

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΕΝΟΤΗΤΑ 8: ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO - ΠΡΟΣΗΜΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ
ΤΙΜΩΝ - ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ - ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΕΧΟΥΣ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

[Ενότητα Βασικά Θεωρήματα του κεφ.1.8 Μέρος Β΄ του σχολικού βιβλίου].

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$ και επιπλέον

- η f είναι συνεχής στο $[α,β]$
- $f(α) \cdot f(β) < 0$ (δηλ. οι τιμές $f(α)$, $f(β)$ είναι ετερόσημες)

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (α,β)$ έτσι ώστε $f(\xi) = 0$.

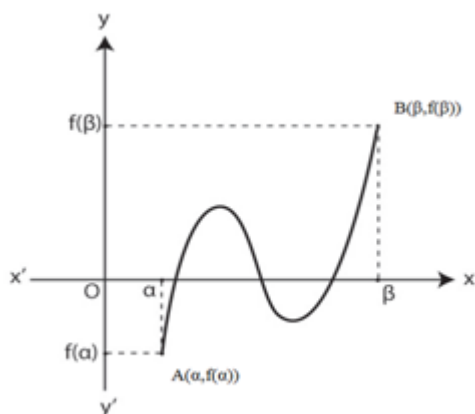
Με άλλα λόγια η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(α,β)$.

(Δηλαδή η C_f τέμνει τον άξονα xx' σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (α,β)$).

Γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Bolzano

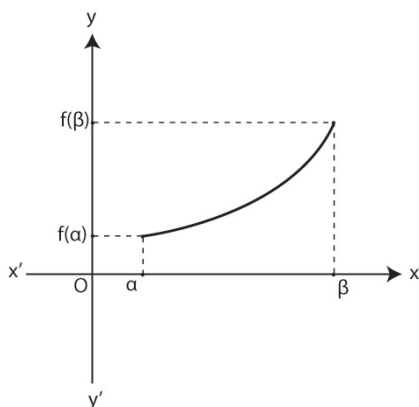
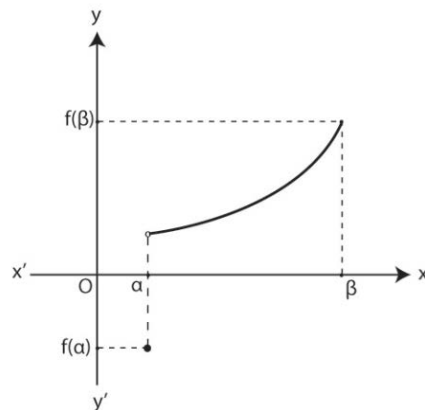
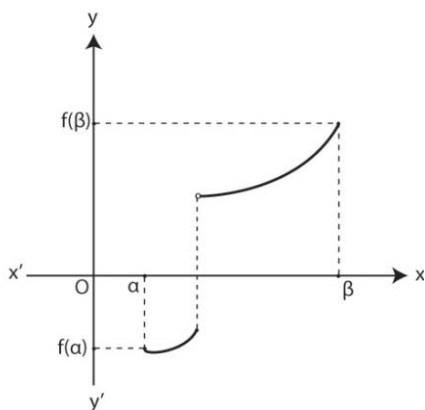
Γεωμετρικά μπορούμε να ερμηνεύσουμε το παραπάνω θεώρημα ως εξής:

Το τμήμα της γραφικής παράστασης της f που περιέχεται μεταξύ των ευθειών $x = α$ και $x = β$ τέμνει τον xx' τουλάχιστον μία φορά.

