

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΕΝΟΤΗΤΑ 7: ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ

[Ενότητες Ορισμός της Συνέχειας - Πράξεις με Συνεχείς Συναρτήσεις - Συνέχεια
Συνάρτησης σε Διαστήματα πλην των Βασικών Θεωρημάτων του κεφ.1.8 Μέρος Β΄ του
σχολικού βιβλίου].

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Θα ασχοληθούμε με την έννοια της «συνέχειας συνάρτησης». Αρχικά θα μιλήσουμε για τη «συνέχεια συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της» και κατόπιν για τη «συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα ή σε ένωση διαστημάτων». Η συνέχεια συνάρτησης μας βοηθάει να υπολογίζουμε προσεγγιστικά μία τιμή της αν ο υπολογισμός της δεν είναι δυνατός με ακρίβεια, να εντοπίζουμε και αν χρειαστεί να προσεγγίσουμε τις ρίζες μίας εξίσωσης κ.α. Όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις που ορίζονται σε διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ x_0

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα $A \subseteq \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$ όταν ισχύει:

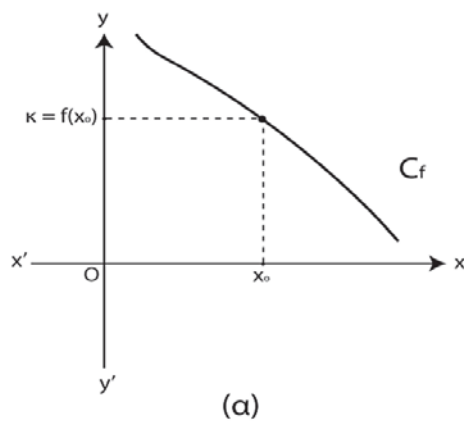
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Από τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να εξάγουμε πολλά χρήσιμα συμπεράσματα:

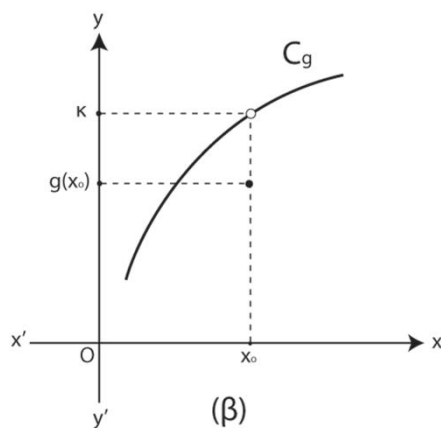
1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ τότε και μόνον τότε όταν υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ (πλευρικά όρια στο } x_0) \text{ και ισχύει :}$$

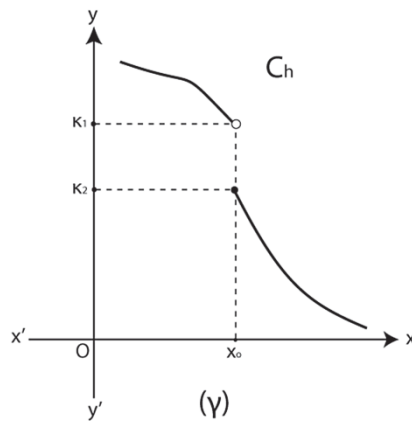
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) .$$



2. Η συνάρτηση g **ΔΕΝ** είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ (ασυνεχής) όταν υπάρχουν τα πλευρικά όρια στο $x_0 \in A$ αλλά ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) \neq g(x_0)$.



3. Η συνάρτηση h **ΔΕΝ** είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ (ασυνεχής) όταν τα πλευρικά όρια στο $x_0 \in A$ είναι διαφορετικά δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x)$.



Από τις τρεις γραφικές παραστάσεις μόνον η γραφική παράσταση (α) δεν διακόπτεται στο x_0 , άρα ανταποκρίνεται σε συνάρτηση συνεχή σε σημείο $x_0 \in A$.

