

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



Επιμέλεια :
Παλαιολόγου Παύλος
Μαθηματικός



Αγαπητοί μαθητές,

αυτό το βιβλίο αποτελεί ένα σημαντικό βοήθημα για την Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου, που είναι ένα από τα σημαντικότερα μαθήματα, καθώς περιέχει γνώσεις απαραίτητες για την ύλη της Γ΄ Λυκείου.

Κάθε κεφάλαιο περιέχει :

- Βασική Θεωρία
- Μεθοδολογίες και σχόλια
- Λυμένα παραδείγματα
- Ασκήσεις όλων των επιπέδων δυσκολίας
- Θέματα από την τράπεζα της Β΄ Λυκείου του υπουργείου

Καλή μελέτη

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.1	ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.....	3
1.2	ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.....	22

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2.1	ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ - ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	31
2.2	ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ - ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ.....	50

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

3.1	ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ.....	62
3.2	ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ.....	70
3.3	ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1 ^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ.....	78
3.4	ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.....	89
3.5	ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.....	104
3.6	ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΓΩΝΙΩΝ.....	118
3.7	ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ 2α.....	120

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο : ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

4.1	ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ.....	131
4.2	ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ.....	135
4.3	ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ.....	145
4.4	ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ&ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ.....	151

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο : ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

5.1	ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.....	164
5.2	ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ.....	181
5.3	ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.....	187

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Η εξίσωση $ax + by = \gamma$, με $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$ ή $b \neq 0$, λέγεται **γραμμική εξίσωση**. Οι μεταβλητές x, y είναι οι άγνωστοι της εξίσωσης αυτής. Οι αριθμοί a, b λέγονται συντελεστές των αγνώστων της εξίσωσης ενώ το γ λέγεται σταθερός όρος της εξίσωσης. Κάθε ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) που έχει την ιδιότητα να επαληθεύει την εξίσωση $ax + by = \gamma$, δηλαδή να ισχύει $ax_0 + by_0 = \gamma$, λέγεται λύση της γραμμικής εξίσωσης. Άρα το ζεύγος (x_0, y_0) είναι λύση της γραμμικής εξίσωσης αν και μόνο αν οι αριθμοί x_0, y_0 επαληθεύουν την εξίσωση.

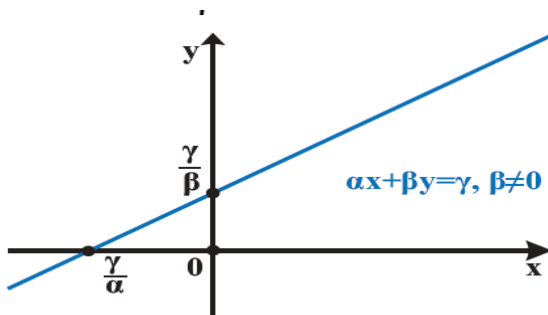
π.χ. αν έχω τη γραμμική εξίσωση : $3x - 2y = 8$ τότε το ζεύγος $(2, -1)$ λέγεται λύση της εξίσωσης γιατί την επαληθεύει : $3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 8 \Leftrightarrow 6 + 2 = 8$ που ισχύει.

Για την εξίσωση $ax + by = \gamma$ με $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

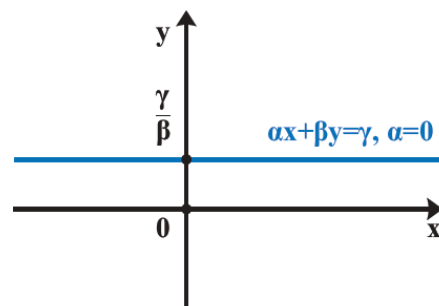
- Αν $b \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται : $ax + by = \gamma \Leftrightarrow by = -ax + \gamma \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{\gamma}{b}$

Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{a}{b}$

και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\frac{\gamma}{b}$.



Σχήμα α'



Σχήμα β'

Ειδικότερα :

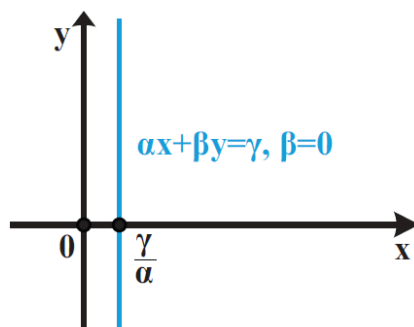
- ✓ Αν $a \neq 0$, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες (Σχ. α'), ενώ

- ✓ Αν $a = 0$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y = \frac{\gamma}{b}$ και επομένως

παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\frac{\gamma}{b}$ (Σχ. β').

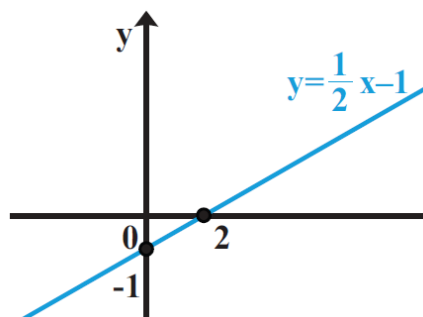
- Αν $b = 0$ (οπότε $a \neq 0$), τότε η εξίσωση γράφεται $ax = \gamma \Leftrightarrow x = \frac{\gamma}{a}$.

Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\frac{\gamma}{\alpha}$.

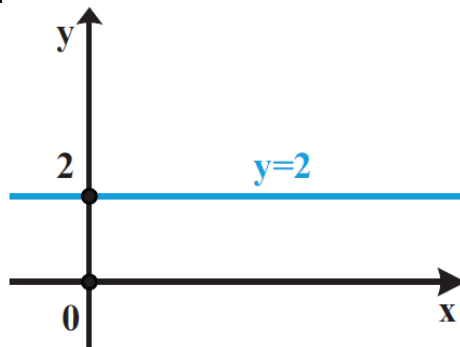


Για παράδειγμα :

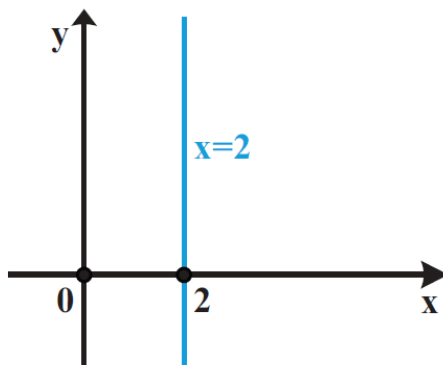
- ✓ Η εξίσωση $x - 2y = 2$ παίρνει τη μορφή $y = \frac{1}{2}x - 1$ η οποία παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{1}{2}$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο -1 .



- ✓ Η εξίσωση $y=2$ παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο 2.



- ✓ Η εξίσωση $x=2$ παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο 2.



Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει μία γραμμική εξίσωση λέγεται λύση της γραμμικής εξίσωσης.

Για παράδειγμα, το ζεύγος $(4, -1)$ είναι λύση της εξίσωσης $x - 2y = 6$, αφού $4 - 2(-1) = 4 + 2 = 6$. Διαπιστώνουμε, όμως, ότι και τα ζεύγη $(16, 5)$, $(-10, -8)$ είναι λύσεις της εξίσωσης και γενικά ότι κάθε ζεύγος της μορφής $\left(k, \frac{1}{2}k - 3\right)$, $k \in \mathbb{R}$ είναι λύση της εξίσωσης.

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ 2x2

Όταν ψάχνουμε τις κοινές λύσεις δυο γραμμικών εξισώσεων : $ax + by = \gamma$ και $a'x + b'y = \gamma'$ τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε γραμμικό σύστημα 2x2 :

$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$. Δηλαδή έχω 2 εξισώσεις και 2 αγνώστους. Για να λύσουμε ένα

γραμμικό σύστημα 2x2 διαλέγουμε έναν από τους παρακάτω τρόπους. Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος οδηγεί στο αποτέλεσμα είτε : το σύστημα έχει ακριβώς μια λύση, είτε είναι αδύνατο (καμία λύση), είτε είναι αόριστο (άπειρες λύσεις).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

ΒΗΜΑ 1 : Διαλέγω μια από τις 2 εξισώσεις, συνήθως αυτή που έχει τουλάχιστον έναν από τους δυο αγνώστους με συντελεστή 1, και λύνω ως προς τον άγνωστο αυτό.

ΒΗΜΑ 2 : Στη συνέχεια αντικαθιστώ αυτό που βρήκα στην άλλη και έτσι θα έχω δημιουργήσει μια εξίσωση με έναν μόνο άγνωστο την οποία και λύνω.

ΒΗΜΑ 3 : Αφού βρω τη λύση για τον έναν από τους δυο αγνώστους, αντικαθιστώ την τιμή του στην άλλη εξίσωση και βρίσκω τον άλλο άγνωστο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Να λύσετε τα σύστημα : i. $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x - 4y = 3 \\ 3x - 12y = 9 \end{cases}$ (1) (2)

Λύση :

i. **ΒΗΜΑ 1** : Έχω : $\begin{cases} 4x + 3y = 5, (1) \\ 2x + y = 1, (2) \end{cases}$, διαλέγω τη (2) γιατί αυτή έχει τον άγνωστο y με

συντελεστή 1. Άρα $2x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 2x, (1)$

ΒΗΜΑ 2 : Παίρνω την εξίσωση (1) και θα αντικαταστήσω όπου $y = 1 - 2x$, άρα :

$$4x + 3y = 5 \xrightarrow{y=1-2x} 4x + 3(1 - 2x) = 5 \Leftrightarrow 4x + 3 - 6x = 5 \Leftrightarrow 4x - 6x = 5 - 3 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\textbf{ΒΗΜΑ 3} : y = 1 - 2x \xrightarrow{x=-1} y = 1 - 2(-1) \Leftrightarrow y = 1 + 2 \Leftrightarrow y = 3$$

ii. (1) $\Leftrightarrow x = 4y + 3$, άρα (2) $\Leftrightarrow 3(4y + 3) - 12y = 9 \Leftrightarrow 12y + 9 - 12y = 9 \Leftrightarrow 0y = 0$, η οποία είναι αόριστη, επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Για να βρούμε τη μορφή των άπειρων λύσεων του συστήματος, λύνουμε μια εξίσωση ως προς έναν άγνωστο, π.χ. $x = 4y + 3$. Για $y = k$, όπου k τυχαίος αριθμός, είναι $x = 4k + 3$. Άρα κάθε ζεύγος της μορφής $(4k + 3, k)$, $k \in \mathbb{R}$.

(Θα μπορούσαμε να λύσουμε ως προς y δηλ. (1) $\Leftrightarrow x = 4y + 3 \Leftrightarrow y = \frac{x-3}{4}$ και για $x = k$

το σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $\left(k, \frac{k-3}{4}\right)$, $k \in \mathbb{R}$.)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΘΕΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

ΒΗΜΑ 1 : Δημιουργούμε αντίθετους συντελεστές σε έναν από τους δυο αγνώστους πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο αριθμό τα μέλη της μιας εξίσωσης ή και των δυο.

ΒΗΜΑ 2 : Προσθέτουμε κατά μέλη τις δυο εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν μόνο άγνωστο την οποία και λύνουμε ως προς τον άγνωστο αυτό.

ΒΗΜΑ 3 : Αφού βρω τη λύση για τον έναν από τους δυο αγνώστους, αντικαθιστώ την τιμή του σε οποία από τις 2 εξισώσεις θέλω και βρίσκω τον άλλο άγνωστο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

2. Να λύσετε το σύστημα :
$$\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 2x - 5y = -28 \end{cases}$$

Λύση :

ΒΗΜΑ 1 : Έχω :
$$\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 2x - 5y = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = -3 \\ 2x - 5y = -28 \cdot (-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = -3 \\ -6x + 15y = 84 \end{cases}$$

ΒΗΜΑ 2 : Προσθέτοντας κατά μέλη έχω : $13y = 78 \Leftrightarrow y = 6$

ΒΗΜΑ 3 : Πάω στην εξίσωση $3x - y = -3$ και θα βάλω όπου $y = 6$, άρα έχω :

$3x - 6 = -3 \Leftrightarrow 3x = 6 - 3 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$. Άρα η λύση του συστήματος είναι $(x, y) = (1, 6)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2x2

Καθεμία από τις εξισώσεις του συστήματος $\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$, παριστάνει μια ευθεία

γραμμή $(\varepsilon): ax + by = \gamma$ και $(\varepsilon'): a'x + b'y = \gamma'$ αντίστοιχα. Η λύση (x_0, y_0) του συστήματος είναι το κοινό ή τα κοινά σημεία των δυο ευθειών. Η γραφική επίλυση ενός συστήματος, ουσιαστικά είναι ο σχεδιασμός των δυο αυτών ευθειών σε ένα σύστημα συντεταγμένων και στην εύρεση των συντεταγμένων του κοινού τους σημείου. Για να σχεδιάσω μια ευθεία, χρειάζομαι δυο σημεία τα οποία θα ενώσω. Συνήθως διαλέγω τα σημεία τομής μιας ευθείας με τους άξονες. Για σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ βάζω $y=0$ στην εξίσωση και βρίσκω το αντίστοιχο x άρα το σημείο $A(x,0)$. Ενώ για σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ βάζω $x=0$ στην εξίσωση και βρίσκω το αντίστοιχο y άρα το σημείο $B(0,y)$.