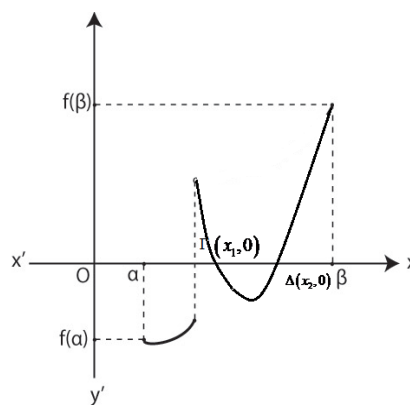
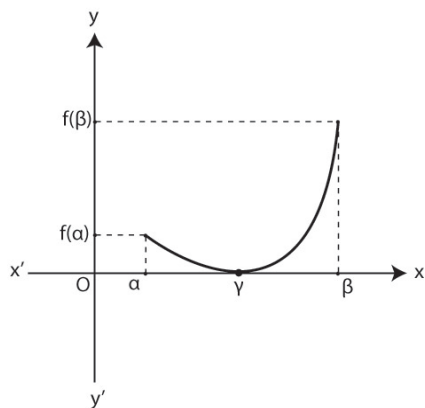


Σημαντικές παρατηρήσεις

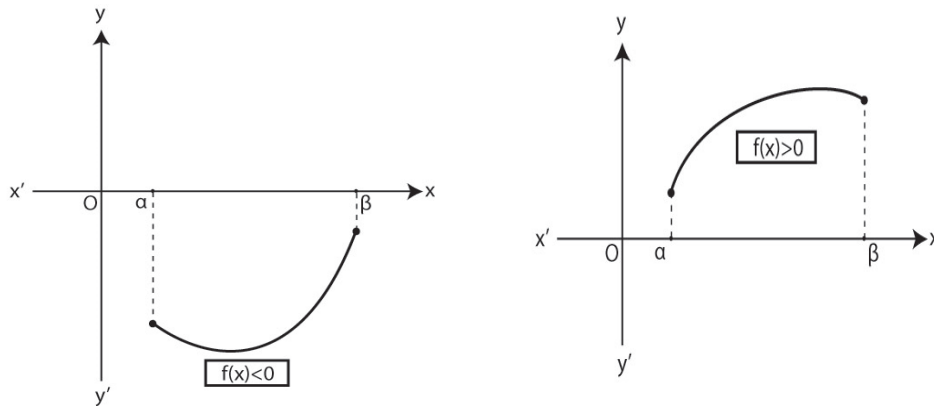
1. Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει την ύπαρξη τουλάχιστον μίας πραγματικής ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (α, β) . Ωστόσο δεν αποκλείεται η ύπαρξη περισσότερων ριζών στο (α, β) . Αυτό που κυρίως μας εξασφαλίζει είναι «το ΑΔΥΝΑΤΟΝ ΤΗΣ ΜΗ ΥΠΑΡΞΗΣ ΡΙΖΑΣ στο (α, β) »



2. Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano δεν ισχύει. Αυτό σημαίνει ότι αν για μία πραγματική συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f(\xi) = 0$ δεν συνεπάγεται αναγκαία ότι η f είναι συνεχής ή ότι οι τιμές $f(\alpha)$, $f(\beta)$ είναι ετερόσημες δηλαδή $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.



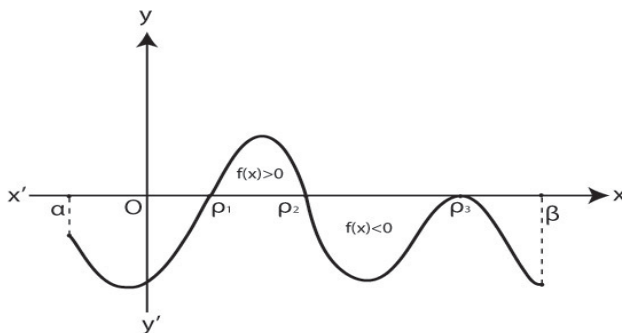
3. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in \Delta$ τότε συνάγουμε ότι $f(x) < 0$ ή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Αυτό σημαίνει ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .



Απόδειξη: Αν η f δεν διατηρούσε σταθερό πρόσημο τότε θα υπήρχαν $\alpha, \beta \in \Delta$, με $\alpha < \beta$ τέτοια ώστε $f(\alpha) > 0$ και $f(\beta) < 0$ ή $f(\alpha) < 0$ και $f(\beta) > 0$ δηλαδή $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, που σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, θα υπήρχε μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) που είναι άτοπο λόγω της υπόθεσης μας, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .

4. Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί το πρόσημο της σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

(Από την έκφραση «διαδοχικές ρίζες» συμπεραίνουμε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$ όπου ρ_1, ρ_2 είναι δύο διαδοχικές ρίζες της f).



5. Αν η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[\alpha, \beta]$ και επί πλέον ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, τότε η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο (α, β) .
6. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$
- $f(\xi) > 0$ με $\xi \in \Delta$

τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

7. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$
- $f(\xi) < 0$ με $\xi \in \Delta$

τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

8. Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Απόδειξη:

Έστω $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ ένα πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i. Έστω $\alpha_n > 0$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_n x^n) = -\infty$$

οπότε υπάρχει $\alpha < 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει $P(\alpha) < 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_n x^n) = +\infty$$

οπότε υπάρχει $\beta > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει $P(\beta) > 0$

Συνεπώς για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, ισχύουν:

1. Είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο διάστημα $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$.
2. $P(\alpha)P(\beta) < 0$.

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$, συνεπώς και στο $\mathbb{R}$.

ii. Ομοίως εργαζόμαστε αν $\alpha_n < 0$.

Θα μας απασχολήσει τώρα ένα θεώρημα το οποίο θεωρείται «γενίκευση» του θεωρήματος Bolzano.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ

Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επιπλέον

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό κ που βρίσκεται μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f(\xi) = \kappa$.

Απόδειξη:

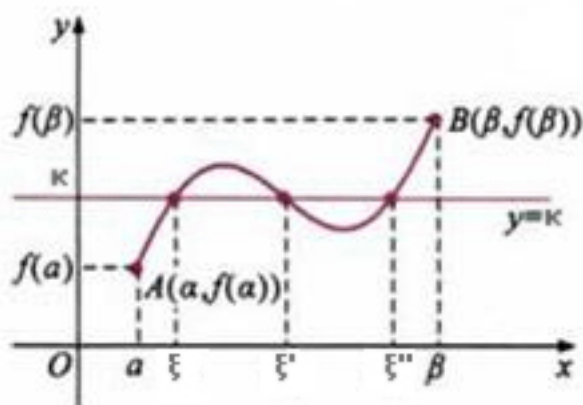
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \kappa < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \kappa$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$

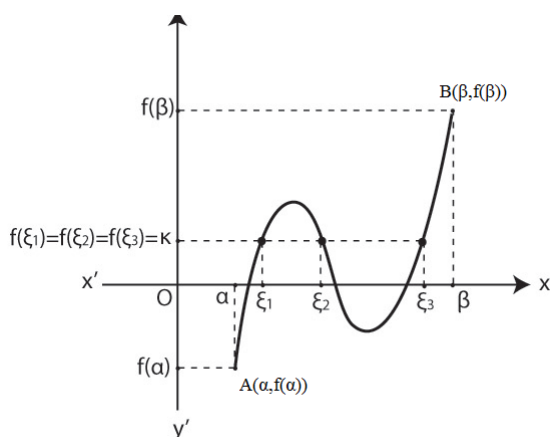
Αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \kappa < 0$ και

$$g(\beta) = f(\beta) - \kappa > 0$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi) = f(\xi) - \kappa = 0$, οπότε $f(\xi) = \kappa$



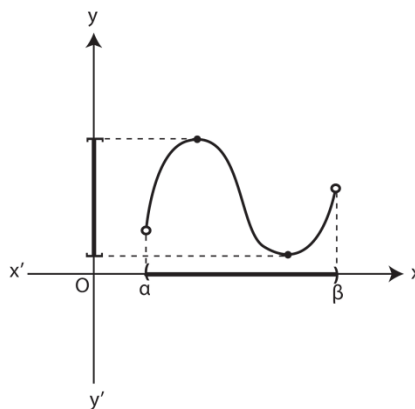
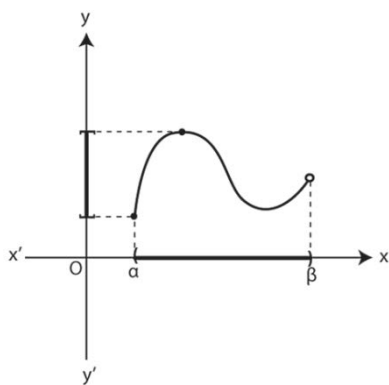
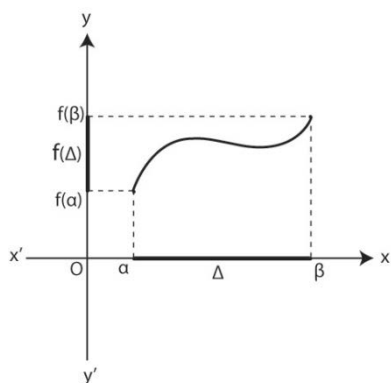
Γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών



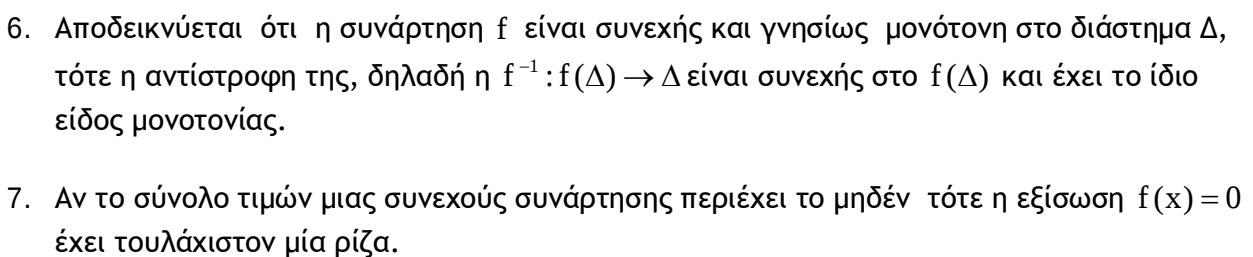
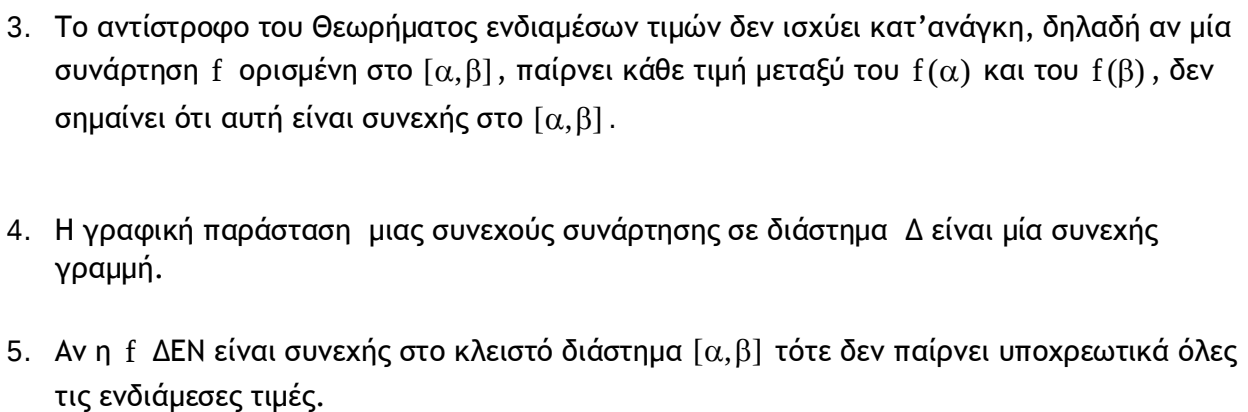
1. Η παράλληλη ευθεία $y = \kappa$ προς τον xx' θα τέμνει την C_f τουλάχιστον σε ένα σημείο (στο συγκεκριμένο παράδειγμα στα σημεία ξ_1, ξ_2, ξ_3).
2. Κάθε σημείο του άξονα yy' που βρίσκεται ανάμεσα στα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ θα είναι τιμή της συνάρτησης f .

