

GI_A_ALG_2_1533

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 10)
- β.** Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει: $x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

- α.** Για να έχει πραγματικές ρίζες αρκεί $\Delta \geq 0$. Έχουμε λοιπόν:
 $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 2^2 - 4(\lambda - 2) \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda + 8 \geq 0 \Leftrightarrow 4\lambda \leq 12 \Leftrightarrow \lambda \leq 3$
- β.** Χρησιμοποιώντας τους τύπους **Vieta**, το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης είναι $P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda - 2$ και το άθροισμα είναι $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -2$. Τότε $x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow \lambda - 2 - 2(-2) = 1 \Leftrightarrow \lambda - 2 + 4 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -1$, το οποίο είναι δεκτό αφού για $\lambda \leq 3$ η εξίσωση έχει ρίζες.

GI_A_ALG_2_1544

- α.** Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x . (Μονάδες 10)
- β.** Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση: $B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

- α.** Το τριώνυμο $x^2 + 4x + 5$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4 < 0$, άρα θα διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε πραγματικό αριθμό x , ομόσημο με το συντελεστή του x^2 , δηλαδή θετικό για κάθε πραγματικό αριθμό $x \in \mathbb{R}$.
- β.** Εφόσον $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0$ έχουμε:
 $B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4| = x^2 + 4x + 5 - (x^2 + 4x + 4) = 5 - 4 = 1$.

GI_A_ALG_2_3380

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + 9x - 12, x \in \mathbb{R}$

- α.** Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 13)

- β.** Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

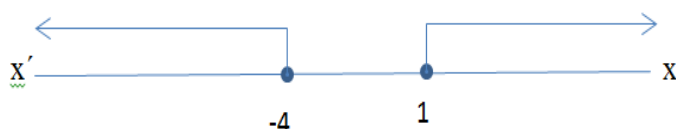
ΛΥΣΗ

- α.** Θα λύσουμε την ανίσωση $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 9x - 12 \leq 0$.

Λύνουμε την εξίσωση $3x^2 + 9x - 12 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 + 3x - 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$. Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25 > 0$ επομένως η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες

$$\text{ρίζες τις } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3+5}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-3-5}{2} = -4 \end{cases}, \text{ επομένως οι ρίζες είναι οι } x_1 = 1$$

και $x_2 = -4$. Το τριώνυμο για $\Delta > 0$ είναι ομόσημο του $\alpha = 3 > 0$ για τιμές του x εκτός των ριζών και ετερόσημο για τιμές του x μεταξύ των ριζών. Επομένως είναι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$.



- β.** Ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι μεγαλύτερος της μονάδας διότι είναι $2 > 1$ άρα και $\sqrt[3]{2} > \sqrt[3]{1} = 1$. Επομένως $\sqrt[3]{2} \in (-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$ άρα αποτελεί λύση της ανίσωσης.

GI_A_ALG_2_3847

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

- α.** η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 13)
β. το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

- α.** Ισχύει $\lambda \neq -2 \Leftrightarrow \lambda + 2 \neq 0$ άρα ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου $(\lambda + 2)x^2$ της εξίσωσης είναι μη μηδενικός.

Συνεπώς η εξίσωσή μας είναι δευτέρου βαθμού ως προς x και έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες όταν για τη διακρίνουσά της Δ ισχύει:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (2\lambda)^2 - 4 \cdot (\lambda + 2) \cdot (\lambda - 1) > 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4 \cdot (\lambda^2 + \lambda - 2) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{4\lambda^2} - \cancel{4\lambda^2} - 4\lambda + 8 > 0 \Leftrightarrow -4\lambda > -8 \Leftrightarrow \frac{-4\lambda}{-4} < \frac{-8}{-4} \Leftrightarrow \lambda < 2.$$

Λόγω και του περιορισμού $\lambda + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -2$ συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες όταν $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2)$.

