ΜΑΘΗΜΑ 38
3.1 ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ (ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ)
Θεωρία - Σχόλια - Μέθοδοι - Ασκήσεις

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός

Έστω συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$. **(προσοχή, το Δ είναι διάστημα)**

Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ λέγεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\Delta$.

2.

Θεώρημα

Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε :

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$

  είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c \quad \text{με} \quad c\in\mathbb{R}$$

3.

Πίνακες παραγουσών βασικών συναρτήσεων

Συνάρτηση f	Αρχικές της f
0	c
1	x
x^{α}, $\alpha\neq-1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
e^x	e^x+c
α^x	$\frac{\alpha^x}{\ln\alpha}$

Συνάρτηση f	Αρχικές της f
$συνx$	$ημx+c$
$ημx$	$-συνx+c$
$\frac{1}{ημ^2x}$	$-σφx+c$
$\frac{1}{συν^2x}$	$εφx+c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$

4.

Το άθροισμα

F παράγουσα της f και G παράγουσα της g $\Rightarrow$ F + G παράγουσα της f + g

5.

Το γινόμενο επί αριθμό

F παράγουσα της f $\Rightarrow$ λF παράγουσα της λf

ΣΧΟΛΙΑ - ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Μια λεπτομέρεια

Η έκφραση : $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

σημαίνει ότι έχουμε άπειρες συναρτήσεις G, αφού το c παίρνει άπειρες τιμές.

Η έκφραση : $G(x) = F(x) + c$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$

σημαίνει ότι έχουμε συγκεκριμένη συνάρτηση G.

2.

Το πλήθος των παραγουσών μιας συνάρτησης

Έτσι και υπάρχει μια παράγουσα, υπάρχουν άπειρες.
Δύο οποιεσδήποτε από αυτές διαφέρουν κατά σταθερά.

3.

Προσοχή

Το θεώρημα της παραγράφου έχει δύο προϋποθέσεις

α) Η συνάρτηση είναι συνεχής

β) Το Δ είναι διάστημα

Αν το πεδίο ορισμού είναι ένωση διαστημάτων, τότε το θεώρημα εφαρμόζεται κατά διαστήματα.

4.

Τεχνική εύρεσης παράγουσας

Παράδειγμα 1. Αναζητώ μια παράγουσα της συν3x

Πρέπει να παραγωγίσω την ημ3x : $(ημ3x)' = συν3x \cdot 3 \Rightarrow$

$$\frac{1}{3}(ημ3x)' = συν3x \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{3}ημ3x\right)' = συν3x$$

Άρα μια παράγουσα της συν3x είναι η $\frac{1}{3}$ημ3x

Παράδειγμα 2. Αναζητώ μια παράγουσα της $\frac{1}{2x+1}$ στο $(0, +\infty)$

Πρέπει να παραγωγίσω την ln(2x + 1) : $[\ln(2x+1)]' = \frac{1}{2x+1}\cdot 2$

$$\frac{1}{2}[\ln(2x+1)]' = \frac{1}{2x+1}$$

$$\left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]' = \frac{1}{2x+1}$$

Άρα μια παράγουσα της $\frac{1}{2x+1}$ είναι η $\frac{1}{2}\ln(2x+1)$

5.
Χρήσιμος πίνακας παραγουσών

Συνάρτηση	**Παράγουσα**
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert + c$
$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$\sqrt{f(x)} + c$
$2f'(x)f(x)$	$(f(x))^2 + c$
$\frac{f'(x)}{f^2(x)}$	$-\frac{1}{f(x)} + c$
$f'(x)f^{\nu}(x)$, $\nu \neq -1$	$\frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1} + c$

6.
Μέθοδος

Όταν θέλω να προσδιορίσω τύπο συνάρτησης , προσπαθώ να δημιουργήσω

$$(\ \ldots\ldots\ )' = (\ \ldots\ldots\ )' \quad \text{ή} \quad (\ \ldots\ldots\ )' = 0$$

∗ Αυτό το συναντήσαμε και στην παράγραφο 2.6

7.
Μέθοδος

- Από τη σχέση $f'(x) + \alpha f(x) = c$ να βρίσκω την f

  Πολλαπλασιάζω με $e^{\alpha x}$: $e^{\alpha x}f'(x) + \alpha e^{\alpha x}f(x) = ce^{\alpha x}$

  $$e^{\alpha x}f'(x) + (e^{\alpha x})'f(x) = ce^{\alpha x}$$

$$\left(e^{\alpha x} f(x)\right)' = \left(\frac{1}{\alpha} c e^{\alpha x}\right)'$$

$$e^{\alpha x} f(x) = \frac{1}{\alpha} c e^{\alpha x} + c_1 \quad \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} c + c_1 e^{-\alpha x}$$

- Από τη σχέση $f\,'(x) + f(x) = c$ να βρίσκω την f (κάνε εφαρμογή για $\alpha = 1$)
- Από τη σχέση $f\,'(x) - f(x) = c$ να βρίσκω την f (κάνε εφαρμογή για $\alpha = -1$)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρείτε συνάρτηση f για την οποία ισχύει $e^{f(x)} f\,'(x) = x + x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $M(0, 1)$.

