

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 1.3 (Μονότονες συναρτήσεις-Αντίστροφη συνάρτηση)

Ασκήσεις

1) (35170) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ώστε:

$$f(x) = \ln(1 + e^x) \text{ και } g(x) = 2\ln x.$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

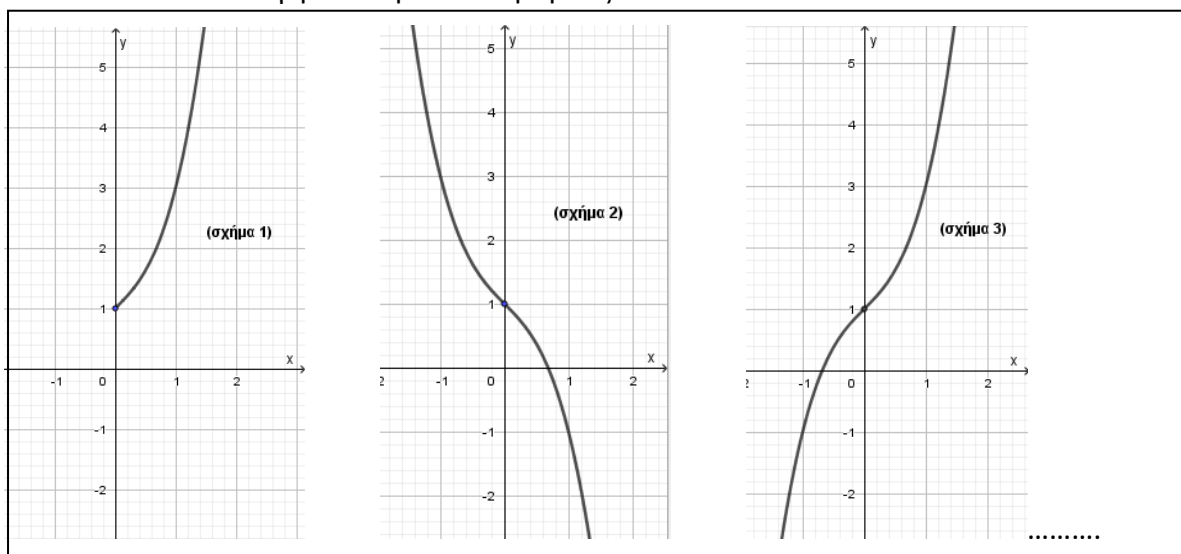
β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f + g$.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f + g$ ως προς τη μονοτονία

2) (23642) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

β) Ένα από τα παρακάτω σχήματα παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να βρείτε ποιο είναι και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



γ)

- Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $|f|$.
- Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $|f|$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $|x^3 + x + 1| = 2023$.

3) (24569) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f = [0,1]$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι “1-1”.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)) = 0, x \in [0,1]$.

4) (23198) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - 1, x \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. β) Να βρείτε την f^{-1} .

