφιών σε μια δασική περιοχή από το 2000 όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Έτος	2000	2001	2002	2003	2004
Αριθμός ελαφιών	1300	1360	1420	1480	1540

Αν ο πληθυσμός των ελαφιών συνεχίσει να αυξάνεται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό και μετά το 2004:

α) Να βρείτε μια σχέση που να επιτρέπει τον υπολογισμό του πληθυσμού των ελαφιών στο τέλος κάθε έτος από το 2000 και μετά. (Μονάδες 6)

β) Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής:

i) Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό των ελαφιών στο τέλος του 2012. (Μονάδες 6)

ii) Να προβλέψετε το έτος στο τέλος του οποίου ο αρχικός πληθυσμός των 1300 ελαφιών θα αυξηθεί κατά 60%. (Μονάδες 6)

iii) Να προβλέψετε το έτος που ο πληθυσμός των ελαφιών δε θα υπερβεί τα 2600 ελάφια. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Ο πληθυσμός των ελαφιών αυξάνεται κατά 60 ελάφια στο τέλος κάθε έτους. Άρα αποτελεί αριθμητική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1 = 1300$ και $\omega = 60$.

Η ζητούμενη σχέση είναι ο ν-οστός όρος της προόδου, με:

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\cdot\omega = 1300 + (\nu - 1)\cdot 60 = 1300 + 60\nu - 60 = 60\nu + 1240$

β) i) Ο πληθυσμός των ελαφιών to 2012 είναι ο όρος

$\alpha_{13} = 60\cdot 13 + 1240 = 780 + 1240 = 2020$ ελάφια

ii) $a_\nu = 1300 + 1300\cdot 0,6 \Leftrightarrow 60\nu + 1240 = 2080 \Leftrightarrow 60\nu = 840 \Leftrightarrow \nu = 14$

Άρα το ζητούμενο έτος είναι το 2015.

iii) $a_\nu < 2600 \Leftrightarrow 60\nu + 1240 < 2600 \Leftrightarrow 60\nu < 1360 \Leftrightarrow \nu < \dfrac{136}{6} = \dfrac{68}{3} \simeq 22,6$

Επομένως το 2023 ο πληθυσμός των ελαφιών δε θα υπερβεί τα 2600 ελάφια.

4.4925.

Σε αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa + 1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός.(Μονάδες8)

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$. (Μονάδες 8)

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 9)

Λύση

α) $\omega=(\kappa+1)^2-\kappa^2=(\cancel{\kappa}+1-\cancel{\kappa})\cdot(\kappa+1+\kappa)=2\kappa+1$ περιττός

β) i) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Άρα

$$2\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3 \Leftrightarrow 2\kappa^2=2+(\kappa+1)^2 \Leftrightarrow 2\kappa^2=2+\kappa^2+2\kappa+1 \Leftrightarrow$$

$$\kappa^2-2\kappa-3=0 \Leftrightarrow \kappa=-1 \ \textit{απορρίπτεται}(\kappa>1) \ \textit{ή} \ \kappa=3$$

Άρα $\omega=2\cdot 3+1=7$

ii) $a_\nu=1017 \Leftrightarrow \alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega=1017 \Leftrightarrow 2+(\nu-1)\cdot 7=1017 \Leftrightarrow$

$$2+7\nu-7=1017 \Leftrightarrow 7\nu=1022 \Leftrightarrow \nu=\frac{1022}{7}=146$$

Άρα ο όρος 1007 είναι ο 146ος όρος της προόδου.

4.6143.

Στην Α΄ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:
«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με x - 1 μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε x+3 σειρές με x-3 μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε η Α΄ τάξη έχει 90 μαθητές. (Μονάδες 6)

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Το πλήθος των μαθητών είναι από το πρώτο δεδομένο $x(\mathrm{x}-1)$ μαθητές.

Από το δεύτερο δεδομένο είναι $(\mathrm{x}-3)(\mathrm{x}+3)-1$ μαθητές. Άρα :

$$x(x-1)=(x-3)(x+3)-1 \Leftrightarrow \cancel{x^2}-x=\cancel{x^2}-9-1 \Leftrightarrow -x=-10 \Leftrightarrow x=10$$

β) Έχει $10\cdot(10-1)=10\cdot 9=90$ μαθητές

γ) Κάθε ομάδα έχει 2 παραπάνω μαθητές από την προηγούμενη ομάδα. Άρα το πλήθος μαθητών κάθε ομάδας είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=2$ και $\alpha_1=2$

Το άθροισμα των μαθητών όλων των ομάδων είναι ίσο με 90 .

$$S_\nu=90 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega\right]=90 \Leftrightarrow \frac{\nu}{\cancel{2}}\left[2\cdot\cancel{2}+(\nu-1)\cdot\cancel{2}\right]=90 \Leftrightarrow$$

$$2\nu+\nu^2-\nu=90 \Leftrightarrow \nu^2+\nu-90=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\nu=9} \ \textit{ή} \ \nu=-10 \ \ \textit{απορρίπτεται} \ (\nu\geq 1)$$

($\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-90) = 1+360 = 361 = 19^2$
$\nu = \frac{-1+19}{2} = \frac{18}{2} = 9$ ή $\nu = \frac{-1-19}{2} = \frac{-20}{2} = -10$)

Άρα θα δημιουργηθούν 9 ομάδες εργασίας.

