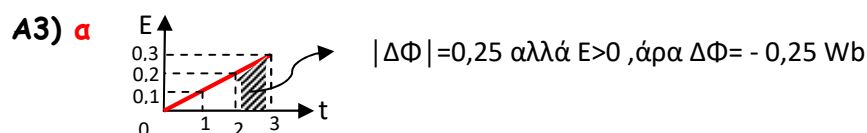


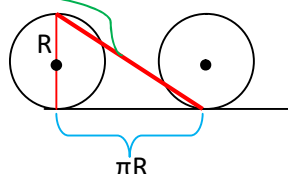
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (στο διαγώνισμα σ'όλη την ύλη, 2021)

ΘΕΜΑ Α

A1) β $K=P^2/2m$ A2) β $x = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\right)t \xrightarrow{t=\frac{1T}{24}=\frac{T}{8}} x = A\frac{\sqrt{2}}{2}$



A4) β A5) α) $\wedge$, β) $\wedge$, γ) Σ , δ) Σ , ε) $\wedge$



ΘΕΜΑ Β

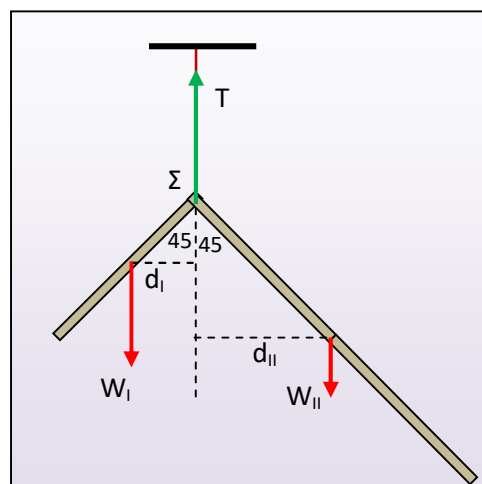
B1) Το σύστημα των δύο ράβδων ισορροπεί κρεμασμένο από το νήμα που η προέκτασή του προς τα κάτω συμπίπτει με τη διχοτόμο της ορθής γωνίας στο Σ.

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις W_1 και W_2 στα μέσα των ομογενών ράβδων και την τάση του νήματος.

Λόγω μη περιστροφής θα πρέπει:

$$\Sigma \tau_{\Sigma} = 0 \Rightarrow W_1 \cdot d_1 - W_2 \cdot d_2 = 0 \Rightarrow$$

$$W_1 \cdot \frac{L_1}{2} \eta\mu 45 = W_2 \cdot \frac{L_2}{2} \eta\mu 45 \Rightarrow$$



$$m_1 g L_1 = m_2 g 2 L_1 \Rightarrow m_1 = 2 m_2 \Rightarrow \rho_1 V_1 = 2 \rho_2 V_2 \Rightarrow \rho_1 V_1 = 2 \rho_2 V_2 \Rightarrow \rho_1 A L_1 = 2 \rho_2 A 2 L_1 \Rightarrow$$

$$\rho_1 = 4 \rho_2 \quad \text{Ορθή η πρόταση δ)}$$

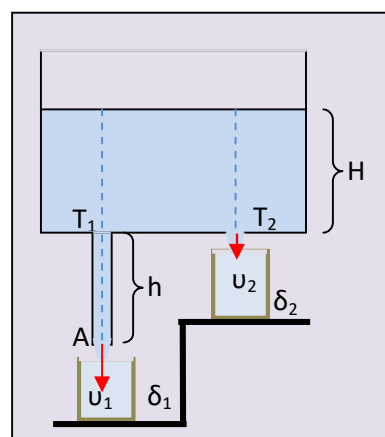
B2)

Εφαρμόζοντας το νόμο Bernoulli σε μια ροϊκή γραμμή από την επιφάνεια στο σημείο Α, υποθέτοντας ότι η ταχύτητα της ελεύθερης επιφάνειας είναι αμελητέα, έχουμε :

$$P_{at} + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g (H + h) = P_{at} + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \xrightarrow{v=0}$$

$$v_1 = \sqrt{2g(H + h)}$$

Ομοίως εφαρμόζοντας το νόμο Bernoulli σε μια



ροϊκή γραμμή από την επιφάνεια στην έξοδο T_2 έχουμε : $v_2 = \sqrt{2gH}$

Παρατηρούμε ότι : $v_1 > v_2$

Άρα για την παροχή $\Pi = Av \rightarrow \Pi_1 > \Pi_2 \Rightarrow \frac{V}{t_1} > \frac{V}{t_2} \Rightarrow t_1 < t_2$ **Ορθή η πρόταση γ)**