ΒΗΜΑ 1 : Δίνω στα x, y διαδοχικά την τιμή 0 και βρίσκω τα σημεία τομής με τους άξονες $A(x,0)$ και $B(0,y)$

ΒΗΜΑ 2 : Σχεδιάζω ένα σύστημα συντεταγμένων και εντοπίζω τα σημεία τομής με τους άξονες $A(x,0)$ και $B(0,y)$, τα ενώνω και έτσι σχεδιάζω την εξίσωση της γραμμής $(\varepsilon): ax + by = \gamma$

ΒΗΜΑ 3 : Επαναλαμβάνω τη διαδικασία και σχεδιάζω την εξίσωση της γραμμής $(\varepsilon'): a'x + b'y = \gamma'$. Από το σχήμα βρίσκω τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους, που είναι και η λύση του συστήματος.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. Να λύσετε γραφικά το σύστημα : $\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

Λύση :

Έστω $(\varepsilon_1): x - y = -2$ και $(\varepsilon_2): 2x + y = 5$ οι ευθείες που παριστάνουν οι δυο εξισώσεις του παραπάνω συστήματος. Στην (ε_1)

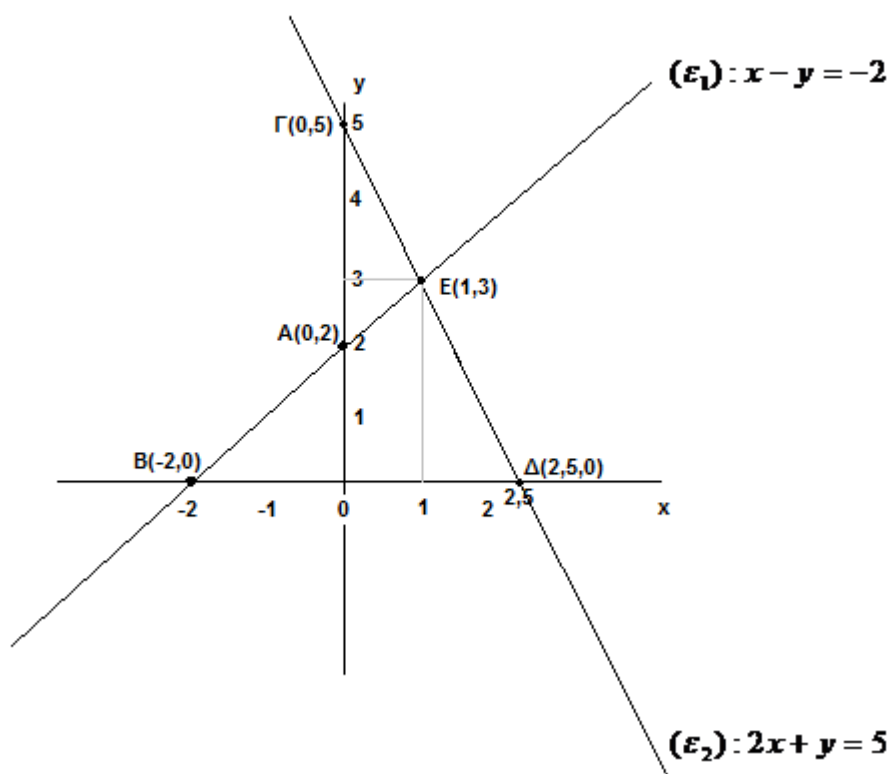
για $x = 0$ έχω $0 - y = -2 \Leftrightarrow y = 2$ άρα $A(0,2)$ σημείο τομής της (ε_1) με τον $y'y$

για $y = 0$ έχω $x - 0 = -2 \Leftrightarrow x = -2$ άρα $B(-2,0)$ σημείο τομής της (ε_1) με τον $x'x$

Ομοίως στην (ε_2)

για $x = 0$ έχω $2 \cdot 0 + y = 5 \Leftrightarrow y = 5$ άρα $\Gamma(0,5)$ σημείο τομής της (ε_2) με τον $y'y$

για $y = 0$ έχω $2x + 0 = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2,5$ άρα $\Delta(2,5,0)$ σημείο τομής της (ε_2) με τον $x'x$.



Παρατηρούμε από το σχήμα ότι οι δυο ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $E(1,3)$. Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = (1,3)$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

- i. Η εξίσωση $\frac{\alpha}{x} + \beta y = \gamma$ είναι γραμμική.
- ii. Η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ παριστάνει ευθεία.
- iii. Οι ευθείες $x=k$ και $y=\lambda$ είναι κάθετες.
- iv. Η ευθεία $x=k$ είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω εξισώσεις με **Σωστό**, αν παριστάνουν ευθεία ή ευθείες πάντοτε και με **Λάθος**, αν δεν παριστάνουν.

i. $|x-3y|=0$

ii. $ax + \beta y = \gamma$

iii. $\alpha x + (\alpha - 1)y = 2$

iv. $\lambda x + (\lambda^2 - \lambda)y = 5$

v. $\frac{y}{x-1} = 2$

vi. $x^2 - 2xy = -y^2$

vii. $y^2 - x^2 = 0$

viii. $x^2 - xy = 0$

ix. $x^2 + y^2 = 0$

6. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

Έστω (Σ) το σύστημα δυο γραμμικών εξισώσεων με δυο αγνώστους.

i. Αν οι ευθείες με εξισώσεις τις εξισώσεις του (Σ) τέμνονται, τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση.

ii. Αν το (Σ) έχει δυο λύσεις, τότε έχει άπειρες λύσεις.

iii. Αν το (Σ) είναι αδύνατο, τότε οι ευθείες με εξισώσεις τις εξισώσεις του (Σ) ταυτίζονται.

iv. Αν το (Σ) έχει ως λύση το ζεύγος (0,0), τότε οι σταθεροί όροι των εξισώσεων του (Σ) είναι μηδέν.

7. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

i. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(3,y)$, $y \in \mathbb{R}$ είναι η ευθεία

ii. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,2)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι η ευθεία

iii. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,x-2)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι η ευθεία

iv. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$ είναι ο άξονας

v. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι ο άξονας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Δίνεται η εξίσωση $(\alpha^2 - 2)x - |\beta - 1|y + 2 = 0$. Να βρείτε τις τιμές των α , β ώστε το ζεύγος (1,-1) να είναι λύση της εξίσωσης.

9. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε η εξίσωση $(|\lambda| - 1)x + (\lambda^2 - \lambda)y + 5 = 0$ να παριστάνει ευθεία.

➤ Γραφική επίλυση συστήματος

10. Να λύσετε γραφικά το σύστημα $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$

11. Να λύσετε γραφικά το σύστημα $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

12. Να λύσετε γραφικά το σύστημα $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$

➤ Αλγεβρική επίλυση συστήματος

13. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 7x - y = 13 \end{cases}$$

14. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 4x + 7y = -3 \end{cases}$$

15. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{x-2y}{2} - \frac{3y-1}{4} = -x+5 \\ 1-2x(y-1) = 3x-y(2x-1) \end{cases}$$

16. Να βρείτε τις τιμές των α και β , ώστε η εξίσωση $(\alpha-2\beta-1)x+(2\alpha-\beta-5)y+\alpha-1=0$ να παριστάνει ευθεία.

17. i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ , που διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,-1)$.
 ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη στην ευθεία ϵ .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

18. Να εξετάσετε, ποια από τα ζεύγη $(1,2)$, $(0,-3)$ και $(\alpha, 2\alpha-3)$ είναι λύσεις της εξίσωσης $2x-y=3$

19. i. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(\lambda+2)x+(\lambda-1)y+3=0$, παριστάνει ευθεία, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 ii. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε η εξίσωση $(\lambda^2-4)x+(\lambda-2)y+5=0$, να παριστάνει ευθεία.

20. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

i.
$$\begin{cases} y = x+1 \\ y = 2 \end{cases}$$
 ii.
$$\begin{cases} y = 2x \\ x - y = 3 \end{cases}$$
 iii.
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

21. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

i.
$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$
 ii.
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 2y = -2 \end{cases}$$

22. Να λύσετε με την μέθοδο της αντικατάστασης τα συστήματα:

i.
$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$$
 ii.
$$\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 9x - y = 4 \end{cases}$$
 iii.
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

23. Να λύσετε με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών τα συστήματα:

i.
$$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ -3x + 5y = -6 \end{cases}$$
 ii.
$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x + 2y = -2 \end{cases}$$
 iii.
$$\begin{cases} 3x - 5y = -2 \\ 4x - 7y = -3 \end{cases}$$

24. Να λύσετε τα συστήματα:

i.
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = \frac{5}{2} \end{cases}$$
 ii.
$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$
 iii.
$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$$

25. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i. } \begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-4y=3 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} 2x-y=4 \\ -x+\frac{y}{2}=-2 \end{cases}$$

26. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i. } \begin{cases} \frac{x}{2}-1=\frac{y}{4} \\ \frac{x-1}{2}-\frac{x-2y}{3}=\frac{4}{3} \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} x-2(x-y)=3-(2x-y) \\ y-x(1-2y)=1+2y(x-1) \end{cases}$$

27. Αν τα συστήματα: $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ και $\begin{cases} \alpha x+y=7\beta \\ 5x-\beta y=3\alpha \end{cases}$ έχουν κοινή λύση, να βρείτε τα α και β .

28. Να βρείτε τις τιμές των α και β , ώστε η εξίσωση $(\alpha-3\beta+1)x+(3\alpha-\beta-5)y+\beta-3=0$ να παριστάνει ευθεία.

29. Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών: $\epsilon_1: x-3y+1=0$ και $\epsilon_2: 2x-y-3=0$

30. Αν οι ευθείες $\epsilon_1: 2\alpha x+\beta y=\alpha+39$ και $\epsilon_2: x+(\alpha-\beta)y=\beta-2$ τέμνονται στο σημείο $A(5,3)$, να βρείτε τα α και β .

31. Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: 2x-y=-4$ και $\epsilon_2: x+2y=3$.

i. Να βρείτε το σημείο τομής A , των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2

ii. Να βρείτε την ευθεία ϵ , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο A .

32. i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ , που διέρχεται από τα σημεία $A(2,-3)$ και $B(-2,5)$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η , που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -1 και είναι παράλληλη στην ευθεία ϵ .

33. Να δείξετε ότι η εξίσωση $y^2-x^2=2x+1$ παριστάνει δυο ευθείες ϵ_1, ϵ_2 και να βρείτε το σημείο τομής τους.

34. Αν η εξίσωση $(\alpha-2\beta-1)x=2\alpha-\beta-5$ έχει άπειρες λύσεις, να βρείτε τις τιμές των α και β .

35. Αν ισχύει $x-2y+1+\lambda(x-y)=0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε τα x και y .

36. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=8x^3-4\alpha x^2-2\beta x+2\alpha-3\beta$ τέμνει τον άξονα των $x'x$ στο σημείο -1 και διέρχεται από το σημείο $A(-\frac{1}{2}, -20)$, να βρείτε τα α και β .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2x2 ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Έχουμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$. Θεωρούμε τους αριθμούς

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta \quad (\text{Ορίζουσα } D \text{ του συστήματος})$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta \quad (\text{Ορίζουσα } D_x: \text{ δεν έχει } x, \text{ δηλαδή αντικαθιστώ τους συντελεστές του } x \text{ με τους σταθερούς όρους})$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma \quad (\text{Ορίζουσα } D_y: \text{ δεν έχει } y, \text{ δηλαδή αντικαθιστώ τους συντελεστές του } y \text{ με τους σταθερούς όρους})$$

Για να λύσουμε ένα σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών : βρίσκουμε τις ορίζουσες των D , D_x , D_y και μετά :

- Αν $D \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) , όπου : $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$
- Αν $D = 0$ και $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο
- Αν $D = 0$ και $D_x = 0$ και $D_y = 0$, τότε το σύστημα είναι αόριστο, έχει δηλαδή άπειρες λύσεις.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

37. (Άσκηση 5 σελ. 21 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τα συστήματα με τη μέθοδο των οριζουσών :

$$\text{i. } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} 2y = 3x - 8 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

Λύση :

$$\text{i. } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

$$\text{Έχω : } D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 1 \cdot 3 = -10 - 3 = -13 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -35 - 4 = -39, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 21 = -13$$

$$\text{Άρα : } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-39}{-13} = 3, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-13}{-13} = 1, \text{ δηλ. το σύστημα έχει μοναδική λύση } (x, y) = (3, 1)$$

$$\text{ii. } \begin{cases} 2y = 3x - 8 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = -8 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$\text{Έχω : } D = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 2 = -11 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -24 + 2 = -22, \quad D_y = \begin{vmatrix} -3 & -8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11$$

$$\text{Άρα : } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-22}{-11} = 2, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{11}{-11} = -1, \text{ δηλ. το σύστημα έχει μοναδική λύση}$$

$$(x, y) = (2, -1)$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Για να λύσουμε ένα παραμετρικό σύστημα χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των οριζουσών. Συγκεκριμένα ακολουθούμε τα εξής βήματα :

ΒΗΜΑ 1 : Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D , D_x , D_y

ΒΗΜΑ 2 : Λύνουμε την εξίσωση $D = 0$

ΒΗΜΑ 3 : Διακρίνουμε την περίπτωση για την οποία ισχύει $D \neq 0$

ΒΗΜΑ 4 : Διακρίνουμε την περίπτωση για την οποία ισχύει $D = 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

38. (Άσκηση 8 σελ. 23 Β' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τα σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών :

$$\text{i. } \begin{cases} (\lambda - 1)x - 2y = 1 \\ 4x - (\lambda + 1)y = -2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{ii. } \begin{cases} (\mu - 2)x + 5y = 5 \\ x + (\mu + 2)y = 5 \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$

Λύση :

i. (Τα παραμετρικά συστήματα, λύνονται μόνο με τη μέθοδο των οριζουσών)

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x - 2y = 1 \\ 4x - (\lambda + 1)y = -2 \end{cases}$$

ΒΗΜΑ 1 :

$$D = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 4 & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + 1) + 8 = -(\lambda^2 - 1) + 8 = -\lambda^2 + 1 + 8 = 9 - \lambda^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = -(\lambda + 1) - (-2)(-2) = -\lambda - 1 - 4 = -\lambda - 5$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2(\lambda - 1) - 4 = -2\lambda + 2 - 4 = -2\lambda - 2$$

$$\text{ΒΗΜΑ 2 : } D = 0 \Leftrightarrow 9 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$$