Έστω $f^{-1}(x) = (x+1)^2, x \geq -1$

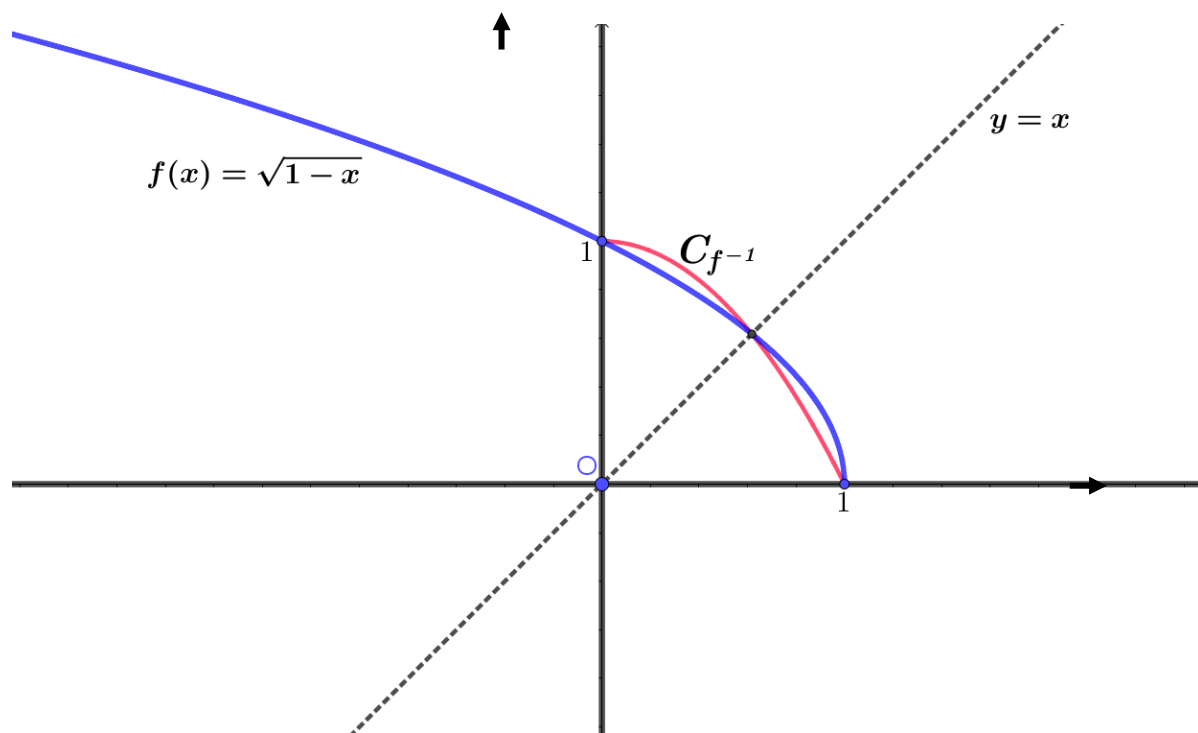
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} .

5) (24703) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $x \in (-\infty, 1]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} .

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της f^{-1} . Να μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων το παραπάνω σχήμα και το οποίο να συμπληρώσετε με την υπόλοιπη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .



6) (24991) Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -2\ln x + 1$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

γ) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = 1 - \ln x^2$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$.

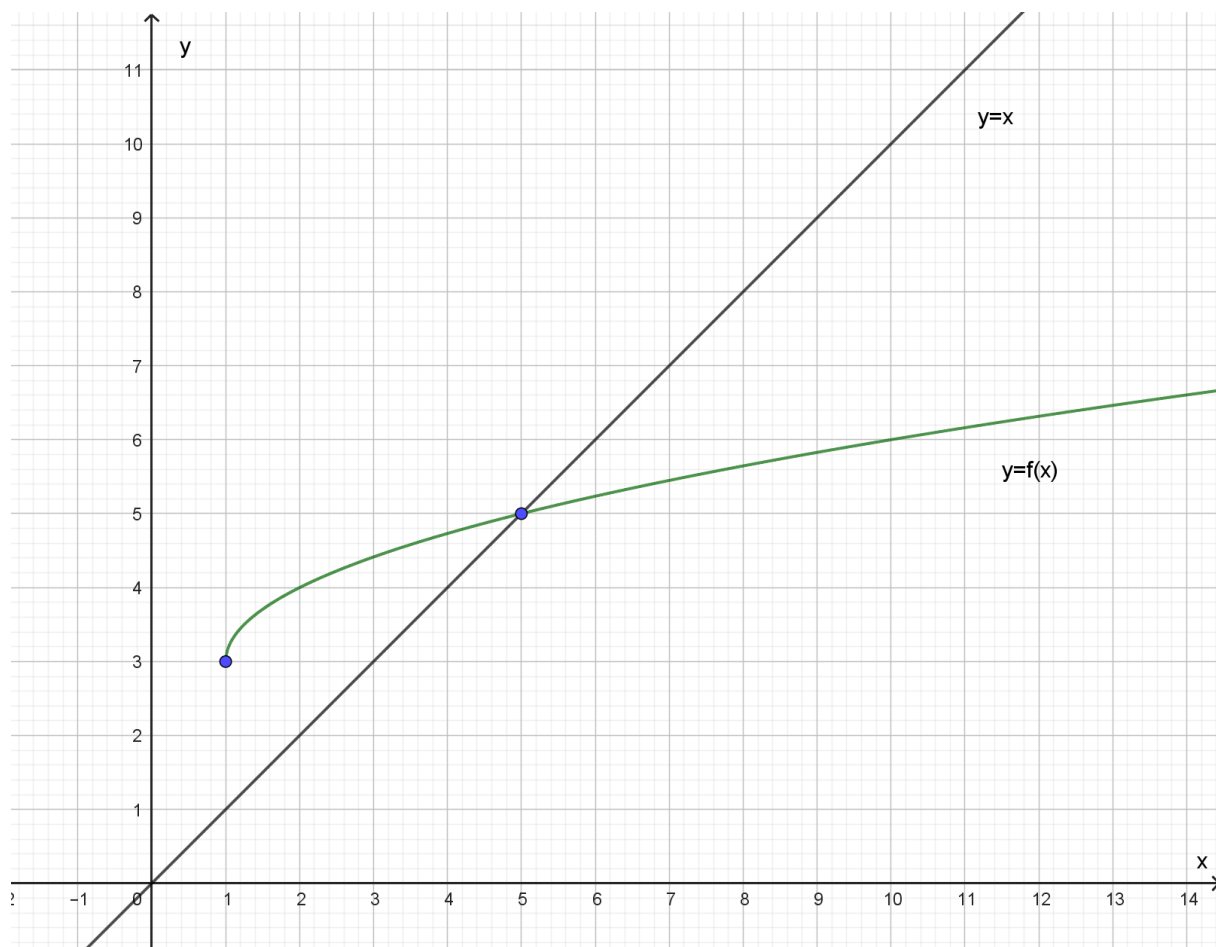
7) (24130) Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \sqrt{x-1} + 3$, $x \geq 1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών καθώς και την αντίστροφη της f .