Προτεινόμενη λύση

$$e^{f(x)} f'(x) = x + x^3 \quad \Rightarrow \quad \left(e^{f(x)}\right)' = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)'$$

Σχόλια 5, 6

$$e^{f(x)} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + c \qquad \textbf{(1)}$$

$M(0, 1) \in C_f \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1$

Η (1) για $x = 0$ δίνει $e^{f(0)} = \dfrac{0^2}{2} + \dfrac{0^4}{4} + c \quad \Rightarrow \quad e = c$

(1) $\Rightarrow \quad e^{f(x)} = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} + e \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} + e\right)$

2.

Να βρείτε συνάρτηση f με $f(x)\neq 0$ τέτοια ώστε $\dfrac{f'(x)}{(f(x))^2}=2x+e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=-1$.

Προτεινόμενη λύση

Σχόλια 5, 6

$$\frac{f'(x)}{(f(x))^2}=2x+e^x \Leftrightarrow \left(\frac{-1}{f(x)}\right)'=\left(x^2+e^x\right)'$$

$$\frac{-1}{f(x)}=x^2+e^x+c \qquad \textbf{(1)}$$

Η (1) για $x=0$ δίνει $\dfrac{-1}{f(0)}=0^2+e^0+c \Rightarrow \dfrac{-1}{-1}=1+c \Rightarrow c=0$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{-1}{f(x)}=x^2+e^x \Leftrightarrow f(x)=\frac{-1}{x^2+e^x}$$

3.

Να βρείτε συνάρτηση f με $f(x)\neq 0$, για την οποία ισχύει $f(1)=2$ και

$$\frac{f'(x)}{1+x}=\frac{1}{xf(x)}, \text{ για κάθε } x\geq 1$$

Προτεινόμενη λύση

$$\frac{f'(x)}{1+x}=\frac{1}{xf(x)} \Leftrightarrow f(x)f'(x)=\frac{1+x}{x}$$

$$2f(x)f'(x)=2\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\left[f^2(x)\right]'=\left[2(x+\ln x)\right]'$$

Σχόλια 5, 6

$$f^2(x)=2(x+\ln x)+c \qquad \textbf{(1)}$$

Η (1) για $x=1$ δίνει $f^2(1)=2(1+\ln 1)+c$

$2^2=2+c$

$c=2$

$(1) \Leftrightarrow f^2(x)=2(x+\ln x)+2 \Leftrightarrow f^2(x)=2(x+\ln x+1)$ **(2)**

Αλλά $x\geq 1 \Rightarrow \ln x\geq 0 \Rightarrow x+\ln x+1\geq 2>0$

Οπότε (2) $\Leftrightarrow f(x)=\pm\sqrt{2(x+\ln x+1)}$ **(3)**

Επειδή η f είναι συνεχής (αφού είναι παραγωγίσιμη) και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\geq 1$, η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή όμως $f(1)=2>0$, θα είναι $f(x)>0$.

Οπότε η (3) $\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{2(x+\ln x+1)}$

4.

Να βρείτε συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f\,'(x) = 2011 + \dfrac{f(x)}{x}$, $x > 0$

Προτεινόμενη λύση

$$f'(x) = 2011 + \frac{f(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) - \frac{f(x)}{x} = 2011$$

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x} = 2011$$

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{2011}{x}$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \left(2011\ln x\right)'$$

$$\frac{f(x)}{x} = 2011\ln x + c \quad \text{με} \quad c \in \mathbb{R}$$

Να θυμόμαστε αυτή τη διαδικασία

5.

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $f(0) = 0$ και $f\,'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $xf(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 7

$$f\,'(x) > f(x) \quad \Rightarrow \quad f\,'(x) - f(x) > 0$$

$$e^{-x} f\,'(x) - e^{-x} f(x) > 0\, e^{-x}$$

$$e^{-x} f\,'(x) + (e^{-x})' f(x) > 0$$

$$(e^{-x} f(x))' > 0$$

Επομένως η συνάρτηση $g(x) = e^{-x} f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα .

- Για $x > 0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow}$ $g(x) > g(0)$

  $g(x) > e^{-0} f(0) = 1{\cdot}0 = 0$

  $e^{-x} f(x) > 0$

  $f(x) > 0$ και αφού $x > 0 \Rightarrow xf(x) > 0$

- Για $x < 0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow}$ $g(x) < g(0)$

  $g(x) < e^{-0} f(0) = 1{\cdot}0 = 0$

  $e^{-x} f(x) < 0$

  $f(x) < 0$ και αφού $x < 0 \Rightarrow xf(x) > 0$

6.

Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f''(2x-1) = x - \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(2, 3)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 2 , να βρείτε την f .

Προτεινόμενη λύση

Στη σχέση $f''(2x-1) = x - \frac{1}{2}$ θέτουμε $2x-1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}$, $y \in \mathbb{R}$.

Οπότε $f''(y) = \frac{1}{2}y \Rightarrow (f'(y))' = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\right)' \Leftrightarrow$

$$f'(y) = \frac{1}{4}y^2 + c \qquad \textbf{(1)}$$

Η (1) για $y = 2$ δίνει $f'(2) = 1 + c$

Όμως από υπόθεση είναι $f'(2) = 2$, άρα $2 = 1 + c \Rightarrow c = 1$

Η (1) γίνεται $f'(y) = \frac{1}{4}y^2 + 1 \Rightarrow f'(y) = \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{y^3}{3} + y\right)'$

$$f(y) = \frac{1}{12}y^3 + y + c_1 \qquad \textbf{(2)}$$

Η (2) για $y = 2$ δίνει $f(2) = \frac{1}{12}\cdot 8 + 2 + c_1$

Όμως από υπόθεση είναι $f(2) = 3$, άρα $3 = \frac{1}{12}\cdot 8 + 2 + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3}$

Η (2) γίνεται $f(y) = \frac{1}{12}y^3 + y + \frac{1}{3}$ δηλαδή

$$f(x) = \frac{1}{12}x^3 + x + \frac{1}{3}, \ x \in \mathbb{R}$$

7.

Έστω συνάρτηση f, τέτοια ώστε $f(1) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f''(x) + f''(2-x) = 2$. Να αποδείξτε ότι $f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 3$

Προτεινόμενη λύση

$$f''(x) + f''(2-x) = 2 \quad \Rightarrow \quad f''(x) - f''(2-x)\,(2-x)' = 2$$

$$\big(f'(x)\big)' - \big(f'(2-x)\big)' = 2$$

$$\big(f'(x) - f'(2-x)\big)' = (2x)'$$

$$f'(x) - f'(2-x) = 2x + c \qquad \textbf{(1)}$$

Η (1) για $x = 1$ δίνει $f'(1) - f'(2-1) = 2\cdot 1 + c$

$$f'(1) - f'(1) = 2 + c \quad \Rightarrow \quad c = -2$$

Η (1) γίνεται $f'(x) - f'(2-x) = 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) + \big(f(2-x)\big)' = 2x - 2$

$$\big(f(x) + \big(f(2-x)\big)' = (x^2 - 2x)'$$

$$f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + c_1 \qquad \textbf{(2)}$$

Η (2) για $x = 1$ δίνει $f(1) + f(2-1) = 1^2 - 2\cdot 1 + c_1$

$$f(1) + f(1) = 1 - 2\cdot 1 + c_1$$

$$2f(1) = -1 + c_1$$

$$2\cdot 1 = -1 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 3$$

Η (2) γίνεται $f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 3$

> Για τις επόμενες 9 ασκήσεις, 8 – 16 , παραθέτουμε το τρικ μετασχηματισμού και όχι την πληρότητα της άσκησης

8.

Αν $f'(x) = 3x^2 f(x)$ και $f(x) > 0$, βρείτε τον τύπο της f.

Προτεινόμενη λύση

$$f'(x) = 3x^2 f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = 3x^2$$

$$[\ln(f(x)]' = (x^3)'$$

$$\ln f(x) = x^3 + c \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = e^{x^3 + c}$$

9.

Αν $f'(x)\text{συν}x = 1 + f(x)\text{ημ}x$, βρείτε τον τύπο της f.

Προτεινόμενη λύση

$$f'(x)\text{συν}x = 1 + f(x)\text{ημ}x \iff f'(x)\text{συν}x - f(x)\text{ημ}x = 1$$

$$f'(x)\text{συν}x + f(x)(\text{συν}x)' = 1$$

$$\big(f(x)\text{συν}x\big)' = (x)' \iff f(x)\text{συν}x = x + c$$

10.

