

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1 - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

[Υποκεφάλαιο 1.3 - Μονότονες συναρτήσεις - Αντίστροφη συνάρτηση του σχολικού βιβλίου].

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Συνάρτηση “1–1”

Όταν ορίσαμε τη συνάρτηση επισημάνσαμε ότι σε κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται ένα ακριβώς στοιχείο $y \in \mathbb{R}$. Όμως είναι δυνατόν η συνάρτηση σε περισσότερα $x \in A$ να αντιστοιχίζει το ίδιο $y \in \mathbb{R}$ όπως για παράδειγμα η συνάρτηση f με $f(x) = \sin x$ στα σημεία $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ με $k \in \mathbb{Z}$. Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις οι οποίες έχουν ένα μόνο πρότυπο $x \in A$ για κάθε τιμή τους, οι οποίες παρουσιάζουν πολύ ενδιαφέρον.

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση “1–1”**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

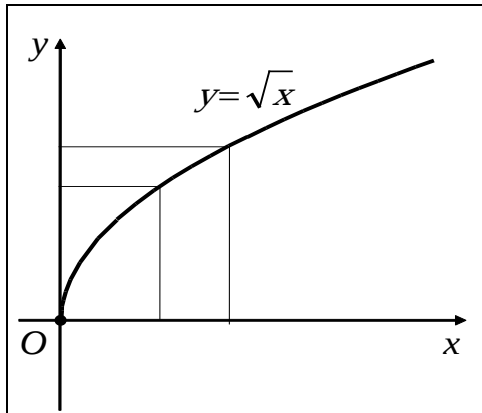
ή ισοδύναμα

Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **συνάρτηση “1–1”**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

Αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

Παράδειγμα 1.

Η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$, με $x \geq 0$ είναι συνάρτηση “1-1”. (Σχήμα α)

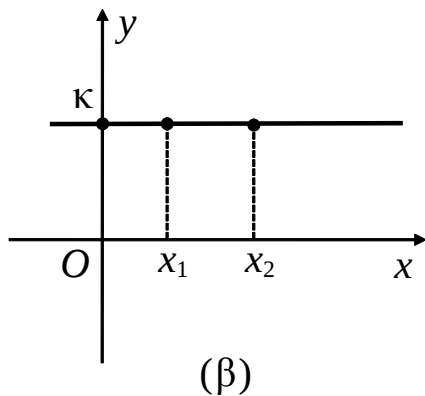


Γιατί αν υποθέσουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Παράδειγμα 2.

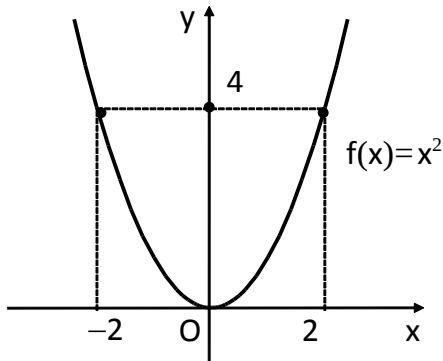
Η συνάρτηση f με $f(x) = \kappa$ δεν είναι συνάρτηση “1-1” (Σχήμα β), αφού $f(x_1) = f(x_2) = \kappa$ για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.



(β)

Παράδειγμα 3.

Η συνάρτηση f με $f(x) = x^2$ (Σχήμα γ) δεν είναι συνάρτηση “1-1” αφού $f(-2) = f(2) = 4$ αν και είναι $-2 \neq 2$.

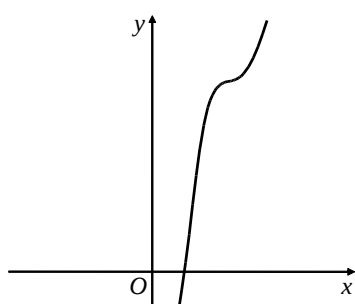


Προσοχή: Με παράδειγμα μπορούμε να δεχτούμε την αλήθεια μιας άρνησης , αλλά δεν μπορούμε να δεχτούμε την αλήθεια μιας πρότασης.

Σχόλια

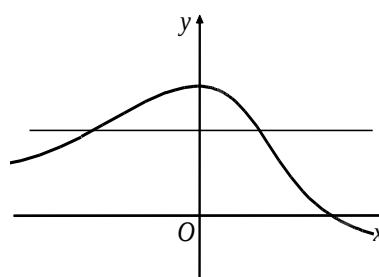
Από τον ορισμό προκύπτει ότι:

- για να είναι μία συνάρτηση “1-1” θα πρέπει διαφορετικά στοιχεία από το πεδίο ορισμού να έχουν διαφορετικές εικόνες.
- ότι μια συνάρτηση f είναι “1-1”, αν και μόνο αν:
 1. Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .
 2. Δεν υπάρχουν σημεία στη C_f με την ίδια τεταγμένη. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ σε ένα σημείο (Σχήματα δ και ε).