4.7503.

Οι αριθμοί : $x^2+5,\ x^2+x,\ 2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x. (Μονάδες 6)

β) Αν $x=3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο 4ος όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 6)

iii) Το άθροισμα $S = \alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+\ldots+\alpha_{24}$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου έχουμε :

$2(x^2+x) = x^2+5+2x+4 \Leftrightarrow 2x^2 \cancel{+2x} - x^2 - 5 \cancel{-2x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$

β) Για $x=3$: Οι αριθμοί που δίνονται είναι οι : $\alpha_4 = 3^2+5=14$, $\alpha_5 = 3^2+3=12$,

$\alpha_6 = 2\cdot 3+4=10$

i) Η διαφορά $\omega = \alpha_5-\alpha_4 = 12-14=-2$

ii) $a_4 = 14 \Leftrightarrow a_1+3\omega = 14 \Leftrightarrow \alpha_1+3\cdot(-2)=14 \Leftrightarrow \alpha_1-6=14 \Leftrightarrow \alpha_1=20$

iii) $S = \alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+\ldots+\alpha_{24} = S_{24}-S_{14} = -72-98=-170$

$$S_{24} = \frac{24}{2}\left(2a_1+23\omega\right) = 12\left[2\cdot 20+23\cdot(-2)\right] = 12\cdot(40-46) = -72$$

$$S_{14} = \frac{14}{2}\left(2a_1+13\omega\right) = 7\left[2\cdot 20+13\cdot(-2)\right] = 7\cdot(40-26) = 98$$

4.7504.

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο 3ος όρος είναι $\alpha_3=8$ και ο 8ος όρος είναι $\alpha_8=23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο 1ος όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1=2$ και η διαφορά της $\omega=3$. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = (\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+3) + \ldots + (\alpha_{31}+31)$

(Μονάδες 10)

Λύση

α) $\alpha_3 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1+2\omega=8$ (1) και $\alpha_8=23 \Leftrightarrow \alpha_1+7\omega=23$ (2).

$(2)-(1) \Rightarrow 5\omega=15 \Leftrightarrow \omega=3$

$(1) \overset{\omega=3}{\Rightarrow} \alpha_1+6=8 \Leftrightarrow \alpha_1=2$

β) $\alpha_{31}=\alpha_1+30\cdot\omega=2+30\cdot3=2+90=92$

γ) $S=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+3)+\ldots+(\alpha_{31}+31)\Leftrightarrow$

$S=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots\alpha_{31}+1+2+3+\ldots+31=S_{31}+\ S'_{31}=1457+496=1953$

$S_{31}=\frac{31}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\alpha_1+\overset{15}{\cancel{30}}\cdot\omega\right)=31\cdot(2+15\cdot3)=31\cdot47=1457$

Θεωρώ την αριθμητική πρόοδο (β_ν) με $\beta_1=1$ και $\omega'=1$ (1,2,3,…ν)

Τότε :$1+2+3+\ldots+31=S'_{31}=\frac{31}{\cancel{2}}(\cancel{2}\beta_1+\overset{15}{\cancel{30}}\,\omega')=31\cdot(1+15)=31\cdot16=496$

4.7514.

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3=10$ και $\alpha_{20}=61$.

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$ (Μονάδες 9)

Λύση

α) $\alpha_3=8\Leftrightarrow\alpha_1+2\omega=8$ (1) και $\alpha_8=23\Leftrightarrow\alpha_1+7\omega=23$ (2).

$(2)-(1)\Rightarrow5\omega=15\Leftrightarrow\omega=3$

$(1)\overset{\omega=3}{\Rightarrow}\alpha_1+6=8\Leftrightarrow\alpha_1=2$

β) $\alpha_{31}=\alpha_1+30\cdot\omega=2+30\cdot3=2+90=92$

γ) $S=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+3)+\ldots+(\alpha_{31}+31)\Leftrightarrow$

$S=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots\alpha_{31}+1+2+3+\ldots+31=S_{31}+\ S'_{31}=1457+496=1953$

$S_{31}=\frac{31}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\alpha_1+\overset{15}{\cancel{30}}\cdot\omega\right)=31\cdot(2+15\cdot3)=31\cdot47=1457$

Θεωρώ την αριθμητική πρόοδο (β_ν) με $\beta_1=1$ και $\omega'=1$ (1,2,3,…ν)

Τότε :$1+2+3+\ldots+31=S'_{31}=\frac{31}{\cancel{2}}(\cancel{2}\beta_1+\overset{15}{\cancel{30}}\,\omega')=31\cdot(1+15)=31\cdot16=496$

4.8458.