Σημαντικές παρατηρήσεις

1. Αν η συνεχής συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα Δ , τότε η εικόνα του Δ μέσω της f (δηλαδή η $f(\Delta)$) θα είναι διάστημα, δηλαδή δεν είναι ένωση διαστημάτων, με την προϋπόθεση ότι η f δεν είναι σταθερή.



2. Αν η f είναι σταθερή συνάρτηση τότε το $f(\Delta)$ είναι ένα σημείο (μονοσύνολο) (εκφυλισμένο διάστημα της μορφής $[\lambda, \lambda]$).

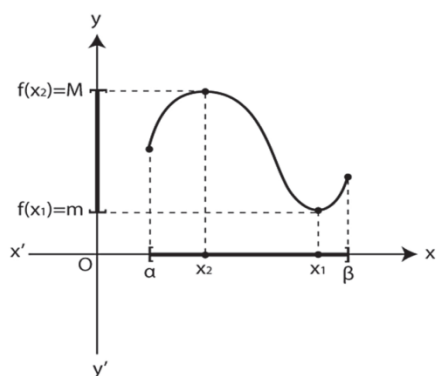


ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ για τα οποία ισχύει $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Δηλαδή η f έχει στο $[\alpha, \beta]$ ελάχιστη τιμή την $f(x_1)$ την οποία τη συμβολίζουμε με m και μέγιστη τιμή την $f(x_2)$ την οποία συμβολίζουμε με M .

Δηλαδή $m \leq f(x) \leq M \Leftrightarrow f(x) \in [m, M]$



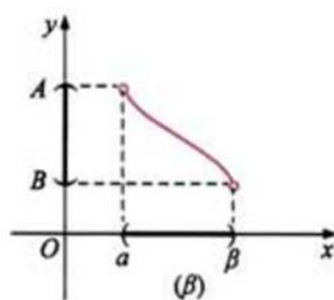
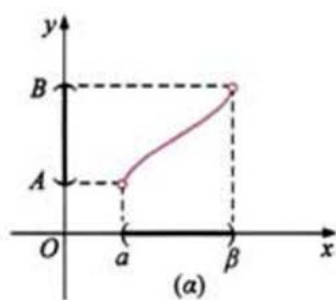
Σημαντικές παρατηρήσεις

1. Από το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών και το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το σύνολό τιμών της f είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$. Δηλαδή μπορούμε πλέον να έχουμε μία πρώτη εικόνα για το πώς μπορούμε να βρίσκουμε το σύνολο τιμών μίας συνάρτησης.
2. Αν έχουμε μία συνάρτηση f συνεχή και γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε μπορούμε να βρούμε το σύνολο τιμών της f ανάλογα με το είδος της μονοτονίας της και τη μορφή του Δ . Δηλαδή:

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου

$$A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$$

Αν, όμως η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A)



$[\alpha, \beta]$	ΓΝΗΣΙΩΣ ΑΥΞΟΥΣΑ	$[f(\alpha), f(\beta)]$
	ΓΝΗΣΙΩΣ ΦΘΙΝΟΥΣΑ	$[f(\beta), f(\alpha)]$
(α, β)	ΓΝΗΣΙΩΣ ΑΥΞΟΥΣΑ	$(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x))$
	ΓΝΗΣΙΩΣ ΦΘΙΝΟΥΣΑ	$(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x))$
$[\alpha, \beta)$	ΓΝΗΣΙΩΣ ΑΥΞΟΥΣΑ	$[f(\alpha), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x))$
	ΓΝΗΣΙΩΣ ΦΘΙΝΟΥΣΑ	$(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), f(\alpha)]$
$(\alpha, \beta]$	ΓΝΗΣΙΩΣ ΑΥΞΟΥΣΑ	$(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), f(\beta)]$
	ΓΝΗΣΙΩΣ ΦΘΙΝΟΥΣΑ	$[f(\beta), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x))$

Πρέπει να προσέξουμε ότι στις περιπτώσεις που έχουμε ανοιχτά διαστήματα αντί για άκρο πραγματικό αριθμό μπορούμε να έχουμε το $\pm\infty$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύουν ανάλογα συμπεράσματα.

Ημερομηνία τροποποίησης: 25/8/2011