β. Εφαρμόζοντας τον τύπο **Vieta**, $S = -\frac{\beta}{\alpha}$ για το άθροισμα των ριζών μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού, έχουμε ότι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσής μας είναι ίσο με 2 όταν ισχύει:

$$-\frac{2\lambda}{\lambda+2} = 2 \Leftrightarrow -2\lambda = 2(\lambda+2) \Leftrightarrow -2\lambda = 2\lambda+4 \Leftrightarrow -2\lambda-2\lambda=4 \Leftrightarrow -4\lambda=4 \Leftrightarrow \lambda=-1.$$

Άρα το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2 όταν $\lambda = -1$.

GI_A_ALG_2_4306

α. Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - x - 6 = 0$ (1). (Μονάδες 9)

β. Να λύσετε την ανίσωση $|x-1| < 2$ (2). (Μονάδες 9)

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2). (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Θα αναζητήσουμε τις λύσεις της εξίσωσης $2x^2 - x - 6 = 0$

Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) \Leftrightarrow \Delta = 1 + 48 \Leftrightarrow \Delta = 49 > 0$, οπότε η εξίσωση

(1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{4}, \text{ οπότε } x_1 = \frac{1-7}{4} = -\frac{3}{2} \text{ και}$$

$$x_2 = \frac{1+7}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

β. $|x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -2+1 < x-1+1 < 2+1 \Leftrightarrow -1 < x < 3$, άρα $x \in (1, 3)$.

γ. Επειδή $x_1 = -\frac{3}{2} \notin (1, 3)$ ενώ $x_2 = 2 \in (1, 3)$, ο $x = 2$ είναι ο μοναδικός πραγματικός αριθμός x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

GI_A_ALG_2_4309

Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 20 \text{ cm}$ και εμβαδό $E = 24 \text{ cm}^2$.

α. Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου. (Μονάδες 15)

β. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Έστω x_1, x_2 οι διαστάσεις του ορθογωνίου. Αν θεωρήσουμε $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 x_2$ τότε:

$$\Pi = 20 \cdot 2x_1 + 2x_2 = 20 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 10 \cdot S = 10.$$

$$E = 24 \cdot x_1 \cdot x_2 = 24 \cdot P = 24.$$

Η ζητούμενη εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τις διαστάσεις του ορθογωνίου είναι η:

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

β. Τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 10x + 24 = 0$, η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = 100 - 96 = 4$ και συνεπώς έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{10+2}{2} = 6 \\ \frac{10-2}{2} = 4 \end{cases}$$

Άρα τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι **6** και **4**.

GI_A_ALG_2_4313

Δίνονται οι αριθμοί $A = \frac{1}{3-\sqrt{7}}$, $B = \frac{1}{3+\sqrt{7}}$.

α. Να δείξετε ότι: $A+B=3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 12)

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A , B . (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε:

$$\checkmark A = \frac{1}{3-\sqrt{7}} = \frac{1 \cdot (3+\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} = \frac{3+\sqrt{7}}{3^2 - \sqrt{7}^2} = \frac{3+\sqrt{7}}{9-7} = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$$

$$\checkmark B = \frac{1}{3+\sqrt{7}} = \frac{1 \cdot (3-\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} = \frac{3-\sqrt{7}}{3^2 - \sqrt{7}^2} = \frac{3-\sqrt{7}}{9-7} = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$$

$$\checkmark \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \frac{3 + \sqrt{7}}{2} + \frac{3 - \sqrt{7}}{2} = \frac{3 + \sqrt{7} + 3 - \sqrt{7}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\checkmark \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \cdot \frac{3 - \sqrt{7}}{2} = \frac{(3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7})}{4} = \frac{3^2 - \sqrt{7}^2}{4} = \frac{9 - 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

β. Η ζητούμενη εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τα **A, B** είναι η:

$$x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 = 0.$$

102. GI_A_ALG_4_1874

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 5 = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$. (Μονάδες 7)