ΠΡΟΣΟΧΗ:

α. Η συνέχεια μίας συνάρτησης αναφέρεται πάντα σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Άρα όταν λέμε ότι «η f είναι συνεχής στο x_0 » είναι αυτονόητο ότι το x_0 είναι σημείο του πεδίου ορισμού της.

β. Αν η f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ τότε για να είναι συνεχής στα άκρα α, β θα πρέπει να ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

γ. Μία συνάρτηση που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της θα ονομάζεται συνεχής συνάρτηση.

Σημειώνουμε ότι:

1) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ είναι συνεχής αφού γνωρίζουμε ότι για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

2) Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι συνεχής αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, $Q(x_0) \neq 0$.

3) Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχείς αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0.$$

4) Επίσης οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha^x$ με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$ και $g(x) = \log_\alpha x$ με $0 < \alpha \neq 1$ και $x > 0$ είναι συνεχείς αφού ισχύουν $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha^x = \alpha^{x_0}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_\alpha x = \log_\alpha x_0$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Από τον ορισμό της συνέχειας στο x_0 και τις ιδιότητες των ορίων προκύπτουν τα εξής θεωρήματα:

Θ ε ώ ρ η μ α 1 :

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο x_0 , τότε και οι συναρτήσεις :

$f \pm g, c \cdot f$ με $c \in \mathbb{R}$, $f \cdot g, \frac{f}{g}$ με $g(x_0) \neq 0, |f|$ και $\sqrt[n]{f}$ με $f(x) \geq 0, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, είναι

συνεχείς στο x_0 , με τη προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0 .

Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι:

1) $f(x) = \varepsilon \phi x$ και $g(x) = \sigma \phi x$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων

2) $f(x) = |\eta \mu x|$

3) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$ με $x \in [-1, 1]$.

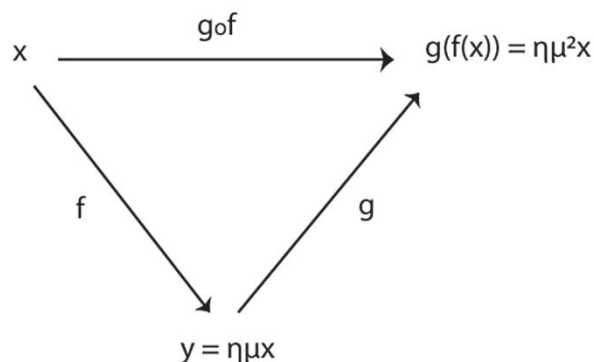
Θ ε ώ ρ η μ α 2 :

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα A και συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα B . Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ και η g συνεχής στο $f(x_0) \in B$, τότε η σύνθεση $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

Δηλαδή
$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) = g(f(x_0))$$

π.χ. Έστω $f(x) = \eta \mu x$ με πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και $g(x) = x^2$ με πεδίο ορισμού το $B = \mathbb{R}$.

Τότε
$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(\eta \mu x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu^2 x = \eta \mu^2 x_0.$$



ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν οι συναρτήσεις $f \pm g, fg, \frac{f}{g}, |f|$ είναι συνεχείς στο x_0 τότε δεν σημαίνει πάντα, ότι οι f, g είναι συνεχείς στο x_0 .

Π.χ.

$$\text{Έστω } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{αν } x \geq 0 \\ -2 & \text{αν } x < 0 \end{cases} \text{ και } g(x) = \begin{cases} -2 & \text{αν } x \geq 0 \\ 2 & \text{αν } x < 0 \end{cases}.$$

Το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$ και για τις δύο συναρτήσεις.