ΒΗΜΑ 3 : Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 3, \lambda \neq -3$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-\lambda - 5}{9 - \lambda^2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2\lambda - 2}{9 - \lambda^2}$$

ΒΗΜΑ 4 : Αν $D = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$ τότε :

$$\bullet \text{ Αν } \lambda = 3 \text{ έχω : } \begin{cases} (3-1)x - 2y = 1 \\ 4x - (3+1)y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ 4x - 4y = -2 \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = -2 \\ 4x - 4y = -2 \end{cases} \text{ προσθέτοντας κατά μέλη έχω :}$$

$$0 = -4 \text{ άρα το σύστημα είναι αδύνατο.}$$

- Αν $\lambda = -3$ έχω : $\begin{cases} (-3-1)x - 2y = 1 \\ 4x - (-3+1)y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2y = 1 \\ 4x + 2y = -2 \end{cases}$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει $0 = -1$ άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

ii. $\begin{cases} (\mu-2)x + 5y = 5 \\ x + (\mu+2)y = 5 \end{cases}$

ΒΗΜΑ 1 :

$$D = \begin{vmatrix} \mu-2 & 5 \\ 1 & \mu+2 \end{vmatrix} = (\mu-2)(\mu+2) - 5 = \mu^2 - 4 - 5 = \mu^2 - 9$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & \mu+2 \end{vmatrix} = 5(\mu+2) - 25 = 5\mu + 10 - 25 = 5\mu - 15$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \mu-2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5(\mu-2) - 5 = 5\mu - 10 - 5 = 5\mu - 15$$

ΒΗΜΑ 2 : $D = 0 \Leftrightarrow \mu^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = 9 \Leftrightarrow \mu = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow \mu = \pm 3$

ΒΗΜΑ 3 : Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq 3, \mu \neq -3$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{5\mu-15}{\mu^2-9} = \frac{5(\mu-3)}{(\mu-3)(\mu+3)} = \frac{5}{\mu+3},$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{5\mu-15}{\mu^2-9} = \frac{5(\mu-3)}{(\mu-3)(\mu+3)} = \frac{5}{\mu+3}$$

ΒΗΜΑ 4 : Αν $D = 0 \Leftrightarrow \mu = \pm 3$ τότε :

- Αν $\mu = 3$ έχω : $\begin{cases} (3-2)x + 5y = 5 \\ x + (3+2)y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5y = 5 \\ x + 5y = 5 \end{cases} \cdot (-1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 5y = 5 \\ -x - 5y = -5 \end{cases} \text{ προσθέτοντας κατά μέλη έχω :}$$

$0 = 0$ άρα το σύστημα είναι αόριστο, έχει δηλαδή άπειρες λύσεις της μορφής $(5-5y, y)$ όπου y είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. (Για να βρω τις λύσεις διαλέγω μια από τις δυο εξισώσεις και λύνω ως προς έναν από τους δυο αγνώστους : $x + 5y = 5 \Leftrightarrow x = 5 - 5y$)

- Αν $\mu = -3$ έχω : $\begin{cases} (-3-2)x + 5y = 5 \\ x + (-3+2)y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 5y = 5 \\ x - y = 5 \end{cases} \cdot 5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 5y = 5 \\ 5x - 5y = 25 \end{cases} \text{ Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει } 0 = 30 \text{ άρα το σύστημα είναι αδύνατο.}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

39. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

Έστω το σύστημα $\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ \alpha'x + \beta'y = \gamma' \end{cases}$

i. Αν το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση, τότε $D=0$

- ii. Αν $D=0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.
- iii. Αν το σύστημα είναι αόριστο, τότε $D=0$.
- iv. Αν $D=0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο.

40. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

- Έστω ότι οι εξισώσεις του συστήματος $\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ \alpha'x + \beta'y = \gamma' \end{cases}$ (Σ) παριστάνουν τις ευθείες ε και ε' .
- i. Αν $D \neq 0$, τότε οι ευθείες ε , ε' τέμνονται.
 - ii. Αν οι ευθείες ε , ε' είναι παράλληλες, τότε $D=0$.
 - iii. Αν $D=0$, τότε οι ε , ε' δεν τέμνονται.
 - iv. Αν $D=0$, τότε οι ε , ε' είναι παράλληλες

41. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

Έστω το σύστημα $\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ \alpha'x + \beta'y = \gamma' \end{cases}$ (Σ)

- i. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, τότε $|D| > 0$
- ii. Αν $D^3 + D^2 - 3 = 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.
- iii. Αν το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση, τότε είναι αδύνατο.
- iv. Αν το σύστημα δεν έχει άπειρες λύσεις, τότε είναι αδύνατο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

42. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

i. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ ii. $\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix}$ iii. $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ iv. $\begin{vmatrix} 3\lambda - 2 & -\lambda^2 \\ -9 & 3\lambda + 2 \end{vmatrix}$

43. Να λύσετε την εξίσωση $\begin{vmatrix} 3x-1 & -2 \\ -1 & x \end{vmatrix} = 0$

44. Να λύσετε τα συστήματα με την μέθοδο των οριζουσών:

i. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -3x + 5y = -2 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x - 7y = 3 \\ 2x - 10y = -4 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ 16 + 5x = 2y \end{cases}$

45. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ x + \lambda y = \lambda + 2 \end{cases}$

46. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2x - 6y = 4 \\ x - 3y = \lambda - 1 \end{cases}$

47. Έστω το σύστημα $\begin{cases} 2x - y = \lambda - 1 \\ 7x - 4y = \lambda \end{cases}$

- i. Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) , για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε $2x_0 - y_0 < 1$

48. Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon: y = \lambda x - 2$ και $\eta: 4x + \lambda y - \lambda = 0$ τέμνονται για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

49. Να βρείτε το λ , ώστε οι ευθείες $\varepsilon: (\lambda - 1)x + \lambda y = \lambda$ και $\eta: x + \lambda y = 2$ να είναι παράλληλες.

50. Αν το σύστημα $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda^2 \\ x - \lambda y = 2 - \lambda \end{cases}$ (Σ) έχει άπειρες λύσεις, να δείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} 2\lambda x - y = \lambda \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$ (Σ') έχει μοναδική λύση.

51. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} (2-\sqrt{3})x + y = -1 \\ x + (2+\sqrt{3})y = -2-\sqrt{3} \end{cases}$ ii. $\begin{cases} (2-\sqrt{3})x + y = 1 \\ x + (2+\sqrt{3})y = 2 \end{cases}$

52. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} \lambda^2 x - 2y = \lambda \\ \lambda x - y = \lambda - 1 \end{cases}$

53. Για τις διάφορες τιμές του λ, να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} \lambda^2 x + y = \lambda \\ x + 4y = 2 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} (\lambda+1)x - y = \lambda+1 \\ x + (\lambda-1)y = 2 \end{cases}$

54. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ ώστε το σύστημα $\begin{cases} x + 2y = \lambda \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$

- i. Να έχει άπειρο πλήθος λύσεων.
ii. Να μην έχει καμία λύση.

55. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: x + \alpha y = 2$ και $\varepsilon_2: \alpha x + 9y = 2$ να τέμνονται.

56. Να βρείτε το α, ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + \alpha^2 y = 4$ και $\varepsilon_2: x + \alpha y = \alpha + 2$

- i. Να τέμνονται
ii. Να είναι παράλληλες

57. Να διερευνηθεί το σύστημα : $\begin{cases} \lambda x + 2y = \lambda + 2 \\ 2x + \lambda y = 4 \end{cases}$

58. Αν το σύστημα $\begin{cases} (\lambda-1)x + y = 2 \\ 3x + (\lambda+1)y = 4\lambda - 2 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις, να δείξετε ότι το : $\begin{cases} \lambda x + (2\lambda+1)y = 3 \\ 2x - (1-3\lambda)y = \lambda \end{cases}$ είναι αδύνατο.

59. Να λυθεί το σύστημα με ορίζουσες D, D_x, D_y για τις οποίες ισχύει : $D_x^2 + D_y^2 + D^2 - 12D_x + 8D_y - 4D + 56 = 0$.

60. Αν D είναι η ορίζουσα του συστήματος : (Σ) : $\begin{cases} (9+D)x + (8+D)y = 11 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$, τότε :

- i. να δείξετε ότι $D = -7$
ii. να λύσετε το σύστημα (Σ)

- iii. να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η λύση του συστήματος (Σ) να είναι και λύση του συστήματος
$$\begin{cases} (\alpha+1)x - 3\beta = 3 \\ 2\alpha x - (\beta+1)y = -4 \end{cases}$$

61. Δίνεται το σύστημα :
$$\begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ x + \lambda y = 2 - \lambda \end{cases}$$

- Να βρείτε τις ορίζουσες : D, D_x, D_y
- Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να είναι αδύνατο
- Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις
- Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση για την οποία ισχύει : $x_0 + y_0 > 1$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ 3x3

Για να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα 3x3, δηλαδή ενός συστήματος με 3 εξισώσεις και 3 αγνώστους, χρησιμοποιούμε τις ίδιες μεθόδους με αυτές που χρησιμοποιούμε για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2x2. Πιο συγκεκριμένα λύνουμε μια από τις 3 εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο της επιλογής μας, και στη συνέχεια αντικαθιστούμε την τιμή που βρήκαμε στις 2 άλλες εξισώσεις. Έτσι προκύπτει ένα σύστημα 2x2 το οποίο και λύνουμε όπως έχουμε μάθει. Επειδή η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 3x3 όπως είδαμε ανάγεται στην επίλυση γραμμικού συστήματος 2x2, προκύπτει ότι και ένα γραμμικό σύστημα 3x3 είτε έχει ακριβώς μια λύση, είτε είναι αδύνατο (καμία λύση), είτε είναι αόριστο (άπειρες λύσεις).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

62. (Άσκηση 8 σελ. 22 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

$$\begin{array}{lll} \text{i. } \begin{cases} 3x - 2y - \omega = 11 \\ 2x - 5y - 2\omega = 3 \\ 5x + y - 2\omega = 33 \end{cases} & \text{ii. } \begin{cases} 5x - y + 3\omega = 4 \\ x - 3y + \omega = 2 \\ 3x - 2y + 2\omega = 2 \end{cases} & \text{iii. } \begin{cases} x + \frac{y}{2} - 2\omega = 3 \\ \frac{3x}{2} + y + \omega = 5 \\ 5x + 3y - 2\omega = 16 \end{cases} \end{array}$$

Λύση :

$$\text{i. } \begin{cases} 3x - 2y - \omega = 11, (1) \\ 2x - 5y - 2\omega = 3, (2) \\ 5x + y - 2\omega = 33, (3) \end{cases} \text{ διαλέγω την (1) και θα λύσω ως προς } \omega. \text{ Δηλαδή :}$$

(1) : $3x - 2y - \omega = 11 \Leftrightarrow \omega = 3x - 2y - 11$. Αντικαθιστώ την τιμή του ω στις άλλες 2 και έχω :

$$\begin{cases} 2x - 5y - 2(3x - 2y - 11) = 3 \\ 5x + y - 2(3x - 2y - 11) = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y - 6x + 4y + 22 = 3 \\ 5x + y - 6x + 4y + 22 = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - y = -19 \\ -x + 5y = 11 \end{cases}$$

Προέκυψε δηλαδή σύστημα 2x2 άρα :
$$\begin{cases} -4x - y = -19 \\ -x + 5y = 11 \end{cases} \cdot 5 \Leftrightarrow \begin{cases} -20x - 5y = -95 \\ -x + 5y = 11 \end{cases}$$

Προσθέτω κατά μέλη και έχω : $-21x = -84 \Leftrightarrow x = 4$ και αντικαθιστώ στη :
 $-x + 5y = 11 \xrightarrow{x=4} -4 + 5y = 11 \Leftrightarrow 5y = 15 \Leftrightarrow y = 3$. Τέλος τα x, y που βρήκα τα
 αντικαθιστώ στην $\omega = 3x - 2y - 11 \xrightarrow{\substack{x=4 \\ y=3}} \omega = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 11 \Leftrightarrow \omega = -5$. Άρα
 $(x, y, \omega) = (4, 3, -5)$

ii.
$$\begin{cases} 5x - y + 3\omega = 4, (1) \\ x - 3y + \omega = 2, (2) \\ 3x - 2y + 2\omega = 2, (3) \end{cases}$$
 διαλέγω την (1) και θα λύσω ως προς y . Δηλαδή :

(1) : $5x - y + 3\omega = 4 \Leftrightarrow y = 5x + 3\omega - 4$. Αντικαθιστώ την τιμή του y στις άλλες 2 και έχω :

$$\begin{cases} x - 3(5x + 3\omega - 4) + \omega = 2 \\ 3x - 2(5x + 3\omega - 4) + 2\omega = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 15x - 9\omega + 12 + \omega = 2 \\ 3x - 10x - 6\omega + 8 + 2\omega = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14x - 8\omega = -10 \\ -7x - 4\omega = -6 \end{cases}$$

Προέκυψε δηλαδή σύστημα 2×2 άρα :

$$\begin{cases} -14x - 8\omega = -10 \\ -7x - 4\omega = -6 \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} -14x - 8\omega = -10 \\ 14x + 8\omega = 12 \end{cases}$$

Προσθέτω κατά μέλη και έχω : $0 = 2$. Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

iii.
$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} - 2\omega = 3 \\ \frac{3x}{2} + y + \omega = 5 \\ 5x + 3y - 2\omega = 16 \end{cases} \xrightarrow[\text{παρανομαστών}]{\text{Απαλειφή}} \begin{cases} 2x + 2 \cdot \frac{y}{2} - 2 \cdot 2\omega = 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot \frac{3x}{2} + 2y + 2\omega = 2 \cdot 5 \\ 5x + 3y - 2\omega = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 4\omega = 6, (1) \\ 3x + 2y + 2\omega = 10, (2) \\ 5x + 3y - 2\omega = 16, (3) \end{cases}$$