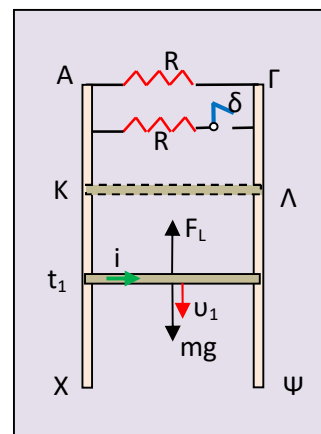
B3) Θα υπολογίσουμε την οριακή ταχύτητα v_1 .

Κατά την κίνηση του ΚΛ μεταβάλλεται η μαγνητική ροή στην επιφάνεια ΑΓΚΛ με αποτέλεσμα να αναπτύσσεται εξ' επαγωγής ΗΕΔ η οποία θα έχει τέτοια πολικότητα ώστε να δίνει ρεύμα έντασης τέτοιας ώστε η δύναμη Laplace που θα αναπτυχθεί στον ΚΛ να αντισταθεί στο αίτιο που την προκαλεί δηλαδή την προς τα κάτω κίνηση.

$$|E_{\varepsilon\pi}| = \frac{|d\Phi|}{dt} = \frac{B \cdot dS}{dt} = \frac{B \cdot l \cdot dx}{dt} \Rightarrow |E_{\varepsilon\pi}| = Blv$$

$$i = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R} \Rightarrow i = \frac{Blv}{R}$$

$$F_L = Bil \Rightarrow F_L = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$



Ο ΚΛ ξεκινά επιταχυνόμενος λόγω του βάρους του, αναπτύσσεται η F_L που είναι ανάλογη της v οπότε οριακή ταχύτητα θα αποκτήσει ο ΚΛ τη στιγμή που $F_L = mg$.

$$\text{Έτσι } F_L = mg \Rightarrow \frac{B^2 l^2 v_1}{R} = mg \Rightarrow v_1 = \frac{mgR}{B^2 l^2}$$

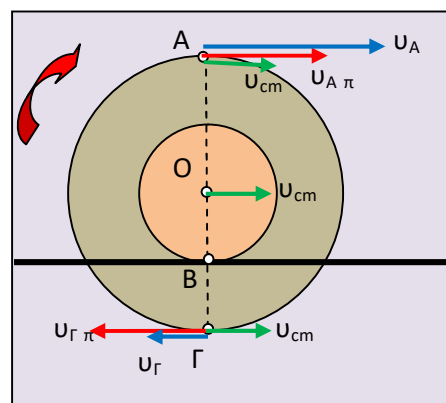
Κλείνοντας τον διακόπτη δ η ολική αντίσταση γίνεται $R_{ολ} = R/2$ οπότε η ένταση του ρεύματος διπλασιάζεται άρα και η F_L οπότε, $F_L > mg$ και ο ΚΛ επιβραδύνεται ενώ συγχρόνως μειώνονται τα $E_{\varepsilon\pi}$, i , F_L μέχρι τη στιγμή που :

$$F_L = mg \Rightarrow \frac{B^2 l^2 v_2}{\frac{R}{2}} = mg \Rightarrow v_2 = \frac{mgR}{2B^2 l^2} \Rightarrow v_2 = \frac{v_1}{2}$$
 Σωστή η γ)

ΘΕΜΑ Γ

A) 1)

Η κίνηση του τροχού είναι αποτέλεσμα της επαλληλίας μιας μεταφορικής κίνησης λόγω της οποίας όλα τα σημεία θα έχουν την ταχύτητα v_{cm} του κέντρου μάζας O και μιας περιστροφικής περί άξονα από το κέντρο O κάθετο στο επίπεδο του τροχού λόγω της οποίας όλα τα σημεία (πλην του Κέντρου O) στρέφονται με ίδια γωνιακή ταχύτητα ω και θα έχουν τα ταχύτητες



εφαπτόμενες των τροχιών τους που θα δίδονται από τη σχέση $v_{\pi} = \omega r$ όπου r η ακτίνα της τροχιάς. Η σύνθεση των δύο ταχυτήτων θα δίνει την ταχύτητα του κάθε σημείου.