β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

γ. Αν η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1, x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει: $d(x_1, x_2) = \sqrt{24}$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Είναι:

$$\Delta = [-2(\lambda - 1)]^2 - 4(\lambda + 5) = 4(\lambda - 1)^2 - 4(\lambda + 5) = 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - 4\lambda - 20 \Leftrightarrow \Delta = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16.$$

β. Η εξίσωση θα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 12\lambda - 16 > 0 \Leftrightarrow 4(\lambda^2 - 3\lambda - 4) > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 > 0.$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 - 3\lambda - 4$ έχει $a = 1 > 0$ και διακρίνουσα $\Delta' = 9 - 4(-4) = 25 > 0$,

επομένως η εξίσωση $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες τις

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \text{ή} \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}. \text{ Συνεπώς για το πρόσημό του έχουμε:}$$

λ	$-\infty$	-1	4	$+\infty$	
$\lambda^2 - 3\lambda - 4$	$+$	$\bullet$ 0	$-$	$\bullet$ 0	$+$

Οπότε, $\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 > 0 \Leftrightarrow \lambda < -1$ ή $\lambda > 4$

γ. Εφόσον η εξίσωση έχει δύο ρίζες, έχουμε ότι: $\lambda < -1$ ή $\lambda > 4$ (3). Τότε:

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) = \sqrt{24} &\Leftrightarrow |x_1 - x_2| = \sqrt{24} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 24 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 24 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 24 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 24 \quad (2) \end{aligned}$$

Από τους τύπους **Vieta** και από την (1) έχουμε ότι:

$$x_1 + x_2 = S = 2(\lambda - 1), \quad x_1x_2 = P = \lambda + 5, \text{ οπότε η (2) γίνεται:}$$

$$\begin{aligned} 4(\lambda - 1)^2 - 4(\lambda + 5) &= 24 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - 4\lambda - 20 = 24 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 12\lambda - 40 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ ή } \lambda = 5 \end{aligned}$$

Οι ρίζες αυτές είναι και οι δύο δεκτές, αφού ικανοποιούν τον περιορισμό (3).

GI_A_ALG_4_4835

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β . (Μονάδες 6)

β. Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$. (Μονάδες 7)

γ. Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Από τους τύπους **Vieta** παίρνουμε,

$$|x_1 + x_2| = 4 \Leftrightarrow |S| = 4 \Leftrightarrow \left| \frac{-(-\beta)}{1} \right| = 4 \Leftrightarrow |\beta| = 4.$$

Άρα $\beta = 4$ ή $\beta = -4$.

β. Αφού η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, έχουμε $\Delta > 0 \Rightarrow (-\beta)^2 - 4\gamma > 0 \Rightarrow 4\gamma < \beta^2$
 $\Rightarrow 4\gamma < \beta^2 \Rightarrow 4\gamma < |\beta|^2 \Rightarrow 4\gamma < 16 \Rightarrow \gamma < 4$

γ. Είναι, $x^2 - \beta|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - \beta|x| + 3 = 0$. Αν θέσουμε $|x| = \omega$ η εξίσωση γίνεται
 $\omega^2 - \beta\omega + 3 = 0$.

Για $\beta = 4$ έχουμε $\omega^2 - 4\omega + 3 = 0$ με $\Delta = 4$ και ρίζες $\omega_1 = 1$ ή $\omega_2 = 3$

Άρα $|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ ή $|x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Για $\beta = -4$ έχουμε $\omega^2 + 4\omega + 3 = 0$ με $\Delta = 4$ και ρίζες $\omega_3 = -1$ ή $\omega_4 = -3$

Άρα $|x| = -1$ αδύνατη ή $|x| = -3$ αδύνατη.