διαλέγω την (1) και θα λύσω ως προς y . Δηλαδή :

(1) : $2x + y - 4\omega = 6 \Leftrightarrow y = -2x + 4\omega + 6$. Αντικαθιστώ την τιμή του y στις άλλες 2 και έχω :

$$\begin{cases} 3x + 2(-2x + 4\omega + 6) + 2\omega = 10 \\ 5x + 3(-2x + 4\omega + 6) - 2\omega = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4x + 8\omega + 12 + 2\omega = 10 \\ 5x - 6x + 12\omega + 18 - 2\omega = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 10\omega = -2 \\ -x + 10\omega = -2 \end{cases}$$

Προέκυψε δηλαδή σύστημα 2×2 άρα : $\begin{cases} -x + 10\omega = -2 \\ -x + 10\omega = -2 \end{cases} \cdot (-1) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 10\omega = -2 \\ x + 10\omega = 2 \end{cases}$

Προσθέτω κατά μέλη και έχω : $0 = 0$. Άρα το σύστημα είναι αόριστο, δηλαδή έχει

άπειρες λύσεις. Έχω $\begin{cases} 2x + y - 4\omega = 6, (1) \\ -x + 10\omega = -2, (2) \\ -x + 10\omega = -2, (3) \end{cases}$, παρατηρώ δηλαδή ότι οι (2) και (3)

ταυτίζονται άρα : $\begin{cases} 2x + y - 4\omega = 6 \\ -x + 10\omega = -2 \end{cases}$. Από τη (2) έχω : $x = 10\omega + 2$, αντικαθιστούμε το

x στην (1) και έχω : $2x + y - 4\omega = 6 \Leftrightarrow 2(10\omega + 2) + y - 4\omega = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 20\omega + 4 + y - 4\omega = 6 \Leftrightarrow y = 2 - 16\omega$. Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής : $(x, y, z) = (10\kappa + 2, 2 - 16\kappa, \kappa)$ όπου $\kappa \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

63. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 2x - y + w = -5 \\ y + 3w = 7 \\ w = 2 \end{cases}$$

64. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 2x - y + 3w = 4 \\ 3x + 2y - w = -7 \\ x - 3y + 2w = 1 \end{cases}$$

65. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 2x + 3y - 7w = 0 \\ 3x - y - 5w = 0 \\ 5x + 2y - 12w = 0 \end{cases}$$

66. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x - 2y + w = 1 \\ 2x - y - 3w = 2 \\ 3x - 3y - 2w = 4 \end{cases}$$

67. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x - y - 2w = 4 \\ 2x - 3y + w = 2 \\ x - 2y + 3w = -2 \end{cases}$$

68. Θεωρούμε το 2×2 γραμμικό σύστημα (Σ) με αγνώστους x, y . Για τις ορίζουσες

D, D_x, D_y ισχύουν τα εξής :
$$\begin{cases} 2D_x - 3D + D_y = -1 \\ D_x + 2D - 2D_y = 8 \\ 3D_x - 8D + 3D_y = -8 \end{cases}$$
 . Να βρείτε τα x, y .

69. Να λύσετε τα συστήματα:

i.
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

ii.
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 4x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

iii.
$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ 3x - z = 4 \end{cases}$$

iv.
$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y - 2z = -2 \\ 3x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

70. Να λύσετε τα συστήματα:

i.
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y - z = -2 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

ii.
$$\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y - z = 0 \\ x - 3y + 2z = -2 \end{cases}$$

iii.
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

iv.
$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

71. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i. } \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ x-3y+2z=0 \end{cases}$$

$$\text{ii. } \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΤΕΧΝΑΣΜΑΤΑ

Ορισμένα συστήματα, αν και δεν είναι γραμμικά, μπορούν με κατάλληλο τέχνασμα να μετατραπούν σε γραμμικά. Ένα τέτοιο τέχνασμα συνήθως είναι η αντικατάσταση. Αντικαθιστούμε κάποιον ή κάποιους όρους του συστήματος που βρίσκονται και στις δυο εξισώσεις, με έναν νέο άγνωστο και έτσι οδηγούμαστε σε ένα νέο σύστημα που είναι όμως γραμμικό. Λύνουμε το νέο σύστημα και στη συνέχεια, επιστρέφοντας στις αρχικές σχέσεις, βρίσκουμε τις λύσεις του αρχικού συστήματος. Σε άλλες περιπτώσεις μπορούμε να προσθέσουμε όλες ή μερικές από τις εξισώσεις του συστήματος και με αντικατάσταση να βρούμε ευκολότερα τη λύση του δοσμένου συστήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

$$72. \text{ Να λύσετε τα συστήματα : } \text{i. } (\Sigma): \begin{cases} x+y=4 \\ y+w=-1 \\ w+x=1 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} x+y=1 \\ y+w=0 \\ w+x=5 \end{cases} \quad \text{iii. } \begin{cases} x+y=5 \\ y+w=2 \\ x+w=-1 \end{cases}$$

$$73. \text{ Να λύσετε τα συστήματα : } \text{i. } \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{7}{y} = -2 \\ \frac{8}{x} - \frac{9}{y} = 17 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{2}{y} = -2 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 9 \end{cases}$$

$$74. \text{ Να λύσετε τα συστήματα : } \text{i. } \begin{cases} \frac{3}{x-2y} - \frac{5}{2x-y} = 2 \\ \frac{4}{x-2y} + \frac{15}{2x-y} = 7 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} \frac{3}{2x-y+1} - \frac{2}{x-3y+4} = \frac{13}{6} \\ \frac{2}{2x-y+1} - \frac{4}{x-3y+4} = \frac{7}{6} \end{cases}$$

$$75. \text{ Να λύσετε τα συστήματα : } \text{i. } \begin{cases} 3|x|-4|y|=-6 \\ 4|x|+|y|=11 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} 3|x|+4|y-2|=5 \\ 5|x|+9|y-2|=13 \end{cases}$$

$$\text{iii. } \begin{cases} 4|x-1|-3|y+1|=3 \\ 5|x-1|-4|y+1|=-1 \end{cases} \quad \text{iv. } \begin{cases} |2x-1|-|3y-2|=2 \\ |1-2x|-|6y-4|=1 \end{cases} \quad \text{v. } \begin{cases} |x+y|=2 \\ \sqrt{4x^2-4xy+y^2}=1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} \text{vi.} \begin{cases} |x-y|=|2x-y-1| \\ x^2-2xy+1=0 \end{cases} & \text{vii.} \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2 \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=4 \\ \frac{1}{\omega}+\frac{1}{x}=8 \end{cases} & \text{viii.} \begin{cases} \frac{1}{x+2y-3}+\frac{1}{3x-2y+1}=\frac{5}{12} \\ \frac{1}{x+2y-3}-\frac{1}{3x-2y+1}=\frac{1}{12} \end{cases} \end{array}$$

76. Δίνονται οι αριθμοί α, β και γ με : $3\alpha - \beta - \gamma = 0$ και $\alpha - 2\beta + 3\gamma = 0$. Να εκφράσετε τα α, β ως συνάρτηση του γ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι : $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\gamma - \beta + 6\gamma \geq -1$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Για τη λύση προβλημάτων, που ανάγονται σε συστήματα με δυο ή περισσότερους αγνώστους, αρχικά σχηματίζουμε τις αξιώσεις από τα δεδομένα του προβλήματος και σχηματίζουμε το σύστημα που προκύπτει. Θέτουμε περιορισμούς για τους αγνώστους εφόσον είναι απαραίτητο και στη συνέχεια λύνουμε το παραπάνω σύστημα. Τέλος επαληθεύουμε τις λύσεις που έχουμε βρει με τους περιορισμούς που έχουμε θέσει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

77. Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια αργότερα, θα βασίλευε το μισό της ζωής του, ενώ αν πέθαινε 9 χρόνια νωρίτερα, θα βασίλευε το $\frac{1}{8}$ της ζωής του. Να βρεθεί πόσα χρόνια έζησε και πόσα χρόνια βασίλευε ο Μέγας Αλέξανδρος.

78. Ένας μαθητής απάντησε σε ένα τεστ με 20 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση έπαιρνε 4 μονάδες, ενώ για κάθε λανθασμένη του αφαιρούνταν δυο μονάδες. Αν συνολικά συγκέντρωσε 50 μονάδες, σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά και σε πόσες λανθασμένα;

79. Ένα ξενοδοχείο έχει 30 δωμάτια, δίκλινα και τρίκλινα, και μπορεί να φιλοξενήσει μέχρι και 80 άτομα. Πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια;

80. Σε μια εκδήλωση ο αριθμός των γυναικών που συμμετέχουν είναι διπλάσιος από τον αριθμό των ανδρών. Μια ώρα μετά την έναρξη της εκδήλωσης αποχωρούν δέκα ζευγάρια. Ο αριθμός των ανδρών που απομένουν είναι ίσος με τα $\frac{4}{9}$ του αριθμού των γυναικών που απομένουν. Να βρείτε τον αριθμό των ανδρών και των γυναικών που συμμετείχαν αρχικά στην εκδήλωση.

81. Ο Δημήτρης, ο Γιώργος και ο Ανέστης θέλουν να αγοράσουν με τα χρήματα τους ένα δώρο για τη Μαριάννα. Τα χρήματα του Δημήτρη και του Γιώργου μαζί είναι κατά 20€ περισσότερα από τα χρήματα του Ανέστη. Τα χρήματα του Γιώργου και του Ανέστη είναι κατά 60€ περισσότερα από τα χρήματα του Δημήτρη και τέλος τα χρήματα του Δημήτρη και του Ανέστη είναι κατά 40€ περισσότερα από τα χρήματα του Γιώργου. Πόσα χρήματα έχει ο καθένας; Πόσο κοστίζει το δώρο της Μαριάννας;

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

81. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (4\lambda + \mu)x + \lambda + 2\mu$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3. Επίσης η κορυφή της C_f έχει τετμημένη 1.

- i. Να δείξετε ότι : $\lambda = -1, \mu = 2$.
- ii. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) + f(x-2) \leq 8$.

82. Δίνεται το σύστημα :
$$\begin{cases} 2x - y = 3\lambda - 3 \\ x + y = -\lambda^2 + 2\lambda \end{cases}$$

- i. Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii. Αν (x_0, y_0) είναι η μοναδική λύση του συστήματος, να βρείτε για ποια τιμή του λ η παράσταση $5x_0 - y_0$ γίνεται μέγιστη.

83. Δίνεται το σύστημα :
$$\begin{cases} (\lambda - 1)x + \lambda y = -2 \\ \lambda x + (\lambda - 1)y = \lambda - 1 \end{cases}$$
 το οποίο έχει ορίζουσα D. Επίσης η εξίσωση : $x^2 - (D + 5)x + 4(D + 1) = 0$ έχει διπλή ρίζα.

- i. Να βρείτε την ορίζουσα D και τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.
- ii. Να λύσετε το σύστημα.

84. Η εξίσωση $x^2 + (\lambda + \mu)x + \mu - \nu = 0$ έχει ρίζες τις x_1, x_2 . Ισχύουν οι σχέσεις : $x_1 + x_2 = -3, x_1 x_2 = -2$ και $x_1^2 + x_2^2 = -3\lambda + \mu + \nu$. Να βρείτε τους αριθμούς λ, μ, ν .

85. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα
$$\begin{cases} (\lambda + 1)x - y = -\lambda \\ -4x + (\lambda + 1)y = \lambda + 1 \end{cases}$$
 έχει μοναδική λύση το ζεύγος (x_0, y_0) για το οποίο ισχύει $y_0^2 - 2x_0 = 1$.

86. Ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων, με αγνώστους x και y , έχει μοναδική λύση και ισχύει : $5D_x + 4D_y = 7D$ και $4D_x + 5D_y = 2D$ όπου D_x, D_y, D οι αντίστοιχες ορίζουσες του συστήματος. Να βρείτε τη μοναδική λύση του συστήματος.

1.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Για την επίλυση των μη γραμμικών συστημάτων συνήθως χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης. Λύνουμε δηλαδή τη φαινομενικά πιο «εύκολη» από τις δυο εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο, και αντικαθιστούμε την τιμή που βρήκαμε στην άλλη. Τα παρακάτω λυμένα παραδείγματα θα μας βοηθήσουν να καταλάβουμε καλύτερα τον τρόπο λύσης τους.

Προσοχή : επειδή το σχολικό βιβλίο αναφέρεται σε γεωμετρική ερμηνεία των εξισώσεων καλό θα είναι να γνωρίζουμε ότι εξισώσεις της μορφής :

- $ax + by = \gamma$ παριστάνουν ευθεία
- $x^2 + y^2 = \rho^2$ παριστάνουν κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ
- $y = ax^2$ ή $x = ay^2$ παριστάνουν παραβολή
- $y = \frac{a}{x}$ ή $x = \frac{a}{y}$ παριστάνουν υπερβολή.

