

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΕΝΝΟΙΑ ΟΡΙΟΥ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$ - ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$ -
ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$ - ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ - ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ
[Κεφ 1.4: Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και Ενότητες Όριο και Διάταξη -
Όρια και Πράξεις του κεφ.1.5 Μέρος Β΄ του σχολικού βιβλίου].

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Η έννοια του ορίου

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$. Αν βάλουμε στη θέση του x τιμές πολύ κοντά στο 1, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

$x < 1$	$f(x)$	$x > 1$	$f(x)$
0,9	1,9	1,1	2,1
0,99	1,99	1,01	2,01
0,999	1,999	1,001	2,001
0,9999	1,9999	1,0001	2,0001

Παρατηρούμε, ότι όταν το x παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 1, η $f(x)$ παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 2. Σε αυτήν την περίπτωση θα γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

και θα διαβάζουμε:

«το όριο της $f(x)$, καθώς το x τείνει στο 1, είναι 2».

Γενικά:

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 , τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

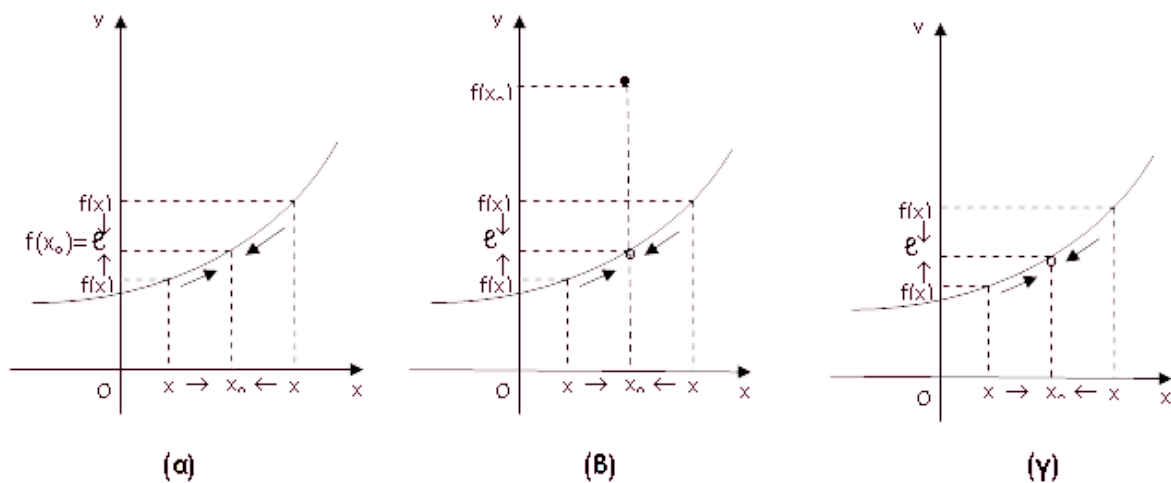
και θα διαβάζουμε:

«το όριο της $f(x)$, καθώς το x τείνει στο x_0 , είναι ℓ »

ή

«το όριο της $f(x)$ στο x_0 , είναι ℓ ».