Επομένως για $\beta = -4$ η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

GI_A_ALG_4_4836

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
(Μονάδες 8)

β. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$
είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης. (Μονάδες 5)

γ. Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:

i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) $x_1 + 4x_2 \geq 4$. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α. Για να έχει η εξίσωση (1) ρίζες πραγματικές και άνισες, θα πρέπει $\Delta > 0$. Είναι:

$$\Delta = \lambda^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow |\lambda| > 2 \Leftrightarrow \lambda < -2 \text{ ή } \lambda > 2.$$

β. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε επαληθεύει τη σχέση (1), δηλαδή
 $\rho^2 - \lambda\rho + 1 = 0$. (2)

Ο αριθμός ρ είναι προφανώς διάφορος του μηδενός, γιατί διαφορετικά θα είχαμε $0 - 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ το οποίο είναι άτοπο.

Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει τη σχέση (1), αφού:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 - \lambda\left(\frac{1}{\rho}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\rho^2} - \frac{\lambda}{\rho} + 1 = 0 \Leftrightarrow \rho^2 - \lambda\rho + 1 = 0 \text{ που ισχύει από την (2)}$$

γ.

i) Από τους τύπους **Vieta** παίρνουμε: $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ και $x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 1$

Επομένως για $\lambda > 2$ έχουμε $x_1 + x_2 > 0$ και $x_1 x_2 > 0$.

Δηλαδή οι ρίζες x_1, x_2 είναι ομόσημοι αριθμοί με άθροισμα θετικό.

Άρα οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί

ii) Αφού x_1, x_2 είναι αριθμοί θετικοί, έχουμε:

$$x_1 + 4x_2 \geq 4 \Leftrightarrow (x_1 + 4x_2)^2 \geq 16 \Leftrightarrow x_1^2 + 8x_1 x_2 + 16x_2^2 \geq 16 \quad (3)$$

Όμως $x_1 x_2 = 1$, άρα η (3) γράφεται ισοδύναμα

$$x_1^2 + 8x_1 x_2 + 16x_2^2 \geq 16x_1 x_2 \Leftrightarrow x_1^2 - 8x_1 x_2 + 16x_2^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 4x_2)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς } x_1, x_2.$$

GI_A_ALG_4_4853

Δίνεται το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$, με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

α. Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $\gamma = 2a$ και $\beta = -3a$. (Μονάδες 9)

β. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1, 2)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $a < 0$. (Μονάδες 9)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2 + \beta x + a < 0$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Από τους τύπους **Vieta**, έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} \Rightarrow 1 + 2 = -\frac{\beta}{a} \Rightarrow \beta = -3a$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow 1 \cdot 2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \gamma = 2\alpha.$$

β.

i) Το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α , για κάθε x , που ανήκει εντός των ριζών. Αφού παίρνει θετικές τιμές εντός των ριζών, συμπεραίνουμε ότι: $\alpha < 0$.

ii) Είναι $\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0 \Leftrightarrow \overset{(\alpha)}{2\alpha x^2} - 3\alpha x + \alpha < 0 \Leftrightarrow \overset{(\alpha < 0)}{2x^2 - 3x + 1} > 0$ (1)

Η εξίσωση $2x^2 - 3x + 1 = 0$ έχει ρίζες $1, \frac{1}{2}$ και ισχύει:

$$\bullet 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ή } x = 1$$

$$\bullet 2x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \text{ ή } x > 1$$

$$\bullet 2x^2 - 3x + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1$$

$$\text{Τελικά, } 2x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \text{ ή } x > 1.$$

GI_A_ALG_4_4857

Δίνεται η εξίσωση $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$, όπου α, β δύο θετικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 - \beta^2)^2$. (Μονάδες 8)

β. Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α, β , έτσι ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α, β . (Μονάδες 10)

γ. Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι:
 $(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 4$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. Η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης ισούται με:

$$\Delta = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha\beta\alpha\beta = \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - 4\alpha^2\beta^2 = \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = (\alpha^2 - \beta^2)^2.$$

β. Η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, αν και μόνο αν,

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (\alpha^2 - \beta^2)^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \neq \beta^2 \Leftrightarrow |\alpha| \neq |\beta|$$