Λεπτομέρειες για τα παραπάνω θα διδαχτούμε στα μαθηματικά προσανατολισμού της Β' Λυκείου.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 27 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Λύση :

$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3, (1) \\ x + y = 1, (2) \end{cases}$ διαλέγω τη φαινομενικά πιο «εύκολη» (2) : $x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$

και λύνω ως προς y . Στη συνέχεια αντικαθιστώ στην (1) την τιμή του x που βρήκα και

έχω: (1) : $x^2 + y^2 + xy = 3 \xrightarrow{y=1-x} x^2 + (1-x)^2 + x(1-x) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x + x^2 + x - x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = -2$ $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ή} \\ x = -1 \end{cases}$$

• Αν $x = 2$ τότε λόγω της (2) : $y = 1 - x \xrightarrow{x=2} y = -1$ άρα $(x, y) = (2, -1)$

• Αν $x = -1$ τότε λόγω της (2) : $y = 1 - x \xrightarrow{x=-1} y = 2$ άρα $(x, y) = (-1, 2)$

2. (Άσκηση 2 σελ. 27 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τα συστήματα :

$$\text{i. } \begin{cases} y = 3x^2 \\ 12x - 3y = 4 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{iii. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

Λύση :

$$\text{i. } \begin{cases} y = 3x^2, (1) \\ 12x - 3y = 4, (2) \end{cases}, \text{ Η (2) λόγω της (1) γίνεται : } (2): 12x - 3y = 4 \xrightarrow{y=3x^2} 12x - 3 \cdot 3x^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$12x - 9x^2 = 4 \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 = 0 \quad \Delta = 0 \quad x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$$\bullet \text{ Αν } x = \frac{2}{3} \text{ τότε λόγω της (1): } y = 3x^2 \xrightarrow{x=\frac{2}{3}} y = 3 \cdot \frac{4}{9} \Leftrightarrow y = \frac{4}{3} \text{ άρα } (x, y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

Γεωμετρικά η (1): $y = 3x^2$ παριστάνει παραβολή, ενώ η (2): $12x - 3y = 4$ παριστάνει ευθεία. Το σύστημα τους έχει μόνο μια λύση, αυτό σημαίνει ότι η παραβολή και η ευθεία έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $A\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$, δηλαδή η ευθεία εφάπτεται στην

παραβολή στο σημείο $A\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

$$\text{ii. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, (1) \\ x - y = 0, (2) \end{cases}, \text{ Έχω (2): } x - y = 0 \Leftrightarrow y = x. \text{ Άρα η (1) λόγω της (2) γίνεται :}$$

$$(1): x^2 + y^2 = 9 \xrightarrow{y=x} x^2 + x^2 = 9 \Leftrightarrow 2x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{9}{2}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\bullet \text{ Αν } x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ τότε λόγω της (2): } y = x \Leftrightarrow y = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ άρα } (x, y) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\bullet \text{ Αν } x = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ τότε λόγω της (2): } y = x \Leftrightarrow y = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ άρα } (x, y) = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$$

Γεωμετρικά η (1): $x^2 + y^2 = 9$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=3$, ενώ η (2): $x - y = 0$ παριστάνει ευθεία. Το σύστημα τους έχει 2 λύσεις, αυτό σημαίνει ότι

ο κύκλος και η ευθεία έχουν δυο κοινά σημεία $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ και $B\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

δηλαδή η ευθεία τέμνει τον κύκλο στα σημεία $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ και $B\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$\text{iii. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, (1) \\ xy = 2, (2) \end{cases} \text{ Έχω (2): } xy = 2 \xrightarrow{x \neq 0} y = \frac{2}{x}. \text{ Άρα η (1) λόγω της (2) γίνεται :}$$

$$(1): x^2 + y^2 = 5 \xrightarrow{y=\frac{2}{x}} x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \xrightarrow{\cdot x^2} x^4 + 4 = 5x^2 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι «διτετράγωνη» οπότε θέτω $x^2 = \omega \geq 0$ άρα γίνεται :

$$\omega^2 - 5\omega + 4 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1 \quad \text{ή} \quad \omega = 4 \quad \text{δεκτές.}$$

➤ Αν $\omega = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

- Αν $x = 1$ τότε λόγο της (2): $y = \frac{2}{x} \Leftrightarrow y = 2$ άρα $(x, y) = (1, 2)$

- Αν $x = -1$ τότε λόγο της (2): $y = \frac{2}{x} \Leftrightarrow y = -2$ άρα $(x, y) = (-1, -2)$

➤ Αν $\omega = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

- Αν $x = 2$ τότε λόγο της (2): $y = \frac{2}{x} \Leftrightarrow y = 1$ άρα $(x, y) = (2, 1)$

- Αν $x = -2$ τότε λόγο της (2): $y = \frac{2}{x} \Leftrightarrow y = -1$ άρα $(x, y) = (-2, -1)$

Γεωμετρικά η (1): $x^2 + y^2 = 5$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$,

ενώ η (2): $y = \frac{2}{x}$ παριστάνει υπερβολή. Το σύστημα τους έχει 4 λύσεις, αυτό

σημαίνει ότι ο κύκλος και η υπερβολή έχουν 4 κοινά σημεία $A(1,2)$, $B(-1,-2)$, $\Gamma(2,1)$ και $\Delta(-2,-1)$ δηλαδή ο κύκλος και η υπερβολή τέμνονται στα σημεία $A(1,2)$, $B(-1,-2)$, $\Gamma(2,1)$ και $\Delta(-2,-1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

3. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x^2 - 2xy - y^2 = 7 \end{cases}$$

4. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ xy = -2 \end{cases}$$

5. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y = 3 \\ x^2 + y^2 - x = 3 \end{cases}$$

6. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

7. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$$

i. Αλγεβρικά ii. Γραφικά

8. Να λύσετε τα συστήματα:

i.
$$\begin{cases} x - y = -2 \\ 4x - y^2 + 5 = 0 \end{cases}$$

ii.
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + xy = 60 \end{cases}$$

iii.
$$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x^2 - xy = 6 \end{cases}$$

9. Να λύσετε αλγεβρικά και γραφικά τα συστήματα:

i.
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases}$$

ii.
$$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -2 \end{cases}$$

iii.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = -4 \end{cases}$$

10. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} y = 2x^2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

11. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} y = 2x^2 \\ x + y = 3 \end{cases}$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα.

12. Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής $y=3x^2$ και της ευθείας $y=2x+1$

13. Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής $y=2x^2$ και της υπερβολής $y = \frac{27}{4x}$

14. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i. } \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} 5x^2 - y^2 = 19 \\ xy = 2 \end{cases}$$

15. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y = -1 \\ 2x^2 + 2y^2 + 3x - 3y = 1 \end{cases}$

16. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i. } \begin{cases} 5\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 3 \\ 25x - 9y = 81 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{13}{6} \\ xy = 5 \end{cases} \quad \text{iii. } \begin{cases} x + xy + y = 5 \\ x^2y + xy^2 = 6 \end{cases} \quad \text{iv. } \begin{cases} \sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x-2y}} = 2 \\ x^2 - 4xy + 12y = 8 \end{cases}$$

17. Να λύσετε τα συστήματα : (Μετατροπή μη γραμμικού συστήματος σε γραμμικό με αντικατάσταση)

$$\text{i. } \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = -2 \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 11 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -5 \\ \frac{2}{x} + \frac{6}{y} = 1 \end{cases} \quad \text{iii. } \begin{cases} \frac{4}{x-2} + \frac{6}{2y-5} = 1 \\ \frac{8}{2-x} - \frac{3}{5-2y} = 3 \end{cases} \quad \text{iv. } \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{8}{y} = -1 \\ \frac{3y+2x}{xy} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

18. Να λύσετε τα συστήματα :

$$\text{i. } \begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} x^3 - y^3 = 19 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{iii. } \begin{cases} \sqrt{2x-y} - \sqrt{x+y} = 1 \\ x + y + \sqrt{2x-y} = 3 \end{cases} \quad \text{iv. } \begin{cases} 5\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 3 \\ 25x - 9y = 81 \end{cases}$$

$$\text{v. } \begin{cases} x^2 - 9x = y^2 - 9y \\ xy = 18 \end{cases} \quad \text{vi. } \begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{y-3} = 5 \\ \sqrt{2x+1} - \sqrt{4y-12} = -1 \end{cases} \quad \text{vii. } \begin{cases} xy = -8 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

19. Η παραβολή με εξίσωση : $y = x^2 + (\lambda - \mu)x - 3\mu - 5\lambda$ έχει κορυφή το σημείο Κ(2,8).

- Να δείξετε ότι $\lambda = -3, \mu = 1$.
- Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραπάνω παραβολής και της ευθείας $(\varepsilon) : -x + y = 8$.

20. Δίνεται η ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): y = \lambda x - 2$ και η παραβολή $(C): y = 2x^2$. Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία να έχει με την παραβολή :

- i. Ένα κοινό σημείο,
- ii. δύο κοινά σημεία,
- iii. κανένα κοινό σημείο.

21. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $(C): x^2 + y^2 = 1$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x + \lambda$.

- i. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ο κύκλος και η ευθεία :
 - έχουν δύο κοινά σημεία,
 - έχουν ένα κοινό σημείο,
 - δεν έχουν κοινά σημεία.
- ii. Για $\lambda = \sqrt{5}$ να βρείτε :
 - τις συντεταγμένες του κοινού σημείου ,
 - το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζει η ευθεία (ε) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
 - το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από την ευθεία (ε) , τον κύκλο (C) και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

22. Δίνεται υπερβολή με εξίσωση $(C): y = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$ η οποία διέρχεται από το σημείο :

$M\left(\alpha - 4, 2\alpha - \frac{\alpha^2}{4}\right)$. Θεωρούμε επίσης ευθεία (ε) , η οποία διέρχεται από το σημείο $N(1, -2)$

και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω για την οποία ισχύει : $|\varepsilon\phi\omega - 3| = 3\varepsilon\phi\omega - 5$.

- i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 6$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) έχει εξίσωση $(\varepsilon): 2x - y = 4$.
- iii. Να βρείτε τα κοινά σημεία της υπερβολής C και της ευθείας ε .
- iv. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε και την υπερβολή C στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΟ 1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ §1.1****ΘΕΜΑ 2ο****ΘΕΜΑ 2 – 16950**

- α) Να κατασκευάσετε ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους με συντελεστές διάφορους του μηδενός, το οποίο να είναι αδύνατο. (Μονάδες 10)
- β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις του συστήματος που ορίσατε στο α) ερώτημα και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 – 16954

Δίνεται η εξίσωση: $8x + 2y = 7$ (1)

- α) Να γράψετε μια άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1). (Μονάδες 10)
- β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο. (Μονάδες 15)

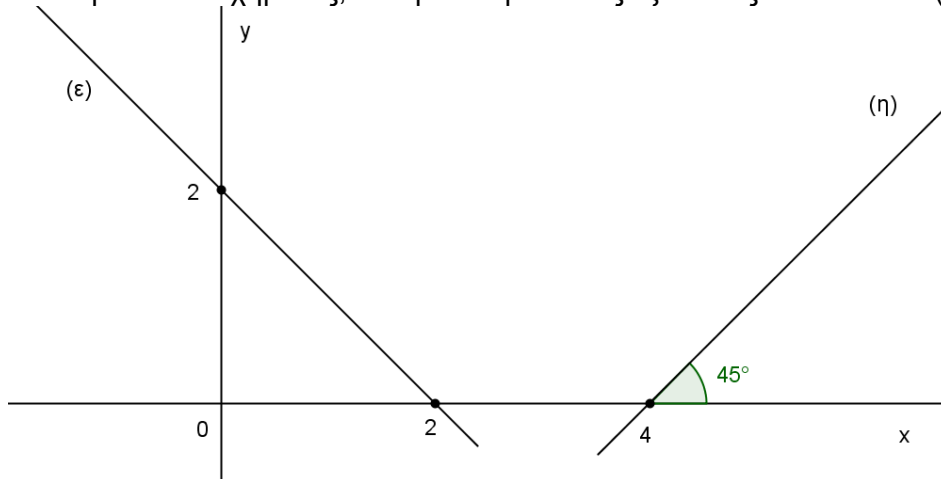
ΘΕΜΑ 2 – 16957

Δύο φίλοι, ο Μάρκος και ο Βασίλης, έχουν άθροισμα ηλικιών 27 χρόνια, και ο Μάρκος είναι μεγαλύτερος από το Βασίλη.

- α) Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)
- β) Δίνεται επιπλέον η πληροφορία ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι 5 χρόνια. Να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 – 16960

- α) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να προσδιορίσετε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) και (η).



- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.

(Μονάδες 12)
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 17647

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ \alpha x + \beta y = \gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

- α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(2, -3)$ (Μονάδες 13)
- β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 – 17650

Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος x cm , πλάτος y cm , περίμετρο ίση με 38cm και με την ακόλουθη ιδιότητα:

Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 2 cm και μειώσουμε το πλάτος του κατά 4 cm , θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του αρχικού.

- α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. (Μονάδες 10)
β) Να βρείτε τις τιμές των διαστάσεων x, y του ορθογωνίου. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 – 17651

Στο δημοτικό parking μιας επαρχιακής πόλης στις 10 το πρωί, το σύνολο των δίκυκλων και τετράτροχων οχημάτων που έχουν παρκάρει είναι 830 και το πλήθος των τροχών τους 2.700.

- α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. (Μονάδες 13)
β) Να βρείτε τον αριθμό των δίκυκλων καθώς και τον αριθμό των τετράτροχων οχημάτων. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 – 17683

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + 2y = 3 \\ 4x + (\lambda - 1)y = -6 \end{cases}$$
 με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Αν $\lambda = -3$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Να βρείτε μια λύση. (Μονάδες 8)
β) Αν $\lambda = 3$, να δείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο. (Μονάδες 8)
γ) Αν $\lambda = 0$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 – 17703

Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις: $(\varepsilon_1): 2x - y = -1$, $(\varepsilon_2): (\lambda - 1)x - y = 6$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να είναι παράλληλες. (Μονάδες 8)
β) Να παραστήσετε γραφικά τις (ε_1) και (ε_2) , για $\lambda = 3$. (Μονάδες 8)
γ) Υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να ταυτίζονται; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 – 17709

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 2x + y = 5$, $(\varepsilon_2): -2x + 3y = -9$, $(\varepsilon_3): 3x + 2y = 7$.