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f καθώς και η διχοτόμος $y = x$ της γωνίας xOy . Αφού μεταφέρετε το σχέδιο στην κόλλα σας, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f^{-1} .

και με βάση το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, f^{-1} .



8) (26602) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ και $g(x) = x - 2$.

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h , με $h(x) = |g(x)|$.

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f και h .

9) (31528) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - e^{-x})$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

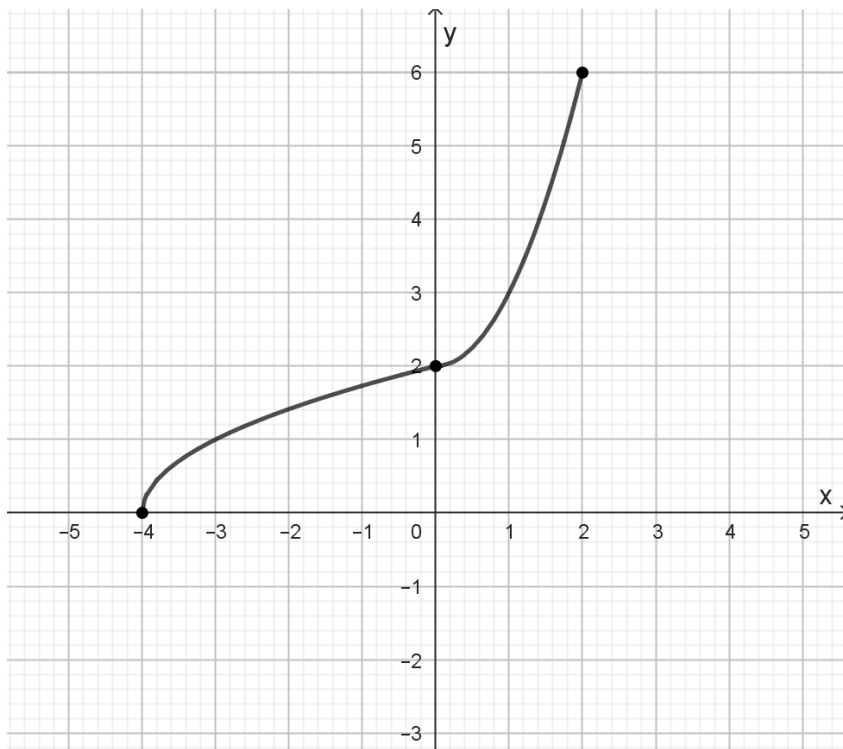
β) Να βρείτε την f^{-1} .

10) (27277) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης μιας συνάρτησης f . Με τη βοήθεια του σχήματος να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f^{-1}(f(6))$.

γ) Στο σύστημα αξόνων που ακολουθεί να χαράξετε την γραφική παράσταση της f .