Οι ρίζες της εξίσωσης, είναι:

$$x_{1,2} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \pm (\alpha^2 - \beta^2)}{2\alpha\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2\alpha^2}{2\alpha\beta} \\ \text{ή} \\ x_2 = \frac{2\beta^2}{2\alpha\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\alpha}{\beta} \\ \text{ή} \\ x_2 = \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}$$

γ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$(1+x_1)(1+x_2) \geq 4 \Leftrightarrow 1+x_1+x_2+x_1x_2 \geq 4 \Leftrightarrow 1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \geq 4 \Leftrightarrow 1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+1 \geq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-2 \geq 0, \text{ οπότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με } \alpha\beta > 0 \text{ (αφού } \alpha > 0$$

και $\beta > 0$), η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα: $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, που ισχύει.

GI_A_ALG_4_4903

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- α.** Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 8)
- β.** Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ . (Μονάδες 7)
- γ.** Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α. Είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = (2\lambda - 1)^2 - 4\lambda(\lambda - 1) \Leftrightarrow \Delta = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda \Leftrightarrow \Delta = 1 > 0,$$

σταθερή (δηλαδή ανεξάρτητη του λ).

β. Είναι $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-2\lambda + 1 \pm 1}{2\lambda} =$

$$= \begin{cases} x_1 = \frac{-2\lambda + 1 - 1}{2\lambda} \\ \text{ή} \\ x_2 = \frac{-2\lambda + 1 + 1}{2\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2\lambda}{2\lambda} \\ \text{ή} \\ x_2 = \frac{-2\lambda + 2}{2\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ \text{ή} \\ x_2 = \frac{2(1-\lambda)}{2\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ \text{ή} \\ x_2 = \frac{1-\lambda}{\lambda} \end{cases}$$

γ. Η απόσταση δύο αριθμών x_1, x_2 ορίζεται ως η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.

Επομένως ζητάμε τις λύσεις της εξίσωσης $|x_2 - x_1| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1-\lambda}{\lambda} + 1 \right| = 2$ με $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$$\text{Έχουμε } \left| \frac{1-\lambda}{\lambda} + 1 \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{1-\lambda}{\lambda} + 1 \right| = 2 \\ \text{ή} \\ \left| \frac{1-\lambda}{\lambda} + 1 \right| = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\lambda+\lambda = 2\lambda \\ \text{ή} \\ 1-\lambda+\lambda = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda \\ \text{ή} \\ 1 = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \text{ή} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

GI_A_ALG_4_4952

- α.** Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.
- i)** Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 6)
- ii)** Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 6)
- β.** Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.
- i)** Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)
- ii)** Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)} - 2 \leq 2$. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α.

- i)** Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γίνεται $x^2 + 2x + 3 = \alpha \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 - \alpha = 0$ **(1)**. Άρα για να έχει η δοθείσα εξίσωση δυο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει η **(1)** να έχει θετική διακρίνουσα.

Οπότε έχουμε:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - \alpha) > 0 \Leftrightarrow 4 - 12 + 4\alpha > 0 \Leftrightarrow 4\alpha > 8 \Leftrightarrow \alpha > 2.$$

- ii)** Για να έχει η δοθείσα εξίσωση διπλή ρίζα, πρέπει η **(1)** να έχει διακρίνουσα ίση με το μηδέν.

Οπότε έχουμε: $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

Για $\alpha = 2$ η **(1)** γίνεται

$$x^2 + 2x + 3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1, \text{ η διπλή ρίζα της εξίσωσης.}$$

β.

- i)** Είναι $f(x) = x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow f(x) = x^2 + 2x + 1 + 2 \Leftrightarrow f(x) = (x+1)^2 + 2$.