συνάρτηση 1-1

(δ)



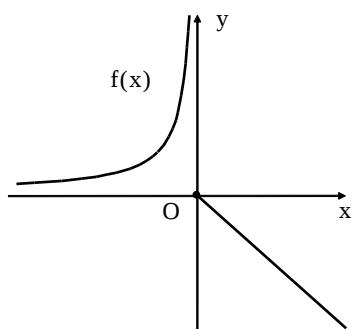
η συνάρτηση δεν είναι 1-1

(ε)

3. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη (γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα), τότε προφανώς, είναι και “1-1”. Έτσι, οι συναρτήσεις f, g, h με $f(x) = x^3$, $g(x) = e^x$, $h(x) = \ln x$, είναι συναρτήσεις “1-1”.

Υπάρχουν, όμως, συναρτήσεις που είναι “1-1” αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για

παράδειγμα η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -x & , x \geq 0 \\ -\frac{2}{x} & , x < 0 \end{cases}$ (Σχήμα).



Σημαντικές παρατηρήσεις (στη συνάρτηση “1 - 1”)

1. Από τον ορισμό συνάγουμε ότι η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ **δεν** είναι “1-1” αν και μόνον αν υπάρχουν δύο τουλάχιστον $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ για τα οποία ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$ (βλέπε παράδειγμα 3).
2. Αν μία συνάρτηση δεν είναι “1-1” τότε θα υπάρχει ευθεία παράλληλη στον άξονα $x\chi'$ η οποία θα τέμνει τη C_f σε δύο τουλάχιστον σημεία, (βλέπε σχήμα (ε)). Χαρακτηριστικά μπορούμε να αναφέρουμε τις άρτιες συναρτήσεις, π.χ. $f(x) = x^2$ ή κάποιες περιττές, π.χ. $f(x) = \eta\mu x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
3. Είναι προφανές ότι αν $y \in f(A)$ και η f είναι “1-1” τότε η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μοναδική λύση.
4. Αν μία συνάρτηση είναι “1-1” **δεν** σημαίνει ότι είναι απαραίτητα γνησίως μονότονη. (Θα μάθουμε στο κεφάλαιο περί «συνέχειας συναρτήσεων», σε ποια περίπτωση αυτή η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη).
5. Μία συνάρτηση f μπορεί να μην είναι “1-1” σε όλο το πεδίο ορισμού της αλλά να είναι “1-1” σε διάφορα υποσύνολα του πεδίου ορισμού της.
6. Αν η f **δεν** είναι “1-1” τότε δεν είναι και μονότονη.
7. Αν η f είναι “1-1” σε ένα $E \subseteq A$ (πεδίο ορισμού) τότε ισχύουν όλα τα προηγούμενα στο E και $f(E)$ αντί του A και $f(A)$.

Αντίστροφη συνάρτηση

Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση “1-1”, τότε η συνάρτηση $g: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$, ονομάζεται **αντίστροφη της f** και συμβολίζεται με f^{-1} .

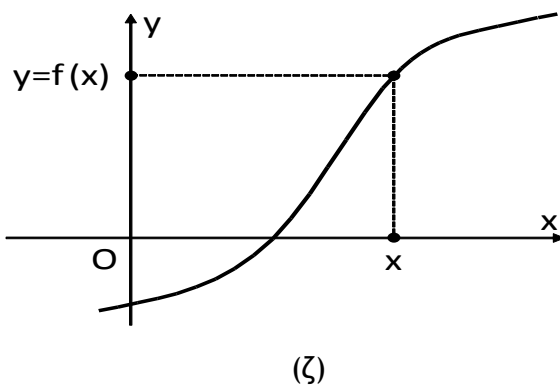
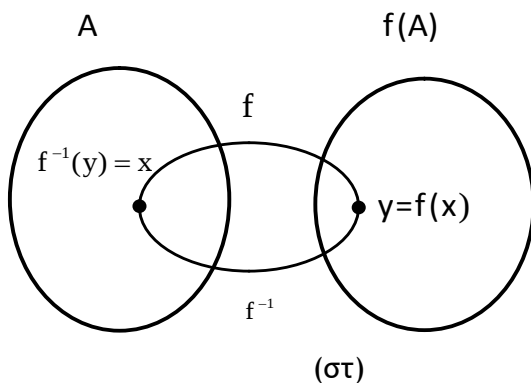
Προσοχή: $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$

Από τον τρόπο που ορίσαμε την f^{-1} συμπεραίνουμε ότι:

- έχει ως πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών $f(A)$ της f .
- έχει ως σύνολο τιμών, το πεδίο ορισμού A της f και ισχύει:

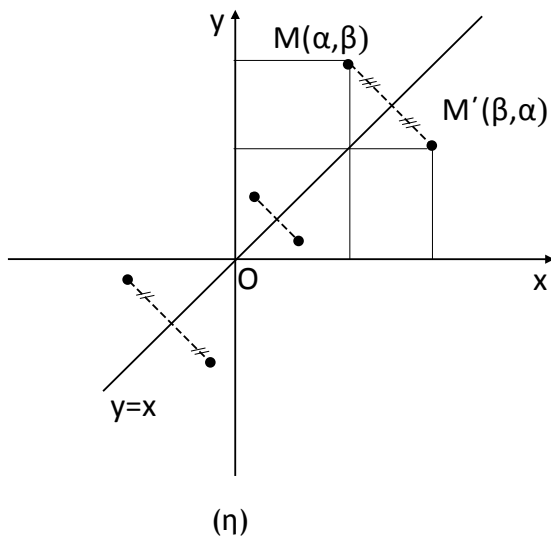
$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y , τότε η f^{-1} αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η f^{-1} είναι η αντίστροφη διαδικασία της f , οπότε $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$ για κάθε $y \in f(A)$.



Για παράδειγμα βλέπε σχολικό βιβλίο, σελ.154.

• Ας πάρουμε τώρα μια “1-1” συνάρτηση f και έστω ότι $\beta = f(\alpha)$. Τότε το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στην C_f . Όμως σύμφωνα με τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης θα πρέπει $\alpha = f^{-1}(\beta)$ δηλαδή το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στην $C_{f^{-1}}$. Τα σημεία όμως $M(\alpha, \beta)$ και $M'(\beta, \alpha)$ είναι συμμετρικά με άξονα συμμετρίας την ευθεία $y = x$ (διχοτόμος 1^{ης} - 3^{ης} γωνίας των αξόνων) και με δεδομένο ότι το σημείο M είναι τυχαίο σημείο της C_f , καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η C_f και η $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.



Σημαντικές παρατηρήσεις (στην αντίστροφη συνάρτηση)

1. Αν μία συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη, τότε και η αντίστροφη της f^{-1} είναι επίσης αντιστρέψιμη και ισχύει $(f^{-1})^{-1} = f$.
2. Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη τότε η f δεν είναι “1-1”.
3. Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη.
4. Αν η f δεν είναι γνησίως μονότονη τότε η f δεν σημαίνει ότι δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμη. Π.χ $f(x) = \begin{cases} x & -1 \leq x \leq 0 \\ x+3 & -2 < x < -1 \end{cases}$
5. Η αντίστροφη μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.
6. Μια συνάρτηση με πολλούς κλάδους αντιστρέφεται μόνο όταν
 - Κάθε κλάδος της είναι “1-1” και
 - Τα σύνολα τιμών των επιμέρους κλάδων είναι ξένα μεταξύ τους.

Σχόλιο: Για να βρούμε το σύνολο τιμών της f , λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x .

Για κάθε $x \in A$, έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \dots x = \dots \text{ για } y \in \dots$$

$$\text{Π.χ. } f(x) = \begin{cases} x-4 & \text{με } x \geq 6 \\ x-2 & x \leq 5 \end{cases} \text{ και σύνολα τιμών για το κάθε κλάδο } \begin{matrix} [2, +\infty) \\ (-\infty, 3] \end{matrix} \text{ αντίστοιχα.}$$

Παρατηρούμε ότι για $x = 7 \geq 6$ έχουμε $f(7) = 3 \in [2, +\infty)$ και για $x = 5$ έχουμε $f(5) = 3 \in (-\infty, 3]$. Δηλαδή η f δεν είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, άρα δεν αντιστρέφεται. Όμως κάθε κλάδος της είναι 1-1 συνάρτηση η οποία και αντιστρέφεται.

7. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση τότε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} τα υπολογίζουμε από την λύση της εξίσωσης $f(x) = x$ ή της $f^{-1}(x) = x$. Στο σημείο αυτό να υπενθυμίσουμε ότι επειδή οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ ισχύει η ισοδυναμία των δύο εξισώσεων:
 $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x$ ή $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$.
Σε αυτή την περίπτωση προφανώς όλα τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$.

8. Αν η f δεν είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση τότε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} τα υπολογίζουμε από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases}$$

Σε αυτή την περίπτωση δεν είναι απαραίτητο ότι τα κοινά σημεία βρίσκονται επάνω στην ευθεία $y = x$.

9. Αν ένα σημείο του Οxy είναι κοινό της ευθείας $y = x$ και της C_f τότε ανήκει και στη $C_{f^{-1}}$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η συνάρτηση $f(x) = \ln x^4$ έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}^*$ στο οποίο όμως δεν είναι 1-1. Αν θεωρήσουμε την $f(x) = \ln x^4$ στο διάστημα $(-\infty, 0)$ ή στο $(0, +\infty)$ τότε είναι 1-1 σε κάθε διάστημα ξεχωριστά. Άρα την αντίστροφη την βρίσκουμε σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

Ημερομηνία τροποποίησης: 24/8/2011