Εφ' όσον ο τροχός κυλίζει χωρίς ολίσθηση η ταχύτητα του κέντρου O του τροχού θα είναι :

$$v_O = v_{cm} = \omega(OB) \Rightarrow v_{cm} = \omega \frac{R}{2} \quad (1)$$

$$\text{Το σημείο } \Gamma \text{ θα έχει ταχύτητα: } \vec{v}_{\Gamma} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\Gamma\pi} \Rightarrow v_{\Gamma} = \omega \frac{R}{2} - \omega R \Rightarrow v_{\Gamma} = -\omega \frac{R}{2} \Rightarrow$$

$$|v_{\Gamma}| = \omega \frac{R}{2} \Rightarrow \omega = \frac{2|v_{\Gamma}|}{R} = \frac{2 \cdot 4}{0,5} \Rightarrow \omega = 16 \frac{r}{s}$$

$$\text{Το σημείο } A \text{ θα έχει ταχύτητα: } \vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{A\pi} \Rightarrow v_A = \omega \frac{R}{2} + \omega R \Rightarrow v_A = \frac{3}{2} \omega R \Rightarrow$$

$$v_A = \frac{3}{2} 16 \cdot 0,5 \Rightarrow v_A = 12 \text{ m/s} \quad \text{με κατεύθυνση εφαπτόμενη του τροχού στο } A \text{ και φορά προς τα δεξιά.}$$

2) Το σημείο A στροφικά εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση και μεταφορικά ευθ/μη ομαλή άρα θα έχει μόνο κεντρομόλο επιτάχυνση η οποία θα ισούται με:

$$\alpha_A = \frac{v_{A,\pi}^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R = 16^2 \cdot 0,5 \Rightarrow \alpha_A = 128 \text{ m/s}^2$$

B) 1) Μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1=2s$ ο τροχός έχει διαγράψει γωνία:

$$\theta_1 = \omega t_1 = 16 \cdot 2 = 32 \text{ rad}$$

Ο αριθμός περιστροφών που έκανε μέχρι τότε είναι:

$$N_1 = \frac{\theta_1}{2\pi} = \frac{32}{2\pi} \Rightarrow N_1 = \frac{16}{\pi} \text{ περ / φέξ}$$

Από την χρονική στιγμή $t_1=2s$ μέχρι τη στιγμή που επιβραδυνόμενος θα σταματήσει θα διαγράψει γωνία :

$$\theta_2 = \frac{\omega^2}{2|\alpha_{\gamma}|} \text{ σε χρόνο } t_2 = \frac{\omega}{|\alpha_{\gamma}|} \quad \text{Οι σχέσεις προκύπτουν από τις σχέσεις}$$

$$\omega_{\tau} = \omega t - |\alpha_{\gamma}| t \quad \text{και} \quad \theta = \omega t - \frac{1}{2} |\alpha_{\gamma}| t^2 \quad \text{για } \omega_{\tau} = 0$$

Ο αριθμός περιστροφών που έκανε μέχρι τότε είναι:

$$N_2 = N - N_1 = \frac{32}{\pi} - \frac{16}{\pi} \Rightarrow N_2 = \frac{16}{\pi} \Rightarrow \frac{\theta_2}{2\pi} = \frac{16}{\pi} \Rightarrow \frac{\frac{\omega^2}{2|\alpha_{\gamma}|}}{2} = 16 \Rightarrow |\alpha_{\gamma}| = \frac{\omega^2}{64} \Rightarrow$$

$$|\alpha_{\gamma}| = \frac{16^2}{64} \Rightarrow \alpha_{\gamma} = 4 \text{ r/s}^2$$

2) Για $0 \leq t \leq t_1 = 2s$: $N_1 = \frac{\theta_1}{2\pi} = \frac{\omega \cdot t}{2\pi} \Rightarrow N_1 = \frac{8 \cdot t}{\pi} \quad \text{με } 0 \leq t \leq 2s$