Οπότε έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \geq 2$

- ii)** Επειδή $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η ανίσωση $\sqrt{f(x)} - 2 \leq 2$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε έχουμε:

$$\sqrt{f(x)} - 2 \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 3 - 2} \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 1} \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2} \leq 2 \Leftrightarrow |x+1| \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$-2 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow -2-1 \leq x+1-1 \leq 2-1 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1.$$

GI_A_ALG_4_4957

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- α.** Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. (Μονάδες 8)
- β.** Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)
- γ.** Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)
- δ.** Για κάθε $\lambda > 0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε ότι $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α. Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = \left[-(\lambda^2 + 1)\right]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \Delta = (\lambda^2 + 1)^2 - 4\lambda^2 \Leftrightarrow \Delta = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 \Leftrightarrow$

$\Delta = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 \Leftrightarrow \Delta = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, οπότε το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές.

β. $S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow S = -\frac{-(\lambda^2 + 1)}{\lambda} \Leftrightarrow S = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda}$ και
 $P = x_1 x_2 \Leftrightarrow P = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow P = \frac{\lambda}{\lambda} \Leftrightarrow P = 1$.

γ. Για $\lambda > 0$ είναι $P = 1 > 0$ και $S = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} > 0$, οπότε έχει ρίζες θετικές.

δ. Για $\lambda > 0$ είναι $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x_1 x_2} \leq x_1 + x_2 \Leftrightarrow 2\sqrt{P} \leq S$, επειδή $S, P > 0$, ισοδύναμα έχουμε:

$$2\sqrt{x_1 x_2} \leq x_1 + x_2 \Leftrightarrow 4x_1 x_2 \leq (x_1 + x_2)^2 \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 \geq 4x_1 x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 4x_1 x_2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει για κάθε } \lambda > 0.$$

GI_A_ALG_4_4962

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- α.** Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. (Μονάδες 8)

- β.** Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)
- γ.** Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)
- δ.** Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνεται τους αριθμούς $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1 . (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \alpha. \text{ Είναι } \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = \left[-(\lambda^2 + 1) \right]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Delta &= (\lambda^2 + 1)^2 - 4\lambda^2 \Leftrightarrow \Delta = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Delta = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 \Leftrightarrow \Delta = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\},$$

οπότε το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές.

$$\begin{aligned} \beta. S = x_1 + x_2 &\Leftrightarrow S = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow S = -\frac{-(\lambda^2 + 1)}{\lambda} \Leftrightarrow S = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} \text{ και} \\ P = x_1 x_2 &\Leftrightarrow P = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow P = \frac{\lambda}{\lambda} \Leftrightarrow P = 1 \end{aligned}$$

$$\gamma. \text{ Για } \lambda > 0 \text{ είναι } P = 1 > 0 \text{ και } S = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} > 0, \text{ οπότε έχει ρίζες θετικές}$$

$$\delta. \text{ Βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς των αριθμών } \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ και } 1.$$

$$\text{Είναι } \frac{x_1 + x_2}{2} - 1 = \frac{\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda}}{2} - 1 = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} - 1 = \frac{\lambda^2 + 1 - 2\lambda}{2\lambda} = \frac{(\lambda - 1)^2}{2\lambda} > 0,$$

$$\text{για κάθε } 0 < \lambda \neq 1. \text{ Επομένως } \frac{x_1 + x_2}{2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} > 1.$$

GI_A_ALG_4_4970

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α.** Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ , η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 8)
- β.** Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ . (Μονάδες 7)
- i)** Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$
- ii)** Να δείξετε ότι:

- $\rho \neq 0$ και
- ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$. (Μονάδες 4+6=10)

ΛΥΣΗ

α. Είναι $\Delta = \lambda^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-36) = \lambda^2 + 288 > 0$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ . Άρα η εξίσωση (1) έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες.