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν), όπου ν ∈N* που αποτελείται από ακέραιους αριθμούς για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1=\mathrm{x}$, $\alpha_2=2\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}-4$, $\alpha_3=\mathrm{x}^2-2$ όπου $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $x=3$. (Μονάδες 10)

β) Να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014 . (Μονάδες 8) γ) Να υπολογιστεί το άθροισμα $S=\alpha_1+\ \alpha_3+\alpha_5+\ ...+\ \alpha_{15}$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Επειδή οι $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$2\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3 \Leftrightarrow 2(2x^2-3x-4)=x+x^2-2 \Leftrightarrow$$
$$4x^2-6x-8=x+x^2-2 \Leftrightarrow 3x^2-7x-6=0$$
$$\Delta=(-7)^2-4\cdot3\cdot(-6)=49+72=121=11^2$$
$$x_1=\frac{7+11}{2\cdot3}=\frac{18}{6}=3 \text{ δεκτή και } x_2=\frac{7-11}{2\cdot3}=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3}\notin Z \text{ απορρίπτεται}$$

β) Για $x=3$ είναι $\alpha_1=3,\ \alpha_2=2\cdot3^2-3\cdot3-4=5,\ \alpha_3=3^2-2=7$ και

$$\omega=\alpha_2-\alpha_1=5-3=2$$
$$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu=3+(\nu-1)\cdot2 \Leftrightarrow \alpha_\nu=3+2\nu-2 \Leftrightarrow \alpha_\nu=2\nu+1$$
$$\alpha_\nu=2014 \Leftrightarrow 2\nu+1=2014 \Leftrightarrow 2\nu=2013 \text{ άτοπο(άρτιος ίσος με περιττό)}$$

γ) Αν θεωρήσω αριθμητική πρόοδο (β_ν) ,με $\beta_1=\alpha_1=3$ και διαφορά $\omega'=2\omega=4$, τότε:

$$\beta_\nu=\beta_1+(\nu-1)\omega' \Leftrightarrow \alpha_{15}=\alpha_1+(\nu-1)\omega' \Leftrightarrow$$
$$\cancel{\alpha_1}+14\omega=\cancel{\alpha_1}+(\nu-1)\cdot4 \Leftrightarrow 14\cdot2=4\nu-4 \Leftrightarrow 4\nu=32 \Leftrightarrow \nu=8$$
$$S=S_8=\beta_1+\beta_2+\beta_3+...+\beta_8=\frac{8}{2}(2\beta_1+7\omega')=4(6+28)=4\cdot34=136$$

Υπάρχει πρόβλημα . Από το 13ο κάθισμα και κάτω

τα κενά καθίσματα βγαίνουν περισσότερα από τα καθίσματα

4.10775.

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων .Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου. (Μονάδες 4)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο; (Μονάδες 5)

δ) Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνεται κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Άρα αποτελεί αριθμητική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1=16$ καθίσματα και διαφορά ω που είναι ο αριθμός κατά τον οποίο αυξάνεται μία σειρά σε σχέση με την προηγούμενη της.
Η 7η σειρά είναι ο
$\alpha_7 = 28 \Leftrightarrow \alpha_1 + 6\omega = 28 \Leftrightarrow 16 + 6\omega = 28 \Leftrightarrow 6\omega = 12 \Leftrightarrow \omega = 2$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu = 16 + (\nu - 1)\cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 16 + 2\nu - 2 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2\nu + 14$

γ) $S_{20} = \frac{20}{2}\left(2a_1 + 19\omega\right) = 10\cdot\left(2\cdot 16 + 19\cdot 2\right) = 10\cdot(32+38) = 10\cdot 70 = 700$ καθίσματα

δ) Το πλήθος των κενών καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου γιατί κάθε σειρά έχει 3 περισσότερα καθίσματα από την προηγούμενη της.
Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (β_ν) του πλήθους των κενών καθισμάτων κάθε σειράς με πρώτο όρο $\beta_1 = 6$ και $\omega' = 3$ καθίσματα

i) $\beta_\nu = \beta_1 + (\nu - 1)\cdot\omega' = 6 + (\nu - 1)\cdot 3 = 6 + 3\nu - 3 = 3\nu + 3$
Ισχύει $\beta_\nu \le \alpha_\nu \Leftrightarrow 3\nu + 3 \le 2\nu + 14 \Leftrightarrow \nu \le 11$
Το πλήθος των κενών καθισμάτων δεν μπορεί να υπερβαίνει το πλήθος των καθισμάτων της ίδιας σειράς.
Θα υπάρχουν κενά καθίσματα από την 11η σειρά και πάνω ($\nu = 11 \Leftrightarrow \alpha_\nu = \beta_\nu$)

ii) Αν S'_{10} το σύνολο των κενών καθισμάτων των πρώτων 10 σειρών της αίθουσας τότε :
$S'_{10} = \frac{10}{2}\left(2\beta_1 + 9\omega'\right) = 5\cdot(2\cdot 6 + 9\cdot 3) = 5\cdot(12+27) = 195$ καθίσματα
$S_{10} = \frac{10}{2}\left(2\alpha_1 + 9\omega\right) = 5\cdot(2\cdot 16 + 9\cdot 2) = 5\cdot(32+18) = 250$ καθίσματα
Οι θεατές βρίσκονται από τη διαφορά $S_{10} - S'_{10} = 250 - 195 = 55$ θεατές