Οι συναρτήσεις f και g δεν είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 = 0$ επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 = 2$

ενώ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2) = -2$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2) = -2$ ενώ $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 = 2$

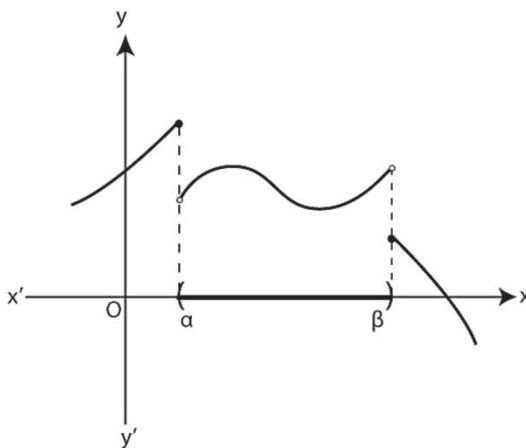
όμως $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0$ (με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$) είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

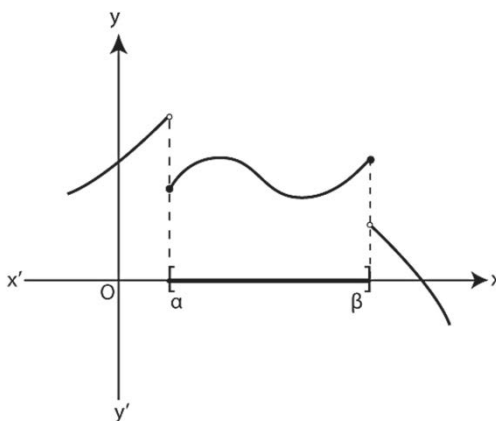
Θα δώσουμε τώρα δύο ορισμούς για συνεχείς συναρτήσεις σε διαστήματα του πεδίου ορισμού τους :

ΟΡΙΣΜΟΣ

- 1) Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο (α, β) , όταν είναι συνεχής σε κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.



- 2) Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ όταν είναι συνεχής στο (α, β) και επιπλέον ισχύουν $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$.



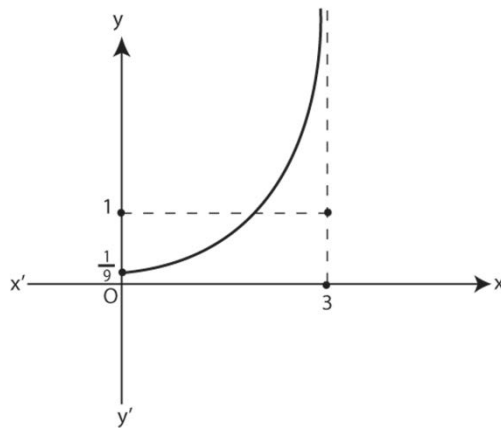
Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε και τη συνέχεια της συνάρτησης f στα διαστήματα $[\alpha, \beta)$ και $(\alpha, \beta]$.

Σημαντικές παρατηρήσεις

1. Αν δίνεται ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι συνεχής στο x_0 τότε συμπεραίνουμε τα εξής:
 - Το $x_0 \in A$
 - Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
 - Το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
2. Μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν και μόνον αν :
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ή
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$ ή
 - $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ ή $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + \kappa \cdot h) = f(x_0)$, $\kappa \neq 0$
 - $\lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 \cdot h) = f(x_0)$, $x_0 \neq 0$
3. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 τότε και οι $\kappa \cdot f \pm \lambda \cdot g$ είναι συνεχείς στο x_0 με κ, λ πραγματικούς αριθμούς.
4. Έστω ότι το $x_0 \notin A$. Σε αυτή τη περίπτωση δεν έχει νόημα να εξετάσουμε αν η f είναι ή όχι συνεχής στο x_0
5. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν τουλάχιστον ένα από τα πλευρικά όρια απειρίζεται θετικά ή αρνητικά .

Π.χ.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-3)^2} & x \in [0, 3) \\ 1 & \text{αν } x = 3 \end{cases}$$



6. Όταν λέμε ότι μία συνάρτηση είναι συνεχής, εννοούμε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
7. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της τότε είναι συνεχής και σε κάθε υποσύνολό του.
8. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε η f^{-1} είναι συνεχής στο $f(A)$.
9. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και 1-1 σε ένα διάστημα $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε είναι και γνησίως μονότονη στο A .

(Η πρόταση για να χρησιμοποιηθεί στις γενικές εξετάσεις θέλει απόδειξη. Την απόδειξη θα την δώσουμε στην επόμενη ενότητα.)

Ημερομηνία τροποποίησης: 25/8/2011