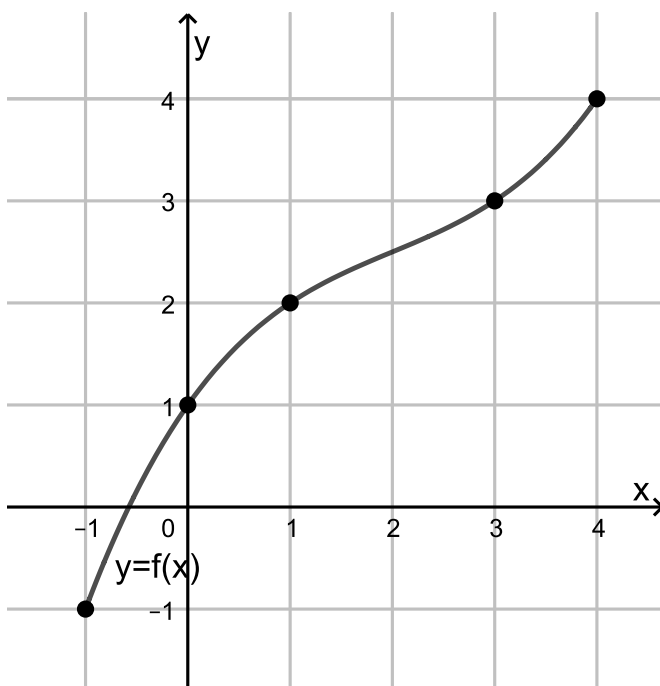


11) (28299) Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A = [-1, 4]$ και με γραφική παράσταση C_f που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη C_f :

α) να δικαιολογήσετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f ,

β) να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x$,

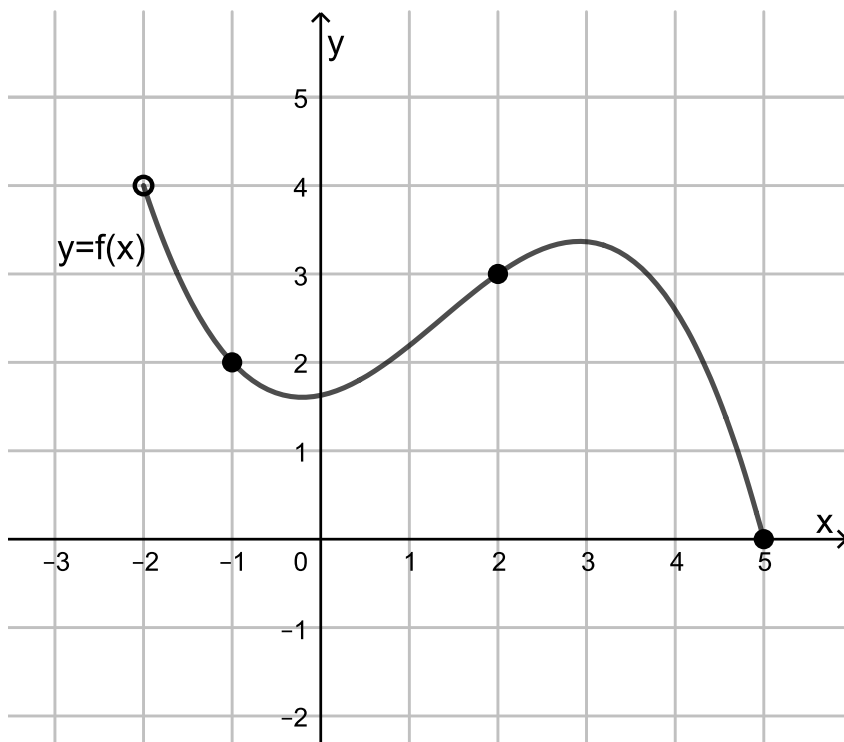
γ) να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} .



12) (28300) Έστω μια συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη γραφική παράσταση της f να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f , β) τις τιμές $f(-1)$, $f(2)$ και $f(5)$,

γ) το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της f , εφόσον υπάρχουν, δ) την τιμή της σύνθεσης $f \circ f$ στο -1



13) (29926) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \ln(x-2) + 5$ για κάθε $x > 2$ και $g(x) = 2x-1$ με $x \in \mathbb{R}$.

α)

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη.
- ii. Να βρείτε τη συνάρτηση g^{-1} .

β)

- i. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$.
- ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$.

14) (35171) Δίνονται οι συναρτήσεις g και h ώστε :

$$g(x) = 2\ln x, x > 0 \text{ και } h(x) = \ln(1 + x^2), x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι :

- i. Η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη
- ii. $g^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}$, με $x \in \mathbb{R}$.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h \circ g^{-1}$.

15) (27317) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [0, 2]$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο $[0, 2]$

β) Να αποδείξετε ότι:

- i. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, 2]$.
- ii. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .
- iii. Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.