4.13093

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21 € ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις.
Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.
α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης. (Μονάδες 4)
β) Αν για κάθε $\nu \le 51$ ο αριθμός α_ν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής

προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο $51^{ος}$ επιβάτης.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{10201}=101$)

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Ο δεύτερος επιβάτης θα πληρώσει 3+0,5=3,5€
ο τρίτος επιβάτης θα πληρώσει 3,5+0,5=4€
ο τέταρτος επιβάτης θα πληρώσει 4+0,5=4,5€

β) Επειδή το ποσό που πληρώνει κάθε επιβάτης είναι κατά 0,5 € περισσότερο από τον προηγούμενο η $(α_ν)$ είναι αριθμητική πρόοδος με $α_1$=3€ και διαφορά ω=0,5€

γ) Το ποσό που θα πληρώσει ο $51^{ος}$ επιβάτης είναι $\alpha_{51}=\alpha_1+50\omega=3+50\cdot 0,5=28$ €

δ) Έστω ότι πρέπει να πουλήσει ν εισιτήρια .Τότε η είσπραξη θα είναι $Σ_ν$ €.

Οπότε : $\Sigma_\nu>30\cdot 21\Leftrightarrow\dfrac{\nu}{2}\cdot\left[2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega\right]>630\,\dfrac{\nu}{2}\cdot\left[2\cdot 3+(\nu-1)\cdot 0,5\right]>630\overset{(\cdot 4)}{\Leftrightarrow}$

$$2\nu\cdot(6+0,5\nu-0,5)>2520\Leftrightarrow 12\nu+\nu^2-\nu-2520>0\Leftrightarrow\nu^2+11\nu-2520>0\ (1)$$

Η διακρίνουσα είναι : $\Delta=11^2-4\cdot 1\cdot(-2520)=121+10080=10201$

Έχει ρίζες : $\nu=\dfrac{-11+\sqrt{10201}}{2}=\dfrac{-11+101}{2}=\dfrac{90}{2}=45$ και

$\nu=\dfrac{-11-\sqrt{10201}}{2}=\dfrac{-11-101}{2}=\dfrac{-112}{2}=-56$

Από την (1) $\Rightarrow(\nu+45)(\nu-56)>0\overset{\nu+45>0}{\Leftrightarrow}\nu-56>0\Leftrightarrow\nu>56$

Θα πρέπει να βγάλει τουλάχιστον 57 εισιτήρια αδύνατον αφού το λεωφορείο έχει 51 θέσεις

4.13156

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος $(α_ν)$, όπου $\nu\in\mathbb{N}^*$. Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι: $α_1$ = x, $\alpha_2=2x^2-3x-4$, $a_3=x^2-2$, όπου $x\in Z$, τότε :

α) να αποδειχθεί ότι x = 3 .

(Μονάδες 10)

β) να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014 .

(Μονάδες 8)

γ) να υπολογιστεί το άθροισμα $S = α_1 + α_3 + α_5 + ...+ α_{15}$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α)Επειδή $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου :

$2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 \Leftrightarrow 2(2x^2 - 3x - 4) = x + x^2 - 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 6x - 8 - x - x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$3x^2 - 7x - 6 = 0$

Η διακρίνουσα είναι : $\Delta = (-7)^2 - 4\cdot 3\cdot(-6) = 49 + 72 = 121 = 11^2$

Οι ρίζες είναι : $x_1 = \frac{7+11}{2\cdot 3} = \frac{18}{6} = 3$, $x_2 = \frac{7-11}{2\cdot 3} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \notin Z$ απορρίπτεται

Επομένως x=3.

β) $\alpha_1=3,\alpha_2=5,\alpha_3=7$ και ω= $\alpha_2-\alpha_1=5-3=2$

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 3 + (\nu-1)\cdot 2 = 3 + 2\nu - 2 = 2\nu + 1$

$\alpha_\nu = 2014 \Leftrightarrow 2\nu + 1 = 2014 \Leftrightarrow 2\nu = 2013$ άτοπο (άρτιος =περιττός)

Επομένως δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014

γ) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5,...,\alpha_{15} = 3,7,11,...,31$

Έστω η αριθμητική πρόοδος β_ν ,με $\beta_1=\alpha_1=3$,($\beta_2=7$) και

$\omega' = \beta_2 - \beta_1 = \alpha_3 - \alpha_1 = 7 - 3 = 4$

$\beta_\nu = \beta_1 + (\nu-1)\omega' \Leftrightarrow \alpha_{15} = 3 + (\nu-1)\cdot 4 \Leftrightarrow 31 = 3 + 4\nu - 4 \Leftrightarrow 4\nu = 32 \Leftrightarrow \nu = 8$

$S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + ... + \alpha_{15} = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_8 \Leftrightarrow S_8 = \frac{8}{2}\cdot(\beta_1 + \beta_8) \Leftrightarrow$

$S_8 = 4\cdot(3+31) \Leftrightarrow S_8 = 4\cdot 34 = 136$

Άρα S=136

Γεωμετρική πρόοδος

2ο θέμα

2.495.

Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ, ισχύει: $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$.

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι : $\alpha_\nu = 2^{\nu-3}$ (Μονάδες 12)

Λύση

α) $\alpha_3 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1\cdot\lambda^2 = 1$ (1), $\alpha_5 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1\cdot\lambda^4 = 4$ (2)

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{\cancel{\alpha_1}\cdot\lambda^{\cancel{4}^{2}}}{\cancel{\alpha_1}\cdot\cancel{\lambda^2}} = \frac{4}{1} \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda = 2$$

$$(1) \Rightarrow \alpha_1\cdot 2^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1\cdot 4 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{4}$$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1} = \frac{1}{4}\cdot 2^{\nu-1} = \frac{1}{\cancel{2^2}}\cdot 2^{\cancel{\nu-1}^{\,\nu-3}} = 2^{\nu-3}$

2.1032.

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x,\ 2x+1,\ 5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:
i) $x=1$ ii) $x=-1$ (Μονάδες 12)

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει :
$(2x+1)^2 = x\cdot(5x+4) \Leftrightarrow 4x^2 \cancel{+4x} +1 = 5x^2 \cancel{+4x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

β) i) Όταν $x=1$ έχουμε τους αριθμούς : 1,3,9 και ο λόγος είναι : $\lambda = 3:1 = 3$
ii) Όταν $x=-1$ έχουμε τους αριθμούς : -1,-1,-1 και ο λόγος είναι :
$\lambda = (-1):(-1) = 1$

2.1088.

α) Αν οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

β) Αν οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει :
$2x = 2+4-x \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$
Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2,2,2 και η διαφορά είναι $\omega = 2-2 = 0$.

β) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει :
$x^2 = 2\cdot(4-x) \Leftrightarrow x^2 = 8-2x \Leftrightarrow x^2+2x-8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -4$

Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2,2,2 και ο λόγος είναι $\lambda = \frac{2}{2} = 1$ ή

τους αριθμούς : 8,-4,2 και ο λόγος είναι $\lambda = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$

γ) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου ισχύει:
$x = 2$.

2.1100.

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1), με παράμετρο β >0.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$
(Μονάδες 12)

β) Αν $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1,\ \beta,\ x_2$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

Λύση

α) $\Delta = (-5\beta)^2 - 4\cdot 2\cdot 2\beta^2 = 25\beta^2 - 16\beta^2 = 9\beta^2$

$$x_1 = \frac{5\beta+3\beta}{2\cdot 2} = \frac{8\beta}{4} = 2\beta \text{ και } x_1 = \frac{5\beta-3\beta}{2\cdot 2} = \frac{2\beta}{4} = \frac{\beta}{2}$$

β) Για να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου θα πρέπει : $\beta^2 = x_1 \cdot x_2$,το οποίο ισχύει γιατί $P = x_1\cdot x_2 = \frac{\cancel{2}\beta^2}{\cancel{2}} = \beta^2$ (Σχέσεις Vieta)

2.3828.

Οι αριθμοί $\kappa-2$, 2κ και $7\kappa+4$, κ∈ℕ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν).

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa=4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 12)

β) i) Να εκφράσετε το 2ο όρο, τον 5ο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1. (Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2+\alpha_5 = 4(\alpha_1+\alpha_4)$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει :

$$(2\kappa)^2 = (\kappa-2)(7\kappa+4) \Leftrightarrow 4\kappa^2 = 7\kappa^2 + 4\kappa - 14\kappa - 8 \Leftrightarrow$$

$$3\kappa^2 - 10\kappa - 8 = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4\cdot 3\cdot(-8) = 100 + 96 = 196 = 14^2$$

$$\kappa = \frac{10+14}{2\cdot 3} = \frac{24}{6} = 4 \text{ ή } \kappa = \frac{10-14}{2\cdot 3} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \notin \mathrm{N}\ \textit{απορρίπτεται}$$

Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2,8,32 και ο λόγος είναι $\lambda = 8:2 = 4$

β) i) $a_2 = a_1\cdot\lambda = 4\alpha_1$, $a_5 = a_1\cdot\lambda^4 = \alpha_1\cdot 4^4 = 256\alpha_1$, $a_4 = a_1\cdot\lambda^3 = \alpha_1\cdot 4^3 = 64\alpha_1$

ii) $\alpha_2+\alpha_5 = 4a_1 + 256\alpha_1 = 4(\alpha_1+256\alpha_1) = 4(\alpha_1+\alpha_4)$

2.4288.

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $x+4$, $2-x$, $6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 6)

ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει :

$$(2-x)^2=(x+4)(6-x)\Leftrightarrow 4\cancel{-4x}+x^2=6x-x^2+24\cancel{-4x}\Leftrightarrow$$

$$2x^2-6x-20=0\overset{(:2)}{\Leftrightarrow}x^2-3x-10=0\Leftrightarrow x=5\ \acute{\eta}\ x=-2$$

β) Για $x=5$ έχουμε τους αριθμούς : $9,\ -3,\ 1=\alpha_4$ και

i) ο λόγος είναι $\lambda=\dfrac{1}{-3}=-\dfrac{1}{3}$

ii) $\alpha_4=a_1\cdot\lambda^3\Leftrightarrow 1=\alpha_1\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3\Leftrightarrow 1=\alpha_1\cdot\left(-\dfrac{1}{27}\right)\Leftrightarrow \alpha_1=-27$

2.4315.