β.

i) Αφού το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) άρα την επαληθεύει. Συνεπώς ισχύουν τα εξής:
 $2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0$ (2) $\Leftrightarrow 2(-\rho)^2 - \lambda(-\rho) - 36 = 0$ που σημαίνει ότι το $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$.

ii) Αν ήταν $\rho = 0$ τότε από τη (2) θα είχαμε $-36 = 0$, άτοπο. Τότε διαιρώντας τα δύο μέλη της (2) με $\rho^2 \neq 0$ παίρνουμε διαδοχικά τα εξής:

$$2 + \frac{\lambda}{\rho} - \frac{36}{\rho^2} = 0 \Leftrightarrow -36 \cdot \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \lambda \cdot \frac{1}{\rho} + 2 = 0$$

Όμως η τελευταία σημαίνει ότι το $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$.

GI_A_ALG_4_5884

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α.** Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 5)
- β.** Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)
- γ.** Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:
 - i)** Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες. (Μονάδες 6)
 - ii)** Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa f(\kappa) \mu f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α. $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ οπότε $\Delta = (-6)^2 - 4(\lambda - 3) = 36 - 4\lambda + 12 = 48 - 4\lambda = 4(12 - \lambda)$

β. Πρέπει $\Delta > 0$ επομένως: $4(12 - \lambda) > 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda < 12}$

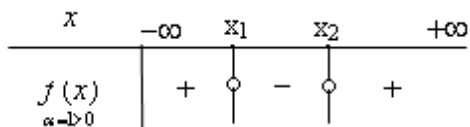
γ.

i) Αφού είναι $\lambda < 12$ έχουμε $\Delta > 0$. Υπολογίζουμε τα S, P .

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow S = -(-6) = 6 \text{ άρα } S > 0 \text{ και } P = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow P = \frac{\lambda-3}{1} = \lambda-3 \text{ άρα } P > 0 \text{ αφού είναι } \lambda > 3$$

Επομένως: $\Delta > 0$, $S > 0$ και $P > 0$ άρα το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

ii)



Επειδή $\kappa < 0$, $x_1 < \mu < x_2$ και x_1, x_2 θετικές είναι: $\kappa < 0 < x_1 < \mu < x_2$ (1)

Το πρόσημο του τριωνύμου $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$ είναι αρνητικό στο διάστημα εντός των ριζών και θετικό στα διαστήματα εκτός των ριζών καθώς $\alpha = 1 > 0$.

Επομένως $f(\mu) < 0$ και $f(\kappa) > 0$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε: $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu) > 0$

GI_A_ALG_4_6223

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0. \text{ (Μονάδες 9)}$$

ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$ (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α. Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (5\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 25\lambda^2 + 4 > 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

β.

i) Είναι $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = 5\lambda$ και $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -1$. Επομένως:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^2 &= 0 \Leftrightarrow (5\lambda)^2 - 18 - 7(-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 25\lambda^2 - 18 - 7 = 0 \Leftrightarrow 25\lambda^2 = 25 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1) \end{aligned}$$

ii) Για $\lambda = 1$ είναι $x_1 + x_2 = 5$ και $x_1 \cdot x_2 = -1$. Επομένως:

$$\begin{aligned} A &= x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_2) + 4 \\ &= (-1) \cdot 5 - 3 \cdot 5 + 4 = -5 - 15 + 4 = -16 \end{aligned}$$

GI_A_ALG_4_6226

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0, \text{ με } \lambda \in (0, 2)$$

α. Να βρείτε:

- i)** την περίμετρο Π του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)
- ii)** το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ . (Μονάδες 6)

β. Να αποδείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$. (Μονάδες 7)

γ. Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1;
Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

ΛΣΗ

α. Έχουμε το τριώνυμο $x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0$ με $\alpha = 1$, $\beta = -2$ και $\gamma = \lambda(2 - \lambda)$, οπότε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4 - 4\lambda(2 - \lambda) = 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 = 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0 \text{ και άρα}$$

έχει 2 πραγματικές ρίζες τις x_1, x_2 .

i) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2)$. Όμως, από τις σχέσεις **Vieta** παίρνουμε ότι

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = 2 \text{ και } x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda(2 - \lambda).$$

Επειδή x_1, x_2 είναι πλευρές ορθογωνίου παραλληλογράμμου πρέπει να είναι θετικές, δηλαδή: $x_1, x_2 > 0$, άρα και $x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow 2 > 0$, που ισχύει, και

$$x_1 x_2 > 0 \Rightarrow \lambda(2 - \lambda) > 0 \Rightarrow 2\lambda - \lambda^2 > 0 \Rightarrow -\lambda^2 + 2\lambda > 0$$

Θα λύσουμε την εξίσωση $-\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \text{ ή} \\ 2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \end{cases}$.