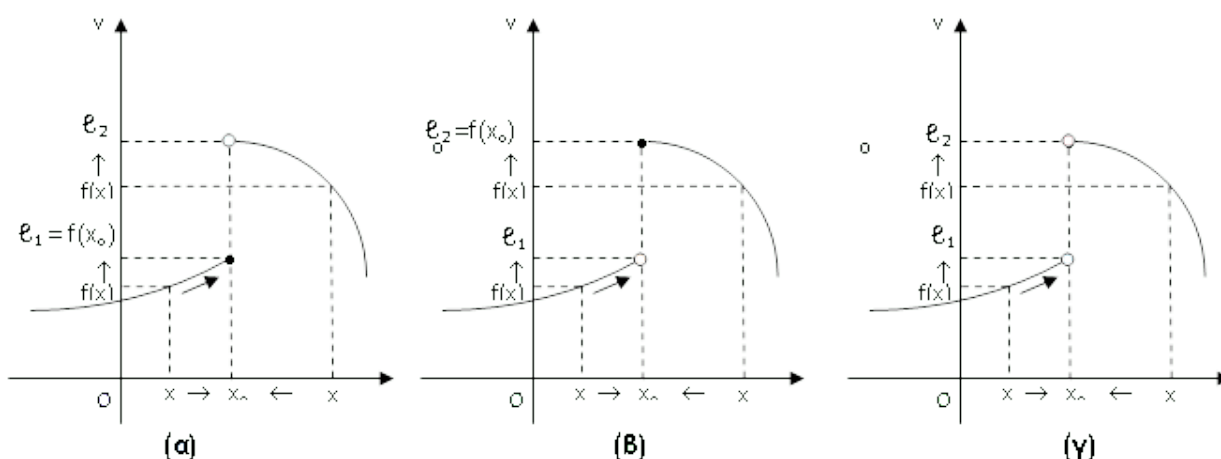
Παρατήρηση:



Βλέποντας τα παραπάνω σχήματα προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0 πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε «κοντά στο x_0 », δηλαδή η f να είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής:
 $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (α, x_0) ή (x_0, β) .
- Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης όπως φαίνεται στα σχήματα (α) και (β), ή να μην ανήκει σε αυτό όπως στο σχήμα (γ).
- Η τιμή της f στο x_0 όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 όπως είναι στο σχήμα (α) ή διαφορετική από αυτό, όπως είναι στο σχήμα (β).

Πλευρικά όρια



Παρατηρώντας τα παραπάνω σχήματα βλέπουμε ότι:

- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό l_1 , καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές ($x < x_0$), τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1$$

και διαβάζουμε:

«το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από αριστερά, είναι l_1 ».

- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό l_2 , καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές ($x > x_0$), τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2$$

και διαβάζουμε:

«το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από δεξιά, είναι l_2 »

Τους αριθμούς $l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ και $l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια της f στο x_0** , και συγκεκριμένα το l_1 , **αριστερό όριο της f στο x_0** , ενώ το l_2 **δεξιό όριο της f στο x_0** .

Για να υπάρχει τώρα το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και να είναι ίσο με l θα πρέπει και τα δύο πλευρικά όρια να είναι ίσα με l , δηλαδή θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

Συνέπειες του ορισμού

- Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής (α, x_0) αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, β) , τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

ενώ

- Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής (x_0, β) αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, x_0) , τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Θα ισχύουν επίσης οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - \ell] = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 h) = \ell, x_0 \neq 0$$

Όριο και διάταξη

Για τα όρια και τη διάταξη θα ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 1:

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

Θεώρημα 2:

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν όριο στο x_0 , και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Όρια και πράξεις

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa \cdot f(x)) = \kappa \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \text{ για κάθε σταθερά } \kappa \in \mathbf{R}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ εφόσον } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

$$5. \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$$

$$6. \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}, \text{ εφόσον } f(x) \geq 0 \text{ κοντά στο } x_0$$

$$7. \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^v, \quad v \in \mathbf{N}^*$$

Τέλος, θα ισχύουν:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} x^v = x_0^v$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0), \text{ όπου } P(x) \text{ το πολυώνυμο } P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \text{ εφόσον } Q(x_0) \neq 0$$

Παρατηρήσεις:

1. Απαραίτητη προϋπόθεση για να αναζητήσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι η f να ορίζεται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (α, x_0) ή (x_0, β)

2. $\text{Av } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - \ell| = 0$

3. $\text{Av } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$

4. $\text{Av } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\ell$

5. $\text{Av } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, τότε $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0

6. $\text{Av } f(x) \geq 0$ (ή $f(x) \leq 0$) κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$ (ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$)

7. $\text{Av } \lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = \ell \neq 0$ τότε δεν είναι υποχρεωτικό ότι θα υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

8. $\text{Av } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \ell$ τότε δεν είναι υποχρεωτικό ότι θα υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Ημερομηνία τροποποίησης: 24/8/2011