

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο σημείο $x_0 = 0$ τις συναρτήσεις:

α.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x+e| - |x-e|}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

β.
$$g(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \eta\mu x}{\sqrt{x^2+1}-1}, & x < 0 \\ 1+x^3 \cdot \eta\mu 2x, & x \geq 0 \end{cases}$$

2. Έστω η συνεχής στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 5)$ και είναι τέτοια ώστε: $(x-1)f(x) = \kappa x^2 + \lambda x - 2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Να βρείτε τους $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ και τον τύπο της $f(x)$.

3. Έστω συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο σημείο $x_1 = 0$ με $f(0) = 0$ και τέτοια ώστε:

$$f(x) \leq f(x+y-1) \leq f(x) - f(y-1) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbf{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ με $x > 2$. Να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$.

5. Βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, \pi]$.

6. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$, γνησίως φθίνουσα στο

$$[2, +\infty), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ και } f(2) = 0, \text{ τότε:}$$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

7. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 5]$, τέτοια ώστε $f^2(1) + f^2(5) = 6f(1) - 2f(5) - 10$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (1, 5)$ ώστε $2f(x_0) = x_0$.

8. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{-x} = x - 2$, έχει μοναδική θετική ρίζα.

9. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $[0, 5]$ με $f(1) + f(2) + f(3) = 0$ (1).

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0, 5]$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln x} - x + 2, x \in (0, 1)$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x + 1) \ln x = 1$ είναι αδύνατη, στο $(0, 1)$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ με $f(x) = \ln x + e^{x-2}$.

α) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = e^2(\alpha - \ln x)$, έχει μοναδική ρίζα για κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $e \ln x + e^{x-1} = 1$.

12. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) < f(\beta)$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$x_0 \in (\alpha, \beta) \text{ ώστε } f(x_0) = \frac{f(\alpha) + 2f(\beta)}{3}.$$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 2, x \in (2, +\infty)$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2 \ln x = 5 - 2x$ είναι αδύνατη, στο $(2, +\infty)$.

14. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, έτσι ώστε να ισχύουν

- $f(0) = 0$ και
- $e^{2f(x)} + 2xe^{f(x)} = 1$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$, $x \in \mathbf{R}$.

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f αν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$.

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{2f(x)} - 2017 = 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα.

15. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ για την οποία ισχύει $f(x^2 - 2x) + f(x) = 3x^2 - 3x + 8, x \in \mathbf{R}$ (1). Να δείξετε ότι:

α) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0 + 5$.

β) Η ευθεία $y = c$ με $c \in (1, 13)$ έχει με τη γραφική παράσταση της f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_1 \in (-1, 3)$.

16. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $[-2, 2]$ με $f(-1) = -3$ και τέτοια ώστε:

$$x^3 + f^2(x) = 8 \text{ για κάθε } x \in (-2, 2).$$

α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

β. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2, 2)$.

γ. Να βρείτε τη συνάρτηση $f(x)$.