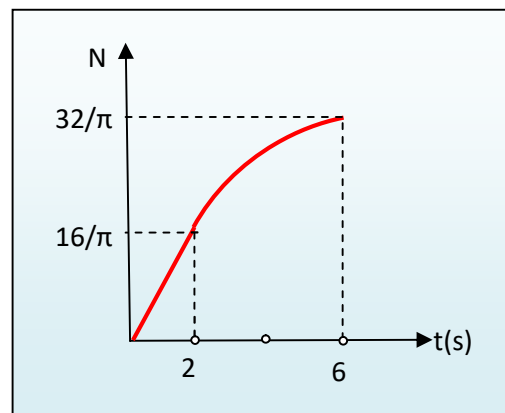
$$\text{Για } t=2: N_1 = \frac{16}{\pi}$$

$$\text{Για } t_1 \leq t \leq t_{o\lambda} : N_2 = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\omega(t-2) - \frac{1}{2}|a_\gamma|(t-2)^2}{2\pi} \Rightarrow N_2 = \frac{16(t-2) - \frac{1}{2}4(t-2)^2}{2\pi} \Rightarrow$$

$$N_2 = \frac{16t - 32 - 2t^2 + 8t - 8}{2\pi} \Rightarrow N_2 = \frac{-2t^2 + 24t - 40}{2\pi} \Rightarrow$$

$$N_2 = \frac{-t^2 + 12t - 20}{2\pi} \text{ για } 2 \leq t \leq 6s$$

t	N
0	0
2	16/π
6	16/π + 16/π = 32/π



ΘΕΜΑ Δ

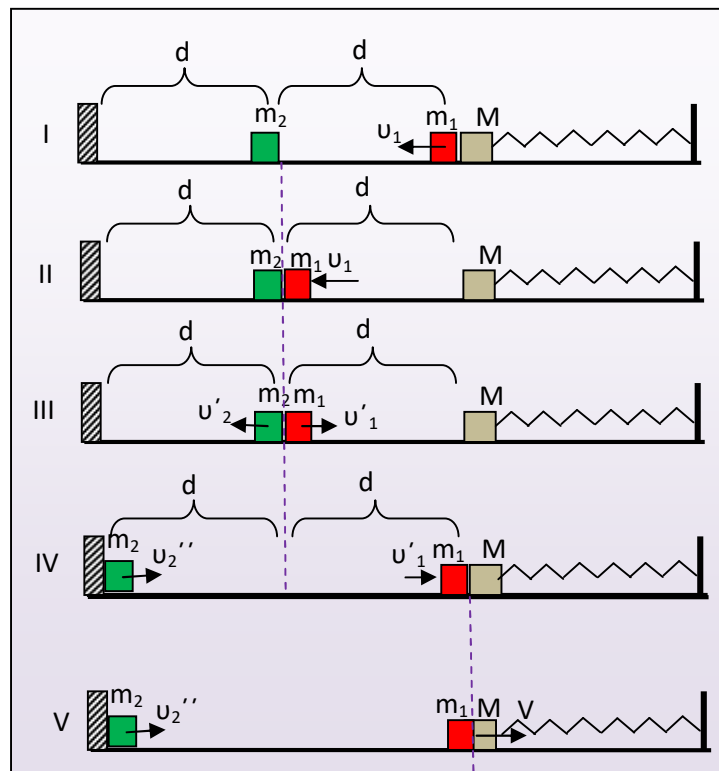
A) 1)

Στη διαδοχή σχημάτων φαίνεται η όλη διαδικασία που περιγράφεται στο Α) ερώτημα.

(I) Η αρχική κατάσταση

(II) Η στιγμή της ελαστικής κρούσης των m_1, m_2 .

(III) Η στιγμή αμέσως μετά την κρούση και σύμφωνα με την εκφώνηση " τα δύο σώματα θα φτάσουν συγχρόνως το μεν m_1 στην αρχική του θέση ενώ το m_2 στον τοίχο με τον οποίο συγκρούεται ελαστικά, με



αμελητέο το χρόνο κρούσης." Θα πρέπει τα δύο σώματα να αποκτήσουν αντίθετες ταχύτητες ,δηλαδή :

$$v'_1 = -v'_2 \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -\frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow m_2 = 3m_1 \Rightarrow m_2 = 6\text{Kg}$$

$$2) v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_1 - 3m_1}{m_1 + 3m_1} v_1 = -\frac{v_1}{2} = -\frac{-6}{2} \Rightarrow v'_1 = 3 \frac{m}{s} \text{ και } v'_2 = -3 \frac{m}{s}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης ορμής ($\Sigma F_{\epsilon\xi}=0$) (σχ. IV - V):

$$m_1 \cdot v'_1 = (m_1 + M)V \Rightarrow 2 \cdot 3 = (2 + 4)V \Rightarrow V = 1 \frac{m}{s}$$