Όταν έχουμε ανίσωση 2^{ου} βαθμού κάνουμε πινακάκι:

λ	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$-\lambda^2 + 2\lambda$	-	0	+	-

Άρα $\lambda \in (0, 2)$ και συνεπώς είναι $\Pi = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 2 = 4$.

ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda(2 - \lambda)$, $\lambda \in (0, 2)$

β. Εργαζόμαστε με ισοδυναμίες:

$$E \leq 1 \Leftrightarrow \lambda(2 - \lambda) \leq 1 \Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0$$

Η τελευταία σχέση ισχύει, οπότε ισχύει και η ζητούμενη ανισότητα.

γ. Το εμβαδόν E γίνεται μέγιστο, όταν:

$$E = 1 \Leftrightarrow \lambda(2 - \lambda) = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Αλλά για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Η εξίσωση έχει λοιπόν μία διπλή ρίζα, δηλαδή είναι $x_1 = x_2 = 1$, που σημαίνει ότι οι πλευρές του ορθογωνίου είναι ίσες. Άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

GI_A_ALG_4_7263

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 6x + \lambda - 7$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)

β.

i) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S = x_1 + x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P = x_1 x_2$ των ριζών. (Μονάδες 2)

- ii)** Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ.

- i)** Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - 6|x| + \lambda = 7$ **(1)** έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 8)
- ii)** Έχει η εξίσωση **(1)** για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

α. Το τριώνυμο $x^2 - 6x + \lambda - 7, \lambda \in \mathbb{R}$, θα έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο $\Delta \geq 0$. Έχουμε:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0 \Leftrightarrow 36 - 4 \cdot (\lambda - 7) \geq 0 \Leftrightarrow 36 - 4\lambda + 28 \geq 0 \Leftrightarrow 4\lambda \leq 64 \Leftrightarrow \lambda \leq 16$$

β.

i) $S = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{6}{1} = 6, P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - 7}{1} = \lambda - 7$

- ii)** Αν $\lambda < 16 \Leftrightarrow \Delta > 0$ (σύμφωνα με το α' ερώτημα) οπότε το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

Αν $\lambda > 7 \Leftrightarrow P > 0$ οπότε το τριώνυμο έχει ρίζες ομόσημες.

Συνεπώς για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες.

Επειδή όμως $S = 6 > 0$, άρα οι ρίζες του τριωνύμου είναι θετικές.

γ.

i) $x^2 - 6|x| + \lambda = 7 \Leftrightarrow |x|^2 - 6|x| + \lambda - 7 = 0$ **(1)**

Θέτουμε $\omega = |x|$ και η **(1)** γίνεται: $\omega^2 - 6\omega + \lambda - 7 = 0$ **(2)**

Για να έχει η εξίσωση **(1)** τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες θα πρέπει η **(2)** να έχει 2 θετικές και άνισες ρίζες. Δηλαδή θα πρέπει (σύμφωνα και με τα προηγούμενα ερωτήματα) να ισχύει: $7 < \lambda < 16$.

Αν $7 < \lambda < 16$ τότε η **(1)** έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

- ii)** Αν $\lambda = 3\sqrt{10}$ η εξίσωση **(1)** έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες διότι:

$$49 < 90 < 256 \Leftrightarrow 7^2 < (3\sqrt{10})^2 < 16^2 \Leftrightarrow \sqrt{7^2} < \sqrt{(3\sqrt{10})^2} < \sqrt{16^2} \Leftrightarrow 7 < \lambda < 16.$$