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\dfrac{\alpha_5}{\alpha_2}=27$

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda=3$. (Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1. (Μονάδες 15)

Λύση

α) $\dfrac{\alpha_5}{\alpha_2}=27\Leftrightarrow\dfrac{\cancel{\alpha_1}\cdot\lambda^{\cancel{4}\,3}}{\cancel{\alpha_1}\cdot\cancel{\lambda}}=27\Leftrightarrow\lambda^3=27\Leftrightarrow\lambda=3$

β) $S_4=200\Leftrightarrow a_1\dfrac{\lambda^4-1}{\lambda-1}=200\Leftrightarrow a_1\dfrac{3^4-1}{3-1}=200\Leftrightarrow$

$$\alpha_1\cdot\frac{81-1}{2}=200\Leftrightarrow\alpha_1\cdot\frac{\cancel{80}^{\,40}}{\cancel{2}}=200\Leftrightarrow 40\alpha_1=200\Leftrightarrow\alpha_1=5$$

4ο θέμα

4.2340.

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, το 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ, το 2ο μήνα 110 ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) i) Να βρείτε το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν^{o} μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 4)

ii) Να βρείτε το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν^{o} μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 4)

iii) Να βρείτε το ποσό $A_ν$ που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 5)

iv) Να βρείτε το ποσό $B_ν$ που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 5)

β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (Μονάδες 3)

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο; (Μονάδες 4)

Λύση

α) Το πρόγραμμα Α περιγράφει μία γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 = 1,\ \lambda = 2$

Το πρόγραμμα Β περιγράφει μία αριθμητική πρόοδο με $β_1=100$, $ω=10$

i) $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 1 \cdot 2^{\nu-1} = 2^{\nu-1}$

ii) $\beta_\nu = \beta_1 + (\nu-1)\cdot\omega = 100 + (\nu-1)\cdot 10 = 100 + 10\nu - 10 = 10\nu + 90$

iii) $A_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} = 1 \cdot \dfrac{2^\nu - 1}{2-1} = 2^\nu - 1$

iv) $B_\nu = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_\nu = \dfrac{\nu}{2}(\beta_1 + \beta_\nu) = \dfrac{\nu}{2}(100 + 10\nu + 90) =$

$\dfrac{\nu}{\cancel{2}}\left(\overset{5}{\cancel{10}}\nu + \overset{95}{\cancel{190}}\right) = 5\nu^2 + 95\nu$

β) i)

$A_6 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$ ευρώ (πρόγραμμα Α)

$B_6 = 5\cdot 6^2 + 95\cdot 6 = 180 + 570 = 750$ ευρώ (πρόγραμμα Β)

ii) $A_{12} = 2^{12} - 1 = 4096 - 1 = 4095$ ευρώ (πρόγραμμα Α)

$B_{12} = 5\cdot 12^2 + 95\cdot 12 = 720 + 1140 = 1860$ ευρώ (πρόγραμμα Β)

Με το πρόγραμμα Α θα συγκεντρωθεί μεγαλύτερο ποσό.

4.4629.

Ένα μυρμήγκι περπατάει πάνω σε ένα ευθύγραμμο κλαδί μήκους 1 m, με τον ακόλουθο τρόπο:

Ξεκινάει από το ένα άκρο του κλαδιού και το 1ο λεπτό προχωράει 1 cm, το 2ο λεπτό προχωράει 3 cm και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση κατά 2 cm μεγαλύτερη από αυτήν που διάνυσε το προηγούμενο λεπτό.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι κάθε λεπτό της κίνησής του, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο αν αυτής της προόδου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τη συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του. (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού. (Μονάδες 4)

δ) Υποθέτουμε τώρα ότι, την ίδια στιγμή που το μυρμήγκι ξεκινάει την πορεία του, από το άλλο άκρο του κλαδιού μία αράχνη ξεκινάει και αυτή προς την αντίθετη κατεύθυνση και με τον ακόλουθο τρόπο: Το 1ο λεπτό προχωράει 1 cm, το 2ο λεπτό προχωράει 2 cm, το 3ο λεπτό προχωράει 4 cm και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση διπλάσια από αυτήν που διένυσε το προηγούμενο λεπτό.