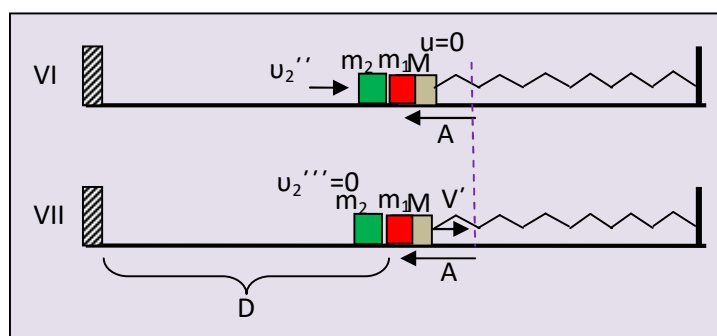
$$\text{Περίοδος ταλ/σης: } T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + M}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{2 + 4}{600}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} s$$

$$\text{Γωνιακή συχνότητα : } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{r}{s}$$

Η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι η max για τον ταλαντωτή ο οποίος βρίσκεται στη Θέση Ισορροπίας του άρα:

$$V = \omega A \Rightarrow A = \frac{V}{\omega} = \frac{1}{10} \Rightarrow A = 0,1m$$

B) 1)



Το σώμα m_2 μετά την ελαστική κρούση του με τον τοίχο ανακλάται με αντίθετη ταχύτητα $u_2'' = -u_2' = -(-3) = 3\text{m/s}$ και στη συνέχεια θα συγκρουσθεί με το συσσωμάτωμα $(m_1 + M) = 6\text{Kg}$ όταν αυτό βρεθεί στην ακραία θέση αριστερά της Θ.Ι (σχ. VI) αφού τότε θα έχει ταχύτητα μηδέν δηλαδή κινητική ενέργεια μηδέν, άρα max δυναμική ενέργεια ο ταλ/της για 2^η φορά .

Παρατηρούμε ότι : $m_2 = (m_1 + M) = 6\text{Kg}$ άρα αφού η κρούση είναι ελαστική θα γίνει ανταλλαγή ταχυτήτων με αποτέλεσμα το σώμα m_2 να μείνει ακίνητο ($u_2''' = 0$) αμέσως μετά την κρούση, ενώ το συσσωμάτωμα να φύγει με ταχύτητα $V' = 3\text{m/s}$. (σχ. VII)

2) Για να βρεθεί στην ακραία θέση αριστερά της Θ.Ι για πρώτη φορά το συσσωμάτωμα (m_1+M) πέρασε χρόνος $\Delta t=3T/4=3\pi/20$ s ,οπότε το m_2 θα έχει διανύσει διάστημα:

$$D = |v_2'| \Delta t = 3 \frac{3\pi}{20} \Rightarrow D = \frac{9\pi}{20} m \text{ Η ζητούμενη απόσταση θα είναι :}$$

$$2d = D + A = \left(\frac{9\pi}{20} + 0,1 \right) m \Rightarrow 2d = \frac{9\pi + 2}{20} m \approx 1,513m$$

3)

$$\pi\% = \frac{\frac{1}{2}m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2} 100\% = \frac{54}{6+54} 100\% \Rightarrow \pi\% = 90\%$$

2^{ος} τρόπος

Θα βρούμε πρώτα το πλάτος της νέας ταλ/σης μετά την κρούση της m_2 με το (m_1+M)

Ισχύει :

$$E\tau = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}(m_1 + M)V'^2 + \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow 600A'^2 = 6 \cdot 3^2 + 600 \cdot 10^{-2} \Rightarrow$$

$$600A'^2 = 60 \Rightarrow A' = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} m$$

$$\pi\% = \frac{\frac{1}{2}m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2}kA'^2} 100\% = \frac{54}{600 \cdot \frac{1}{10}} 100\% \Rightarrow \pi\% = 90\%$$

Παντελεήμων Παπαδάκης

14/4/2021