- α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$.
ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_3)$. (Μονάδες 12)
β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α), να δείξετε ότι το κοινό σημείο των (ε_2) και (ε_3) είναι σημείο της (ε_1) (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 17717

Ένα θέατρο έχει 25 σειρές καθισμάτων χωρισμένες σε δύο διαζώματα. Η κάθε μια από τις σειρές του κάτω διαζώματος έχει 14 καθίσματα και η κάθε μια από τις σειρές του πάνω διαζώματος έχει 16 καθίσματα, ενώ η συνολική χωρητικότητα του θεάτρου είναι 374 καθίσματα.

- α) Αν x , ο αριθμός σειρών του κάτω και y ο αριθμός σειρών του πάνω διαζώματος, να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα δύο εξισώσεων. (Μονάδες 12)
β) Πόσες σειρές έχει το πάνω και πόσες το κάτω διάζωμα; (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 17734

Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1): 2x + y = 6$, $(\varepsilon_2): x - 2y = -3$.

- α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο M. (Μονάδες 13)
β) Να βρείτε για ποια τιμή του α , η ευθεία $3x + \alpha y = \alpha + 5$ διέρχεται από το M. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 – 18637

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x - 2y = 9 \\ \alpha x + \beta y = \gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(1, -4)$. (Μονάδες 13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 – 18638

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ \alpha x + \beta y = \gamma \end{cases}$, με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(-1, 5)$. (Μονάδες 13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 4 – 17835 §1.1

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ με εξισώσεις $x + (\lambda + 2)y = 3$, $(\lambda - 2)x + 5y = 3$ αντίστοιχα και $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε τη σχετική θέση των δύο ευθειών. (Μονάδες 13)

β) Στην περίπτωση που οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ τέμνονται, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των δύο ευθειών. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το σημείο Α ανήκει στην ευθεία με εξίσωση: $x + 2y = 3$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 – 17839 §1.1

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} (\alpha - 1)x + 3y = 3 \\ x + (\alpha + 1)y = 3 \end{cases}$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x_0, y_0) , τότε $x_0 = y_0$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα:

i. έχει άπειρες σε πλήθος λύσεις και να δώσετε τη μορφή τους. (Μονάδες 6)

ii. δεν έχει λύση. (Μονάδες 4)

γ) Να εξετάσετε τις σχετικές θέσεις των δύο ευθειών που προκύπτουν από τις εξισώσεις του παραπάνω συστήματος για $\alpha = 3$, $\alpha = 2$, $\alpha = -2$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 – 20925

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): \lambda x + y = 1$ και $(\varepsilon_2): x + \lambda y = \lambda^2$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι δύο ευθείες τέμνονται και να γράψετε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου συναρτήσει του λ . (Μονάδες 13)

β) Για ποια τιμή του λ οι δύο ευθείες είναι παράλληλες; (Μονάδες 6)

γ) Αν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\lambda x + \lambda^2 y = \lambda^3$ και $2x + 2\lambda y = \lambda^2 - 1$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 6)

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ §1.2

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2 – 17659

α) Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$. (Μονάδες 15)

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος που βρήκατε στο ερώτημα α). (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 4 – 17834 §1.2

Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:

Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού. Ο λόγος της ηλικίας το πατέρα

προς την ηλικία του παιδιού ισούται με $\frac{11}{3}$. Επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών

ισούται με 115 χρόνια.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ηλικία του καθενός. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4 – 17850 §1.2

Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής.

1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14

2. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24

3. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1. και 2. που έδωσε ο Κώστας. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4 – 20920

α) Να λύσετε το σύστημα $(\Sigma_1): \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$. (Μονάδες 10)

β) Είναι οι λύσεις του συστήματος (Σ_1) λύσεις και του $(\Sigma_2): \begin{cases} |xy| = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) Είναι οι λύσεις του συστήματος (Σ_2) λύσεις και του (Σ_1) ;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

2.1 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας), με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ακριβώς ένα στοιχείο του συνόλου Β.

Το σύνολο Α λέγεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης και περιέχει τις δυνατές τιμές που μπορούμε να δώσουμε στη μεταβλητή x . (το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f το συμβολίζουμε συνήθως D_f ή A_f). Το σύνολο Β λέγεται σύνολο τιμών της f και περιέχει όλες τις τιμές της $f(x)$ για τα αντίστοιχα $x \in A$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$	$P(x) \geq 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = x^2 - 3x + 12$
- ii. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$
- iii. $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 3x + 2}$
- iv. $f(x) = 2x + \sqrt{6 - x}$
- v. $f(x) = \frac{3x + 5}{x - 3} + \sqrt{x - 2}$
- vi. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1} + \sqrt{2 - x}$
- vii. $f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

Λύση :

- i. Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$
- ii. Πρέπει : $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$
- iii. Πρέπει : $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \& x \neq 2$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$
- iv. Πρέπει : $6 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$. Άρα $D_f = (-\infty, 6]$
- v. Πρέπει : $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ και $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Άρα $D_f = [2, 3) \cup (3, +\infty)$

vi. Πρέπει : $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1,2].$ Άρα $D_f = [1,2]$

vii. Πρέπει : $x \neq 0$ (1) και $1-x^2 \geq 0$ (2)

Έχω $1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1,1]$ (2)

Από (1) & (2) $D_f = [-1,0) \cup (0,1]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i) $f(x) = 2x^2 - 7x + 15$ ii) $f(x) = \frac{x-x^2}{12+3x}$ iii) $f(x) = \frac{x^2-7}{2x-8}$ iv) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-5x+6}$

v) $f(x) = 2x^2 + \sqrt{14-2x}$ vi) $f(x) = \sqrt{x^2-2x-3}$ vii) $f(x) = \sqrt{-x^2-2x+8}$

3. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i) $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{x}{x+5}$ ii) $f(x) = \frac{4x}{x-3} + \frac{2x-7}{x^2+3x-4}$ iii) $f(x) = \frac{6-4x}{x^2-9} + \frac{2x}{x^2+4x+3} + \frac{5}{2}$

iv) $f(x) = \frac{2x+6}{|2x-1|-5}$ v) $f(x) = \frac{x+1}{5-|1-3x|}$ vi) $f(x) = \frac{2x+7}{5+|1-3x|}$ vii) $f(x) = \frac{x+3}{|x-2|-|2x-1|}$

4. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i) $f(x) = \frac{x+3}{x^3+8}$ ii) $f(x) = \frac{x-1}{x^3-9x}$ iii) $g(x) = \frac{2x+7}{x^3-4x^2+4x}$

iv) $g(x) = \frac{5x-12}{x^3+x^2+x}$ v) $h(x) = \frac{x-5}{x^4-27x}$ vi) $h(x) = \frac{x+2}{16x^6-x^2}$

5. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:

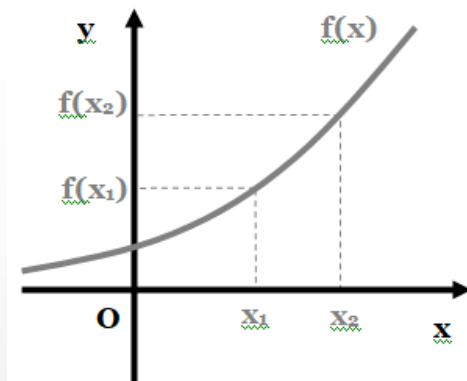
i) $f(x) = \frac{1}{2x-6} + \sqrt{x+2}$ ii) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{4-x}}$ iii) $g(x) = \frac{\sqrt{3-|x|}}{x-1}$

iv) $g(x) = \frac{\sqrt{10-2|x|}}{x^2+3x}$ v) $h(x) = \frac{\sqrt{7-|2x-3|}}{|x-1|-2}$ vii) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} + \sqrt{2-|x|}$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (ΟΡΙΣΜΟΣ)

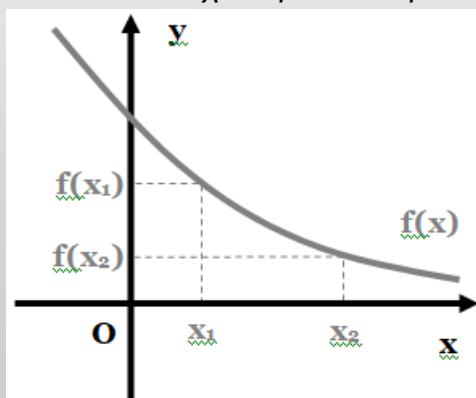
- Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$, ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$

(Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε ισχύει η ισοδυναμία $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$)

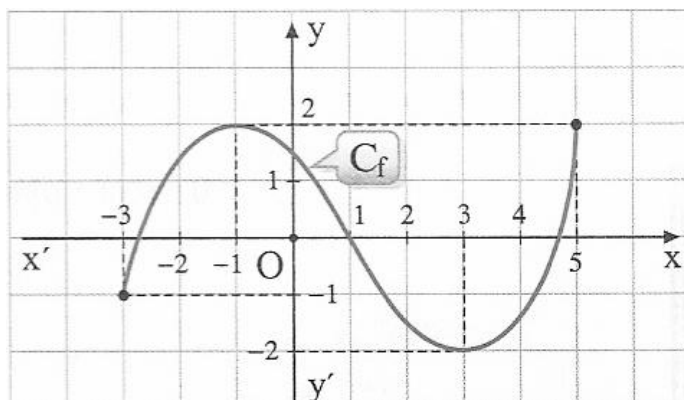


- Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$, ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$

(Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε ισχύει η ισοδυναμία $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$)

**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2Α : ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΑΠΟ ΣΧΗΜΑ****ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**

6. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Λύση :

Όπως προκύπτει από το παραπάνω σχήμα, η συνάρτηση f είναι :

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-3, -1]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 3]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, 5]$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2B : ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΜΕ ΟΡΙΣΜΟ

Για να βρούμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ακολουθούμε τα εξής βήματα :

- Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.
- Με κατάλληλες πράξεις κατασκευάζουμε την ανισότητα μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$.
- Αν καταλήξουμε στην ανισότητα $f(x_1) < f(x_2)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- Αν καταλήξουμε στην ανισότητα $f(x_1) > f(x_2)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Χρήσιμες είναι οι παρακάτω **ιδιότητες της διάταξης** :

- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$
- Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$
- Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$
- Αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε προσθέτω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω :
 $\alpha + \gamma > \beta + \delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να προσθέσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)
- Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί αριθμοί τότε αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε πολλαπλασιάζω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω : $\alpha\gamma > \beta\delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να πολλαπλασιάσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)

Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί και n φυσικός διαφορετικός του μηδέν, τότε ισχύει :

- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^n < \beta^n$
(Προσοχή : αν α, β αρνητικοί τότε : $\alpha < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^n < \beta^n, & \alpha n - n \text{ περριπός} \\ \alpha^n > \beta^n, & \alpha n - n \text{ άρτιος} \end{cases}$)
- Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n]{\beta}$
- Αν οι αριθμοί α και β είναι **ομόσημοι**, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

7. Να βρείτε τη μονοτονία των παρακάτω συναρτήσεων :

- $f(x) = 4x - 7$
- $f(x) = -4x - 7$
- $f(x) = \sqrt{1-x}$
- $f(x) = (x-1)^2 - 1, \quad x \leq 1.$

Λύση :

- $f(x) = 4x - 7$, Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε έχουμε :

$x_1 < x_2 \Rightarrow 4x_1 < 4x_2 \Rightarrow 4x_1 - 7 < 4x_2 - 7 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f = \mathbb{R}$

ii. $f(x) = -4x - 7$, Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε έχουμε :

$x_1 < x_2 \Rightarrow -4x_1 > -4x_2 \Rightarrow -4x_1 - 7 > -4x_2 - 7 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = \mathbb{R}$

(Γενικά γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι μια ευθεία. Για τη μονοτονία της συνάρτησης αυτής ισχύει ότι :

- Αν $\alpha > 0$ η $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- Αν $\alpha < 0$ η $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
- Αν $\alpha = 0$ η $f(x) = 0x + \beta \Leftrightarrow f(x) = \beta$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

iii. Πρέπει : $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Άρα $D_f = (-\infty, 1]$

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = (-\infty, 1]$, με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow \sqrt{1 - x_1} > \sqrt{1 - x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = (-\infty, 1]$.

iv. $D_f = (-\infty, 1]$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = (-\infty, 1]$, με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \xrightarrow[\substack{x_1 - 1 \leq 0, \& \\ x_2 - 1 \leq 0}]{\text{Επειδή, } x \leq 1} (x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2 \Rightarrow \text{(Όταν υψώνω στο τετράγωνο}$$

αρνητικούς αριθμούς, αλλάζει η φορά της ανίσωσης)

$$\Rightarrow (x_1 - 1)^2 - 1 > (x_2 - 1)^2 - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } D_f = (-\infty, 1].$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις :

- $f(x) = 6 - 2x$
- $f(x) = 3 + 5x$
- $f(x) = 2x^3 - 1$
- $f(x) = \sqrt{6 - 2x} + 3$
- $f(x) = x^2 - \frac{3}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}$
- $f(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x}$
- $f(x) = x^3 + 2x + 1$
- $f(x) = \sqrt{3 - \sqrt{3 - x}}$

9. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις :

- $f(x) = \frac{3}{x} - 6x^4 - \sqrt{x}$
- $f(x) = x^3 - \sqrt{3 - 2x}$

- iii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
- iv. $f(x) = \sqrt{6 - 2x} + 3$
- v. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
- vi. $f(x) = 1 - 2x^3 - 3x$
- vii. $f(x) = x^3 - \sqrt{2 - x} + 5x$

10. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ στο διάστημα $\Delta = (-\infty, 0)$

11. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση :

- i. $f(x) = (2\lambda - 8)x + 3$ είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. $f(x) = (6 - 3\lambda)x - 25$ είναι γνησίως φθίνουσα.
- iii. $f(x) = (7 - |3 - 2\lambda|)x - 9$ είναι γνησίως αύξουσα.
- iv. $f(x) = (\lambda^2 - 4\lambda + 5)x + 72$ είναι γνησίως αύξουσα.
- v. $f(x) = (-2\lambda^2 + 6\lambda - 9)x + 3$ είναι γνησίως φθίνουσα.

12. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση : $f(x) = (\lambda^2 - 2\lambda - 15)x - 2011$ είναι γνησίως φθίνουσα και η συνάρτηση $g(x) = (|2\lambda - 1| - |\lambda + 2|)x + 2019$ είναι γνησίως αύξουσα.

13. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, στο $(-\infty, 1)$

14. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2x + 3f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

15. Έστω δυο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x) = f(-2x + 3)$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 - \sqrt{x} + \frac{\alpha + 6}{x}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(4, -33)$ να δείξετε ότι $\alpha = -2$.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ μια φορά. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x)=0$, αλλά και κάθε εξίσωση της μορφής $f(x)=\alpha$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ μια ρίζα.

Για να επιλύσουμε μια εξίσωση η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :

- 1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1^ο μέλος
- 2) θέτουμε το 1^ο μέλος ως συνάρτηση $f(x)$ οπότε η εξίσωση έχει τη μορφή $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$
- 3) βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$
- 4) αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$ έχει το πολύ μια ρίζα που είναι η προφανής.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

17. Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{10-x} = x^3 + 2$.

Λύση : Έχω : $\sqrt{10-x} - x^3 - 2 = 0$, έστω $f(x) = \sqrt{10-x} - x^3 - 2$. Πρέπει $10-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 10$, δηλ. $D_f = (-\infty, 10]$. Έχω να λύσω την εξίσωση $\sqrt{10-x} - x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Με δοκιμές παρατηρώ ότι για $x=1$ έχω : $\sqrt{10-1} - 1^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow 3 - 3 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$. Άρα η $x=1$ είναι ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x) = 0$. Για να δείξω ότι είναι και μοναδική, αρκεί να δείξω ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = (-\infty, 10]$, με : $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 10-x_1 > 10-x_2 \Rightarrow \sqrt{10-x_1} > \sqrt{10-x_2}$

(1) Επίσης : $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \Rightarrow -x_1^3 - 2 > -x_2^3 - 2$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $\sqrt{10-x_1} - x_1^3 - 2 > \sqrt{10-x_2} - x_2^3 - 2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = (-\infty, 10]$, άρα η ρίζα $x=1$ της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι και μοναδική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

18. Να λυθεί η εξίσωση : $2\sqrt{x-1} = 1 + \frac{8}{x^3}$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} + \frac{\alpha}{x}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση

διέρχεται από το σημείο $M(6,1)$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $\alpha = -6$.
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x-2} = \frac{6}{x} - 1$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{8}{x^3} - 3\sqrt{x-1}$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση $8 + 2x^3 = 3x^3\sqrt{x-1}$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x} - \sqrt{x}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1) + f(4) = 12$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $\alpha = 12$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση $\frac{12}{|2x-1|+1} - \frac{12}{|x+4|+1} = \sqrt{|2x-1|+1} - \sqrt{|x+4|+1}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΗΣ – ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Για να επιλύσουμε μια ανίσωση η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :

- μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1^ο μέλος
- θέτουμε το 1^ο μέλος ως συνάρτηση $f(x)$ οπότε η ανίσωση έχει τη μορφή $f(x) < 0$ ή $f(x) > 0$
- αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη
- βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x) = 0$ ή $f(x) = \alpha$ έτσι η ανίσωση γίνεται $f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(\rho)$
- εκμεταλλευόμαστε τη μονοτονία της f για να λύσουμε την ανίσωση που προέκυψε.

ΠΡΟΣΟΧΗ :

- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε : $\alpha < \beta \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta)$ και $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)$
- Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε : $\alpha < \beta \Leftrightarrow f(\alpha) > f(\beta)$ και $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow f(\alpha) \geq f(\beta)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

22. Να λυθεί η ανίσωση : $x^3 + \sqrt{x} < 2$.

Λύση : Έχω : $x^3 + \sqrt{x} - 2 < 0$ η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in [0, +\infty)$

Έστω $h(x) = x^3 + \sqrt{x} - 2$, με $A_h = [0, +\infty)$, έχω να λύσω την ανίσωση : $h(x) < 0$ (1)

Παρατηρώ ότι $h(1) = 0$ άρα η $x = 1$ άρα η ανίσωση (1) γίνεται : $h(x) < h(1)$.

Αρκεί τώρα να βρω τη μονοτονία της h :

Έστω $x_1, x_2 \in A_h$ με :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \quad (2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Rightarrow \sqrt{x_1} - 2 < \sqrt{x_2} - 2 \quad (3)$$

Προσθέτω κατά μέλη τις (2), (3) και (4) και έχω :

$$x_1^3 + \sqrt{x_1} - 2 < x_2^3 + \sqrt{x_2} - 2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Άρα η $h \uparrow$ για κάθε $x \in A_h = [0, +\infty)$, οπότε $h(x) < h(1) \Leftrightarrow x < 1$ ή $x \in (0, 1)$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x$, αφού βρείτε τη μονοτονία της, να λύσετε την ανίσωση $f(2x^2 - x + 3) < f(3x + x^2)$.

Λύση: Έχω : $D_f = \mathbb{R}$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$ (1)

Επίσης : $x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $x_1^3 + 3x_1 < x_2^3 + 3x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η f

είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε $f(2x^2 - x + 3) < f(3x + x^2) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} 2x^2 - x + 3 < 3x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$. Έχω $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 3)$.

24. Αν η συνάρτηση $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 1}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε να λυθεί η εξίσωση : $2(x^2 - 3x + 2) > \sqrt{(3x - 2)^2 + 1} - \sqrt{x^4 + 1}$.

Λύση:

$$\begin{aligned} 2(x^2 - 3x + 2) > \sqrt{(3x - 2)^2 + 1} - \sqrt{x^4 + 1} &\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 > \sqrt{(3x - 2)^2 + 1} - \sqrt{x^4 + 1} \\ \Leftrightarrow 2x^2 + \sqrt{x^4 + 1} > 6x - 4 + \sqrt{(3x - 2)^2 + 1} &\Leftrightarrow 2x^2 + \sqrt{x^4 + 1} > 2(3x - 2) + \sqrt{(3x - 2)^2 + 1} \\ \Leftrightarrow f(x^2) > f(3x - 2) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x^2 > 3x - 2 &\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty). \end{aligned}$$

25. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 6)$ και $B(2, 3)$.

- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(f(x^2 - 17) - 4) < 3$.

Λύση:

- Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 6)$, άρα ισχύει $f(-1) = 6$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $B(2, 3)$, άρα ισχύει $f(2) = 3$. Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$ τότε $-1 < 2 \Rightarrow x_1 < x_2$. Επίσης $f(-1) = 6 \Leftrightarrow f(x_1) = 6$ και $f(2) = 3 \Leftrightarrow f(x_2) = 3$.

Έχουμε δηλ. $x_1 < x_2$ με $f(x_1) > f(x_2)$, επομένως η f αποκλείεται να είναι γνησίως αύξουσα και επειδή είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως φθίνουσα.

- $f(f(x^2 - 17) - 4) < 3 \stackrel{f(2)=3}{\Leftrightarrow} f(f(x^2 - 17) - 4) < f(2) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(x^2 - 17) - 4 > 2 \Leftrightarrow f(x^2 - 17) > 6 \stackrel{f(-1)=6}{\Leftrightarrow} f(x^2 - 17) > f(-1) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} x^2 - 17 < -1 \Leftrightarrow x^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 4)$.

26. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι : $f(x) + f(x+5) > f(x+3) + f(x+7)$.

Λύση:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι :

$$\bullet \quad x < x+3 \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x+3) \quad (1)$$

$$\bullet \quad x+5 < x+7 \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(x+5) > f(x+7) \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε : $f(x) + f(x+5) > f(x+3) + f(x+7)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

27. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{4}{x} - \sqrt{x}$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{x^2}{\sqrt{x}} - x < 4$.
- Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{4}{x^2+1} - \frac{4}{x^2+2x+5} < \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2x+5}$.

28. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{x} + x$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση : $\sqrt{|x|+5} - \sqrt{3|x|+1} < 2|x|-4$.

29. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3x^3 + x$.

- Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να λυθεί η ανίσωση : $(x^2-3)^3 - (2x+1)^3 < \frac{-x^2+2x+4}{3}$.

30. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = -2x^3 - 3x + 5$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε τις ανισώσεις : α) $f(x-4) < f(3x)$ β) $f(|x|) > 0$ γ) $f(x^2-5) - f(3-2x) > 0$.

31. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να λυθούν οι ανισώσεις :

- $f(2x+3) < f(4x-1)$
- $f(x^2-2x) < f(x-2)$

32. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη με $f(2008) < f(2004)$.

- Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f .
- Να λυθεί η ανίσωση $f(5-3x) \leq f(x^2+x)$.

33. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη με $f(2007) < f(2000)$.

- Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f .
- Να λυθεί η ανίσωση $f(3x-2) \geq f(x^2)$.

34. Έστω ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 2.

Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2-1) < 2$,

- αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

35. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:

- $f(x)+f(5x) < f(3x)+f(6x)$, για κάθε $x > 0$
- $f(x)+f(x^3) > f(x^2)+f(x^5)$, για κάθε $x \in (0,1)$.

36. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(a^2+1) \geq f(2a)$.

37. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(1,2) και B(3,5)

- Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f .
- Να λυθεί η ανίσωση: $f(|x| - 3) \geq 2$

38. Δίνεται γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(1,5) και B(-2,7).

- Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f .
- Να λυθεί η ανίσωση $f(f(|x| - 4) - 6) - 5 < 0$.

39. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 3x^{2019} + 2x^{2017} + 1$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(x)) < 6$.
- Να αποδείξετε ότι: $f(13) - f(12) < f(14) - f(11)$.

40. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x + 1}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία M(-2,5) και N(-4,3).

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να δείξετε ότι $\alpha = 2$, $\beta = -1$.
- Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.
- Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f παίρνει τη μορφή $f(x) = 2 - \frac{3}{x + 1}$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $\Delta = (-1, +\infty)$.
- Να αποδείξετε ότι: $f(1) - f(2) < f(4) - f(3)$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (ΟΡΙΣΜΟΣ)

- Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **(ολικό) μέγιστο** όταν: $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
- Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **(ολικό) ελάχιστο** όταν: $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Γενικά για να αποδείξω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο, προσπαθούμε να βρούμε ένα $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε : $f(x) \leq f(x_0)$, αντίστοιχα ελάχιστο $f(x) \geq f(x_0)$.

Για να βρω τα ακρότατα μιας συνάρτησης, είναι χρήσιμες οι παρακάτω διαδικασίες :

➤ Ακρότατα της συνάρτησης : $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$

Η γραφική παράσταση της f είναι μια παραβολή με κορυφή το σημείο

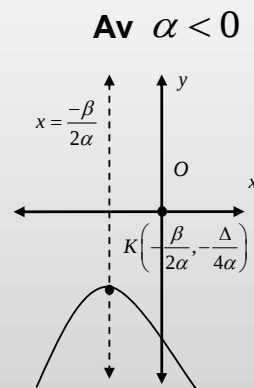
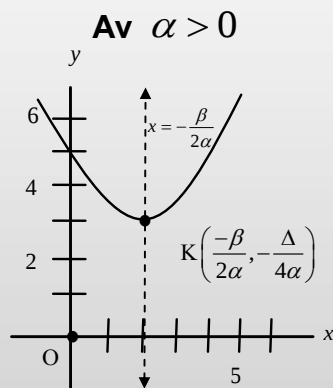
$$K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right).$$

- Αν $\alpha > 0$ τότε : $f \downarrow \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και $f \uparrow \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ και παρουσιάζει **ελάχιστο**

$$\text{στο } x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} \text{ το } f(x_0) = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$$

- Αν $\alpha < 0$ τότε : $f \uparrow \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και $f \downarrow \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ και παρουσιάζει **μέγιστο** στο

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} \text{ το } f(x_0) = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$$



➤ Αν γνωρίζουμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης σε κλειστό διάστημα τότε μπορούμε να βρούμε τα ακρότατα της π.χ

- αν $f \uparrow [\alpha, \beta]$ τότε παρουσιάζει στο α ελάχιστο το $f(\alpha)$ και στο β μέγιστο το $f(\beta)$
- αν $f \downarrow [\alpha, \beta]$ τότε παρουσιάζει στο α μέγιστο το $f(\alpha)$ και στο β ελάχιστο το $f(\beta)$

➤ Κατασκευάζω ανισοισότητες της μορφής $f(x) \geq m$ ή $f(x) \leq M$ ή $m \leq f(x) \leq M$ και βρίσκω τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει το "=" λύνοντας την εξίσωση : $f(x) = m$ ή $f(x) = M$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**41.** (Άσκηση 3 σελ. 38 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι :

- i. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 10$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 3$
 ii. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$

Λύση :

- i. $f(x) = x^2 - 6x + 10$ Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$
 Για να παρουσιάζει η $f(x)$ ελάχιστο για $x = 3$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) \geq f(3)$ για κάθε $x \in D_f = \mathbb{R}$. Έχω :

$$f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 \geq 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 \geq 9 - 18 + 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$
- ii. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, πρέπει $x^2 + 1 \neq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$
 Για να παρουσιάζει η $f(x)$ μέγιστο για $x = 1$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) \leq f(1)$ για κάθε $x \in D_f = \mathbb{R}$. Έχω :

$$f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} \leq \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1 \stackrel{x^2 + 1 > 0}{\Leftrightarrow} 2x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

42. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = x^2 - 4x + 7$
 ii. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$
 iii. $f(x) = 5 - 4|x - 1|$
 iv. $f(x) = -\frac{10}{2 + \sqrt{4 - x}}$
 v. $f(x) = x^2 - 2|x| + 3$
 vi. $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$
 vii. $f(x) = 3 - 5x, x \in [-2, 5]$

Λύση :

- i. $f(x) = x^2 - 4x + 7$, είναι $A_f = \mathbb{R}$.
 Επειδή $\alpha = 1 > 0$ άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2} = 2$
 το $f(x_0) = f(2) = 3$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow f(x) \geq 3$.
 Επίσης η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.
- ii. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, είναι $A_f = \mathbb{R}$.
 Επειδή $\alpha = -1 < 0$ άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1$
 το $f(x_0) = f(1) = 4$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow f(x) \leq 4$.
 Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

- iii. $f(x) = 5 - 4|x-1|$, είναι $A_f = \mathbb{R}$. Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε
 $|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow -4|x-1| \leq 0 \Leftrightarrow 5 - 4|x-1| \leq 5 \Leftrightarrow f(x) \leq 5$ (1)
 Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 5 \Leftrightarrow 5 - 4|x-1| = 5 \Leftrightarrow -4|x-1| = 0 \Leftrightarrow x = 1$, δηλ. $f(1) = 5$
 άρα η (1) γίνεται $f(x) \leq 5 \Leftrightarrow f(x) \leq f(1)$. Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1$
 το $f(1) = 5$.