(i) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο β_ν αυτής της προόδου. (Μονάδες 7)

(ii) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση 1 cm. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Από ορισμό αριθμητικής προόδου οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι κάθε λεπτό της κίνησής του, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1= 1$ και διαφορά $\omega= 2$ (κάθε λεπτό διανύει απόσταση κατά 2 cm μεγαλύτερη από αυτήν που διάνυσε το προηγούμενο λεπτό)

Ο ν-οστός όρος είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega = 1 + (\nu-1)\cdot 2 = 1 + 2\nu - 2 = 2\nu - 1$

β) Η συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του είναι :

$$S_5 = \frac{5}{2}\left(2a_1 + 4\omega\right) = \frac{5}{\cancel{2}}(\cancel{2}\cdot 1 + 4\cdot\cancel{2}) = 5\cdot(1+4) = 5\cdot 5 = 25cm\ .$$

γ) $$S_\nu = 100 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = 100 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(\cancel{1} + 2\nu - \cancel{1}) = 100 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\nu}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\nu = 100 \Leftrightarrow \nu^2 = 100 \overset{\nu>0}{\Leftrightarrow} \nu = 10\min$$

δ)

i) Από ορισμό γεωμετρικής προόδου οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\beta_1 = 1$ και λόγο $\lambda= 2$ (κάθε λεπτό διανύει διπλάσια απόσταση από αυτήν που διάνυσε το προηγούμενο λεπτό)

Ο ν-οστός όρος είναι $\beta_\nu = \beta_1\cdot\lambda^{\nu-1} = 1\cdot 2^{\nu-1} = 2^{\nu-1}$

ii) Αν S'_ν η απόσταση που διανύει η αράχνη σε ν λεπτά ,τότε:

$$S'_\nu + S_\nu + 1 = 100 \Leftrightarrow \beta_1\cdot\frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} + \frac{\nu}{2}\left(\alpha_1 + \alpha_\nu\right) + 1 = 100 \Leftrightarrow$$

$$1\cdot\frac{2^\nu - 1}{2-1} + \frac{\nu}{2}(\cancel{1} + 2\nu - \cancel{1}) + 1 = 100 \Leftrightarrow 2^\nu \cancel{-1} + \frac{\nu}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\nu \cancel{+1} = 100 \Leftrightarrow$$

$$2^\nu + \nu^2 = 100$$

Για $\nu = 1$ είναι $2^\nu + \nu^2 = 2 + 1 = 3 \neq 100$

Για $\nu = 2$ είναι $2^\nu + \nu^2 = 4 + 4 = 8 \neq 100$

Για $\nu = 3$ είναι $2^\nu + \nu^2 = 8 + 9 = 17 \neq 100$

Για $\nu = 4$ είναι $2^\nu + \nu^2 = 16 + 16 = 32 \neq 100$

Για $\nu = 5$ είναι $2^\nu + \nu^2 = 32 + 25 = 57 \neq 100$

Για $\nu = 6$ είναι $2^\nu + \nu^2 = 64 + 36 = 100$

Για κάθε $\nu \geq 7$ είναι $2^\nu + \nu^2 > 100$, άρα $\nu = 6$

4.4678

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β και εμβαδόν Ε, τέτοια ώστε οι αριθμοί α, Ε, β, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{E}=1$. (Μονάδες 10)

β) Αν $a+\beta=\dfrac{5}{2}$ τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη α, β. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τα μήκη α, β. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E}=\alpha\cdot\beta\,(1)$

Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου έχουμε :

$$\mathrm{E}^2=\alpha\cdot\beta \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \mathrm{E}^{\cancel{2}}=\cancel{\mathrm{E}} \overset{\mathrm{E}>0}{\Leftrightarrow} \mathrm{E}=1$$

β) $(1)\Rightarrow \alpha\cdot\beta=1$ και $a+\beta=\dfrac{5}{2}$

i) Η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2-\dfrac{5}{2}x+1=0 \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0$

ii) Τα μήκη α, β είναι ρίζες της εξίσωσης $2x^2-5x+2=0$

$\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9=3^2$

Οι ρίζες της είναι $x_1=\dfrac{5+3}{2\cdot 2}=\dfrac{8}{4}=2$ και $x_2=\dfrac{5-3}{2\cdot 2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

Επομένως $\alpha=2$ και $\beta=\dfrac{1}{2}$ ή $\alpha=\dfrac{1}{2}$ και $\beta=2$

4.6859.

Δίνονται οι αριθμοί $2,\ x,\ 8$ με $x>0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2,\ x,\ 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου; (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2,\ x,\ 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου; (Μονάδες 5)

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, … και (β_ν) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, … τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν). (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) να ισχύει: $2\left(S_\nu+24\right)=\beta_7$ (Μονάδες 8)

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει :

$2x = 2+8 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$

Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2,5,8 και η διαφορά είναι $\omega = 5-2 = 3$

β) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει :

$x^2 = 2\cdot 8 \Leftrightarrow x^2 = 16 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 4$

Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2,4,8 και ο λόγος είναι $\lambda = \frac{4}{2} = 2$

γ) i) $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right] = \frac{\nu}{2}\left[2\cdot 2 + (\nu-1)3\right] = \frac{\nu}{2}\left(4+3\nu-3\right) = \frac{\nu}{2}(3\nu+1) = \frac{3\nu^2+\nu}{2}$

ii) $\beta_7 = \beta_1\cdot\lambda^6 = 2\cdot 2^6 = 2^7 = 128$

$$2\left(S_\nu + 24\right) = \beta_7 \Leftrightarrow 2\left(\frac{3\nu^2+\nu}{2} + 24\right) = 128 \Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu + 48 = 128$$

