ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$. Δίνεται επίσης $\alpha\in\mathbb{R}$, τέτοιος, ώστε για κάθε $x>0$ να ισχύει

$$e^{2x+f(x)}\cdot\left[\lim_{h\to+\infty} e^{h}\left(f(e^{-h}+x)-f(x)\right)\right]=1-5\alpha x \quad (1)$$

Επιπλέον για τον $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $2\ln x+\frac{5\alpha}{x}\geq 5\alpha$ (2) για κάθε $x>0$.

Γ1. Ν.δ.ο. $\alpha=\frac{2}{5}$

Γ2. Νδο $\lim_{h\to+\infty} e^{h}\left(f(x+e^{-h})-f(x)\right)=f'(x)\ \forall x>0$

Γ3. Ν.δ.ο. $f(x)=\ln(xe^{-2x}+1)$, $x\geq 0$

Γ4. i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία κ' τα ακρότατα

ii) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$x=e^{2x}(e^{\lambda}-1)$$

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=2\ln x+\frac{5\alpha}{x}-5\alpha$, $x>0$.

(2) $\Leftrightarrow g(x)\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq g(1)\ \forall x>0$

άρα το $g(1)$ είναι Ο.Ε. της g

κ' το 1 είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$

κ' η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ κ' άρα κ' στο 1 ως άθροισμα παραγωγίσιμων σ/σεων, με

$$g'(x)=\frac{2}{x}-\frac{5\alpha}{x^2}$$

Συνεπώς από Θ. Fermat είναι $g'(1)=0 \Leftrightarrow 2-5\alpha=0$

$\Leftrightarrow \alpha=\frac{2}{5}$

Γ2. $\lim\limits_{h\to+\infty} e^{h}\left(f(x+e^{-h})-f(x)\right)=$

$$=\lim_{h\to+\infty}\frac{f(x+e^{-h})-f(x)}{e^{-h}}=L$$

Θέτω $e^{-h}=u$

$$\lim_{h\to+\infty} e^{-h} \overset{-h=t}{\underset{t\to-\infty}{=\!=}} \lim_{t\to-\infty} e^{t}=0$$

Άρα $L=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(x+u)-f(x)}{u}=f'(x).$

Γ3. $(1) \overset{(\Gamma1)}{\underset{(\Gamma2)}{\iff}} e^{2x+f(x)}\cdot f'(x)=1-2x,\ x>0$

$\iff e^{2x}e^{f(x)}\cdot f'(x)=1-2x \overset{\cdot e^{-2x}}{\iff}$

$\iff e^{f(x)}f'(x)=e^{-2x}(1-2x) \iff e^{f(x)}f'(x)=e^{-2x}-2xe^{-2x}$

$\iff \left(e^{f(x)}\right)'=\left(xe^{-2x}\right)'$

οπότε από συνέπεια του ΘΜΤ προκύπτει πως

$$e^{f(x)}=xe^{-2x}+c,\quad c\in\mathbb{R},\ x>0$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} e^{f(x)}=\lim\limits_{x\to0^+}(xe^{-2x}+c)$ (f συνεχής ως παραγωγίσιμη)

$\left.\begin{array}{l} e^{f(0)}=c \\ \text{κ}' \ O(0,0)\in C_f \iff f(0)=0 \end{array}\right\} \iff c=1$

$\left.\begin{array}{l}\text{Τελικά } e^{f(x)}=xe^{-2x}+1,\ x>0 \\ \text{κ}' \ xe^{-2x}+1>0,\ \forall x>0\end{array}\right\} \iff$

$$f(x)=\ln\left(xe^{-2x}+1\right),\ x>0$$

κ' $f(0)=0$ κάτι που δίνει ο παραπάνω τύπος,
άρα τελικά

$$f(x)=\ln\left(xe^{-2x}+1\right),\ x\geq0$$

Γ4. i) Η f είναι συνεχής (ως πράξ/μη) στο $[0,+\infty)$

και $f'(x) = \dfrac{e^{-2x} - 2xe^{-2x}}{xe^{-2x}+1} = \dfrac{e^{-2x}(1-2x)}{xe^{-2x}+1}$

και $f'(x) = 0 \underset{\substack{e^{-2x}>0 \ \forall x\geq 0 \\ xe^{-2x}+1>0 \ \forall x \geq 0}}{\Longleftrightarrow} 1-2x=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

και $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow 1-2x>0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$

Άρα έχουμε:

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	
	ΤΕ		ΟΜ		

$f \nearrow [0, \frac{1}{2}]$
$f \searrow [\frac{1}{2}, +\infty)$
και η f παρουσιάζει ΟΜ στο $x_1 = \frac{1}{2}$ το $f(\frac{1}{2}) = \ln(\frac{1}{2e}+1)$

και ΤΕ στο $x_2 = 0$ το $f(0) = 0$.

ii) $x = e^{2x}(e^{\lambda}-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow xe^{-2x} = e^{\lambda} - 1 \Leftrightarrow xe^{-2x}+1 = e^{\lambda} \Leftrightarrow$

$\ln(xe^{-2x}+1) = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda$.