Αν $xf'(x) = \frac{1}{x^2} - 2f(x)$, $x > 0$, βρείτε τον τύπο της f.

Προτεινόμενη λύση

$$xf'(x) = \frac{1}{x^2} - 2f(x) \iff xf'(x) + 2f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$x^2f'(x) + 2xf(x) = \frac{1}{x}$$

$$(x^2f(x))' = (\ln x)' \qquad \text{κ.λ.π}$$

11.

Αν $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{f(x)}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$, βρείτε τον τύπο της f.

Προτεινόμενη λύση

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{f(x)}{x} \iff f'(x) + \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x^2}$$

$$xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x}$$

$$xf'(x) + x'f(x) = \frac{1}{x}$$

$$(xf(x))' = (\ln x)' \qquad \text{κ.λ.π.}$$

12.

Αν $f(0) = 0$ και $x + f'(x)f(x) = f(x) + xf'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, βρείτε τον τύπο της f.

Προτεινόμενη λύση

$$x + f'(x)f(x) = f(x) + xf'(x) \iff \left(\frac{x^2}{2} + \frac{f^2(x)}{2}\right)' = \big(xf(x)\big)' \qquad \text{κ.λ.π}$$

13.

Αν $f'(x) - 2xe^{-f(x)} = 0$, $x \in \mathbb{R}$, βρείτε τον τύπο της f.

Προτεινόμενη λύση

$$f'(x) - 2xe^{-f(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) - 2x\frac{1}{e^{f(x)}} = 0$$

$$f'(x)\, e^{f(x)} = 2x$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = (x^2)' \quad \text{κ . λ. π}$$

14.

Αν $x^2 f'(x) + e^{-f(x)} = 0$, $x > 0$, βρείτε τον τύπο της f.

Προτεινόμενη λύση

$$x^2 f'(x) + e^{-f(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 f'(x) + \frac{1}{e^{f(x)}} = 0$$

$$f'(x)\, e^{f(x)} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(e^{f(x)} - \frac{1}{x}\right)' = c' \quad \text{κ . λ . π}$$

15.

Αν $1 + xf'(x) = xe^{-f(x)}$, $x > 0$, βρείτε τον τύπο της f.

Προτεινόμενη λύση

$$1 + xf'(x) = xe^{-f(x)} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + xf'(x) = \frac{x}{e^{f(x)}}$$

$$e^{f(x)} + x\, f'(x) e^{f(x)} = x$$

$$\left(x\, e^{f(x)}\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \quad \text{κ .λ . π}$$

16.

Αν $f'(x) - 3f(x) = -2e^x$, $x \in \mathbb{R}$, βρείτε τον τύπο της f.

Προτεινόμενη λύση

$$f'(x) - 3f(x) = -2e^x \quad \Leftrightarrow \quad e^{-3x} f'(x) - 3e^{-3x} f(x) = -2\, e^{-3x} e^x \quad (\text{πολλ/μός με το } e^{-3x})$$

$$e^{-3x} f'(x) + \left(e^{-3x}\right)' f(x) = -2\, e^{-3x} e^x$$

$$[e^{-3x} f(x)]' = (e^{-2x})' \quad \text{κ .λ . π}$$

17.

Αν f, g δύο παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις, τέτοιες ώστε

$f'(0)g(0) = f(0)g'(0)$, $g(x) \neq 0$ και $f''(x)g(x) = f(x)g''(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

να αποδείξετε ότι $f(x) = cg(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και c κάποιος πραγματικός.

Προτεινόμενη λύση

$$f''(x)g(x) = f(x)g''(x) \quad \left(\text{προσθέτουμε } f'(x)g'(x)\right) \quad \Rightarrow$$

$$f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) = f(x)g''(x) + f'(x)g'(x)$$

$$\left(f'(x)\right)'g(x) + f'(x)g'(x) = f(x)\left(g'(x)\right)' + f'(x)g'(x)$$

$$\left(f'(x)g(x)\right)' = \left(f(x)g'(x)\right)'$$

$$f'(x)g(x) = f(x)g'(x) + c_1 \qquad \textbf{(1)}$$

Η (1) για $x = 0$ δίνει $f'(0)g(0) = f(0)g'(0) + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$

Η (1) γίνεται $f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$

$$f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0$$

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2} = 0$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = c \quad \Rightarrow \quad f(x) = cg(x)$$