$3\nu^2 + \nu - 80 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4\cdot 3\cdot(-80) = 1 + 960 = 961 = 31^2$

$\nu = \frac{-1+31}{2\cdot 3} = \frac{30}{6} = 5$ ή $\nu = \frac{-1-31}{2\cdot 3} = \frac{-32}{6} = -\frac{16}{3}$ απορρίπτεται (ν>0)

4.8170

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα: $\alpha_3 = 4$, $\alpha_5 = 16$ και $\lambda > 0$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $\beta_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν). (Μονάδες 9)

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$

(Μονάδες 8)

Λύση

α) $\alpha_3 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1\cdot\lambda^2 = 4$ (1)

$\alpha_5 = 16 \Leftrightarrow \alpha_1\cdot\lambda^4 = 16$ (2)

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{\cancel{\alpha_1}\lambda^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{\alpha_1}\cancel{\lambda^2}} = \frac{16}{4} \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2 (\lambda > 0)$$

$$(1) \overset{(3)}{\Rightarrow} \alpha_1\cdot 2^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1\cdot 4 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1$$

β) $\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \frac{\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}}{\frac{1}{\alpha_\nu}} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{1}{\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}} = \frac{1}{2}$ Άρα η ακολουθία (β_ν) αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της ($α_ν$).

γ) $\beta_1=\dfrac{1}{\alpha_1}=1$

$$S_{10}=a_1\frac{\lambda^{10}-1}{\lambda-1}=1\cdot\frac{2^{10}-1}{2-1}=2^{10}-1=1023$$

$$S'_{10}=1\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-1}{\frac{1}{2}-1}=1\cdot\frac{\frac{1}{2^{10}}-1}{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}=\frac{\frac{1-2^{10}}{2^{10}}}{-\frac{1}{2}}=-\frac{\cancel{2}(1-2^{10})}{2^{\cancel{10}\,9}}=-\frac{-1023}{2^9}=\frac{1023}{2^9}=$$

$$\frac{1}{2^9}\cdot 1023=\frac{1}{2^9}\cdot S_{10}$$

4.13088.

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά το ατύχημα.

(Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.;

(Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Επειδή η επιφάνεια που καλύπτει στη θάλασσα το πετρέλαιο κάθε μέρα είναι διπλάσια από την προηγούμενη ημέρα ,οι αριθμοί 3, 6, 12,… που είναι τα τετραγωνικά που καλύπτει το πετρέλαιο είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με $α_1=3$ και $λ=2$.

Στο τέλος της 5ης ημέρας η επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο είναι $α_5=α_1\cdot λ^4=3\cdot 2^4=48$ τ.μ.

β) $α_ν=768 \Leftrightarrow 3\cdot 2^{ν-1}=768 \Leftrightarrow 2^{ν-1}=\dfrac{768}{3} \Leftrightarrow 2^{ν-1}=256 \Leftrightarrow 2^{ν-1}=2^8$, άρα $ν-1=8 \Leftrightarrow ν=9$.

Δηλαδή στο τέλος της 9ης ημέρας το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.

γ) Οι αριθμοί των τετραγωνικών μέτρων που δηλώνουν την επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο στη θάλασσα από το τέλος της 9ης ημέρας και μετά είναι: $768, 762, 756,...$ και αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με $β_1=768$

και $\omega = -6$

Έστω ότι τη ν–οστή ημέρα το πετρέλαιο καλύπτει 12 τ.μ στη θάλασσα. Τότε

$\beta_\nu = 12 \Leftrightarrow \beta_1 + (\nu - 1)\omega = 12 \Leftrightarrow 768 - 6(\nu - 1) = 12 \Leftrightarrow 768 - 6\nu + 6 = 12 \Leftrightarrow$

$768 + 6 - 12 = 6\nu \Leftrightarrow 6\nu = 762 \Leftrightarrow \nu = \frac{762}{6} = 127$.

Δηλαδή σε 127 ημέρες η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

4.13092

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

(Μονάδες 6)

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_ν το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($\nu \le 5$).

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

(Μονάδες 6)

ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του ν.

(Μονάδες 6)

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

(Μονάδες 7)

Λύση

Επειδή ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε ώρα έχουμε γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 = 102400$ βακτήρια και $\lambda = \frac{1}{2}$.

α) Μετά από 6 ώρες θα έχουμε $\alpha_6 = \alpha_1 \cdot \lambda^5 = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 102400 \cdot \frac{1}{32} = 3200$ βακτήρια

β) i) Μετά από μία ώρα θα έχουμε $3200 \cdot 3 = 9600$ βακτήρια. Επειδή ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε να τριπλασιάζεται έχουμε γεωμετρική πρόοδο με $\beta_1 = 9600$ και λ=3

ii) $\beta_\nu = \beta_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 9600 \cdot 3^{\nu-1}$

iii) $\beta_3 = \beta_1 \cdot \lambda^2 = 9600 \cdot 9 = 86400$ βακτήρια.