Βρίσκουμε τα σύνολα τιμών των διαστημάτων $\Delta_1 = [0, \frac{1}{2}]$ και $\Delta_2 = (\frac{1}{2}, +\infty)$

$f(\Delta_1) \underset{}{\overset{f\nearrow}{=\!=}} [f(0), f(\frac{1}{2})] = [0, \ln(\frac{1}{2e}+1)]$

$f(\Delta_2) \overset{f\searrow}{=\!=} (\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x))$

• $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) \overset{f \text{ συνεχής}}{=\!=} f(\frac{1}{2}) = \ln(\frac{1}{2e}+1)$

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(xe^{-2x}+1)$

Θέτω $xe^{-2x}+1 = u$

κ' $\lim_{x\to+\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{+2x}} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0$

άρα

$\lim_{x\to+\infty}(xe^{-2x}+1) = 1$.

Άρα

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{u\to1} \ln u = \ln 1 = 0$.

άρα $f(\Delta_2) = \left(0, \ln\left(\frac{1}{2e}+1\right)\right)$

Συνεπώς:

• αν $\lambda<0$ ή $\lambda > \ln\left(\frac{1}{2e}+1\right)$ τότε $\lambda \notin f(\Delta_1)$ κ'

$\lambda \notin f(\Delta_2)$ άρα η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη

• αν $\lambda = 0 = f(0)$ τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$ κ' αφού $f \nearrow$ στο Δ_1

η $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς 1 ρίζα, την $x=0$.

• αν $\lambda = f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2e}+1\right)$ τότε αυτό είναι το Ο.Μ.

της f κ' άρα η εξίσωση έχει 1 ακριβώς

ρίζα την $x=\frac{1}{2}$

• Τέλος αν $\lambda \in \left(0, \ln\left(\frac{1}{2e}+1\right)\right)$ τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$ κ' $\lambda \in f(\Delta_2)$

κ' $f \nearrow$ στο Δ_1 κ' $f \searrow$ στο Δ_2, συνεπώς η εξίσωση $f(x)=\lambda$

έχει 2 ακριβώς ρίζες, μία στο Δ_1 κ'

1 στο Δ_2.

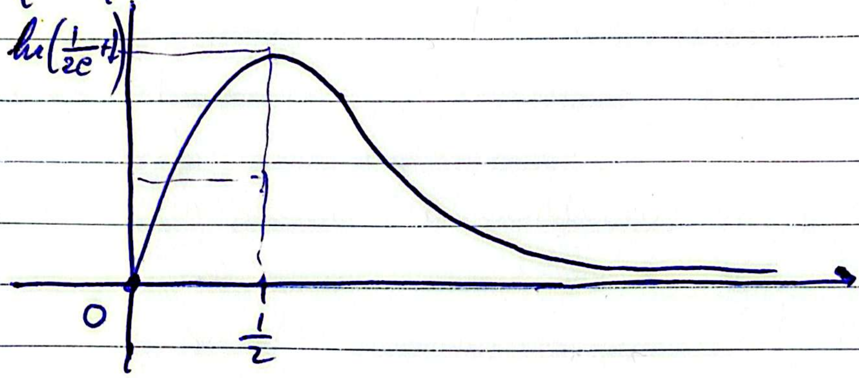
* Το ερώτημα (Γ4 ii) θα μπορούσατε να το λύσετε και ως εξής:

Αφού

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	
	ΟΕ $f(0)=0$		ΟΜ $f(\frac{1}{2})=\ln(\frac{1}{2e}+1)$		

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dots = 0$

μια ενδεικτική γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να είναι η:



Άρα η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει:

- 1 λύση αν $\lambda=0$ (την $x=0$)
- 2 λύσεις αν $\lambda\in\left(0, \ln\left(\frac{1}{2e}+1\right)\right)$
- 1 λύση αν $\lambda=\ln\left(\frac{1}{2e}+1\right)$ (την $x=\frac{1}{2}$)
- 0 λύσεις αν $\lambda>\ln\left(\frac{1}{2e}+1\right)$ ή $\lambda<0$.