- iv. $f(x) = -\frac{10}{2 + \sqrt{4-x}}$, πρέπει
 - $4-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$
 - $2 + \sqrt{4-x} \neq 0$, που ισχύει άρα,
 είναι $A_f = (-\infty, 4]$. Έχουμε για κάθε $x \in (-\infty, 4]$ έχουμε
 $\sqrt{4-x} \geq 0 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4-x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2 + \sqrt{4-x}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{10}{2 + \sqrt{4-x}} \geq -\frac{10}{2} \Leftrightarrow f(x) \geq -5$ (1)
 Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = -5 \Leftrightarrow -\frac{10}{2 + \sqrt{4-x}} = -5 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4-x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$, δηλ.
 $f(4) = -5$ άρα η (1) γίνεται $f(x) \geq -5 \Leftrightarrow f(x) \geq f(4)$. Άρα η f παρουσιάζει
 ελάχιστο στο $x_0 = 4$ το $f(4) = -5$.

- v. $f(x) = x^2 - 2|x| + 3$, είναι $A_f = \mathbb{R}$.
 Παρατηρούμε ότι : $f(x) = x^2 - 2|x| + 3 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2|x| + 1 + 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f(x) = |x|^2 - 2|x| + 1 + 2 \Leftrightarrow f(x) = (|x| - 1)^2 + 2$. Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε
 $(|x| - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \geq 2$ (1)
 Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 2 \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$,
 δηλ. $f(1) = 2$ και $f(-1) = 2$ άρα η (1) γίνεται :
 $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow (f(x) \geq f(1) \text{ και } f(x) \geq f(-1))$.
 Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1 = -1$ και στο $x_2 = 1$ το $f(-1) = f(1) = 2$.

- vi. $f(x) = \sqrt{4-2x}$, είναι $A_f = (-\infty, 2]$.
 Με "χτίσιμο" δείχνω ότι $f \downarrow (-\infty, 2]$ άρα η f παρουσιάζει :
 - ελάχιστο στο $x_0 = 2$ το $f(2) = \sqrt{4-2 \cdot 2} = 0$ δηλ. για κάθε $x \in (-\infty, 2]$ ισχύει ότι
 $f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$. Η f δεν παρουσιάζει μέγιστο.

- vii. $f(x) = 3 - 5x$, είναι $A_f = [-2, 5]$.
 Με "χτίσιμο" δείχνω ότι $f \downarrow [-2, 5]$ άρα η f παρουσιάζει :
 - Μέγιστο στο $x_0 = -2$ το $f(-2) = 3 - 5 \cdot (-2) = 13$ δηλ. για κάθε $x \in [-2, 5]$ ισχύει ότι
 $f(x) \leq f(-2) \Leftrightarrow f(x) \leq 13$. Η f δεν παρουσιάζει ελάχιστο.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

43. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

Έστω μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$

- i. Αν για κάθε $x \in A$, ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$, τότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 .
- ii. Αν $A = (\alpha, \beta)$, $x_0 \in A$, η f είναι γν. φθίνουσα στο $(\alpha, x_0]$, και γν. αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, τότε η f έχει ελάχιστη τιμή το $f(x_0)$.
- iii. Αν $A = [\alpha, \beta]$ και η f είναι γν. φθίνουσα, τότε η f έχει μέγιστο το $f(\alpha)$ και ελάχιστο το $f(\beta)$.
- iv. Αν $f(A) = [\kappa, \lambda)$, τότε η μέγιστη τιμή της f είναι το κ .
- v. Αν $A = (\alpha, +\infty)$ και η f είναι γν. μονότονη, τότε η f έχει ολικό ακρότατο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

44. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{4}{x}$, με πεδίο ορισμού $A_f = (0, +\infty)$, παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 2$.

45. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x_1 = 1$ και ελάχιστο για $x_2 = -1$.

46. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 3 - |x - 2|$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 2$.

47. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$. Ποιο είναι το ελάχιστο της f ;

48. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 2x^3 + 3$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$. Ποιο είναι το ελάχιστο της f ;

49. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$ έχει ελάχιστη τιμή -1 και μέγιστη 1 .

50. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

- i. $f(x) = 3|x - 1| - 2$
- ii. $f(x) = 5 - (x + 2)^4$
- iii. $f(x) = 2\sqrt{x} - 5$
- iv. $f(x) = 7 - 3\sqrt{x - 1}$
- v. $f(x) = 7 - \frac{4}{|x + 3| + 2}$
- vi. $f(x) = \sqrt{6 - 2x} - 3x$
- vii. $f(x) = \sqrt{7 - x} - \sqrt{x + 2}$
- viii. $f(x) = -x^2 + 4|x| - 1$
- ix. $f(x) = x - 6\sqrt{x} + 12$

51. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα των συναρτήσεων :

- i. $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$
- ii. $f(x) = -3x^2 + 18x - 5$
- iii. $f(x) = x^2 + 6x$
- iv. $f(x) = -x^2 + 2x$

52. Να βρείτε :

- i. το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x}$ με πεδίο ορισμού $A_f = (0, +\infty)$.
- ii. το μέγιστο της συνάρτησης $g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$ με πεδίο ορισμού $A_g = (-\infty, 0)$.

(Υπόδειξη : Χρήσιμες είναι οι ανισώσεις

- $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ για $\alpha > 0$, με το « $=$ » να ισχύει μόνο για $\alpha = 1$
- $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$ για $\alpha < 0$, με το « $=$ » να ισχύει μόνο για $\alpha = -1$)

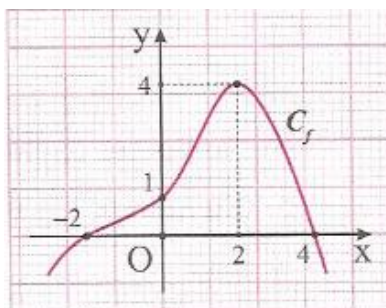
53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία
- iii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f
- iv. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f

54. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 4$ και $g(x) = \frac{6}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

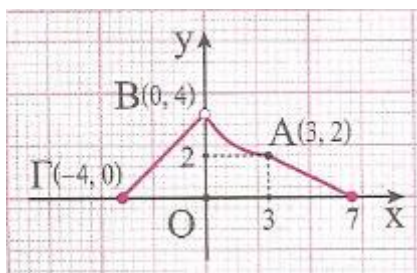
- i. Να βρείτε το ελάχιστο της f .
- ii. Να βρείτε το μέγιστο της g .
- iii. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι : $7f(\alpha) - 5g(\beta) \geq 20$

55. Για τη συνάρτηση f του παρακάτω σχήματος, να βρείτε :



- i. τα ακρότατα
- ii. τα διαστήματα μονοτονίας
- iii. τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 0$
- iv. τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$
- v. την τιμή $f(0)$

56. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f :



- να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία B και Γ
- να βρείτε για ποια τιμή του x η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της
- να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 2$
- να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΑΡΤΙΑ – ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει : $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.
- Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει : $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$. Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Για να είναι μια συνάρτηση f άρτια ή περιττή, πρέπει το πεδίο ορισμού της να είναι σύνολο συμμετρικό ως προς το 0, δηλ. να ισχύει $x, -x \in A$ για κάθε $x \in A$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

57. (Άσκηση 4 σελ. 38 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές.

i. $f_1(x) = 3x^2 + 5x^4$ ii. $f_2(x) = 3|x| + 1$ iii. $f_3(x) = |x + 1|$

iv. $f_4(x) = x^3 - 3x^5$ v. $f_5(x) = \frac{x^2}{1+x}$ vi. $f_6(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

Λύση :

i. $D_{f_1} = \mathbb{R}$, για κάθε $x \in D_{f_1}$ είναι και $-x \in D_{f_1}$. Επίσης :

$$f_1(-x) = 3(-x)^2 + 5(-x)^4 = 3x^2 + 5x^4 = f_1(x) \text{ για κάθε } x \in D_{f_1}. \text{ Άρα η } f \text{ είναι άρτια.}$$

ii. $D_{f_2} = \mathbb{R}$, για κάθε $x \in D_{f_2}$ είναι και $-x \in D_{f_2}$. Επίσης :

$$f_2(-x) = 3|-x| + 1 = 3|x| + 1 = f_2(x) \text{ για κάθε } x \in D_{f_1}. \text{ Άρα η } f \text{ είναι άρτια.}$$

- iii. $D_{f_3} = \mathbb{R}$, για κάθε $x \in D_{f_3}$ είναι και $-x \in D_{f_3}$. Επίσης :
 $f_3(-x) = |-x+1| = |-(x-1)| = |x-1|$ δεν βγαίνει ούτε $f(x)$ ούτε $-f(x)$. Άρα η f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.
- iv. $D_{f_4} = \mathbb{R}$, για κάθε $x \in D_{f_4}$ είναι και $-x \in D_{f_4}$. Επίσης :
 $f_4(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^5 = -x^3 + 3x^5 = -(x^3 - 3x^5) = -f_4(x)$ για κάθε $x \in D_{f_4}$. Άρα η f είναι περιττή.
- v. Πρέπει $1+x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ άρα $D_{f_5} = \mathbb{R} - \{-1\}$, για κάθε $x \in D_{f_5}$ δεν είναι και $-x \in D_{f_5}$ καθώς αν $x=1 \in D_{f_5}$, το $x=-1 \notin D_{f_5}$. Άρα η f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή καθώς το πεδίο ορισμού της δεν είναι συμμετρικό ως προς το 0.
- vi. Πρέπει $x^2+1 \neq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $D_{f_6} = \mathbb{R}$, για κάθε $x \in D_{f_6}$ είναι και $-x \in D_{f_6}$. Επίσης : $f_6(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-2x}{x^2+1} = -\frac{2x}{x^2+1} = -f_6(x)$. Άρα η f είναι περιττή.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

58. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

- Αν η f είναι άρτια, τότε για κάθε $x \in A$, είναι $f(-x) = \dots\dots\dots$
- Αν η f είναι περιττή, τότε για κάθε $x \in A$, είναι $f(-x) = \dots\dots\dots$
- Αν η f είναι περιττή και $0 \in A$, τότε $f(0) = \dots\dots\dots$
- Αν η f είναι άρτια, τότε η C_f έχει $\dots\dots\dots$ συμμετρίας $\dots\dots\dots$
- Αν η f είναι περιττή, τότε η C_f έχει $\dots\dots\dots$ συμμετρίας $\dots\dots\dots$

59. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

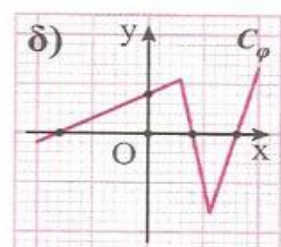
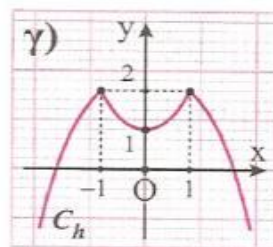
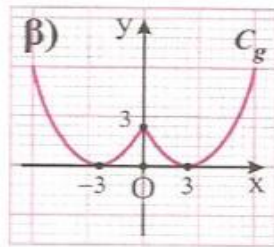
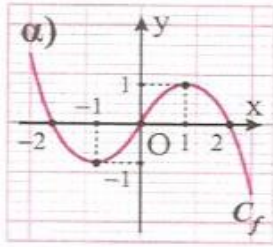
- Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή, τότε $f(x)+f(-x)=0$, για κάθε $x \in A$.
- Αν για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει, $f(x)-f(-x)=0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι άρτια.
- Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$, τότε είναι περιττή.
- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η f δεν είναι άρτια.

60. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

- Η συνάρτηση $f: (-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$ είναι άρτια.
- Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι περιττή.
- Αν μια συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή, τότε $\alpha+\beta=0$
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x|$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

61. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές.



62. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές.

i. $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5$

ii. $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 2x$

iii. $f(x) = |2x - 1| - |2x + 1|$

iv. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

63. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + 3}{x}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και στη συνέχεια να δείξετε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

64. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι άρτιες ούτε περιττές.

i. $f: (-3,4) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ ii. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ iii. $f(x) = x^2 + x$

65. Δίνεται η περιττή συνάρτηση : $f(x) = \alpha x^2 + (\alpha - 2)x^3 + (\alpha - 1)x$.

- Να δείξετε ότι $\alpha = 0$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) < 3$.
- Να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε τα σημεία $A(-\kappa, \lambda)$ και $B(\kappa, 36 - 3\lambda)$ να ανήκουν στη γραφική παράσταση της f .

67. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
- Να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = 1$.

68. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 + \alpha|x|}$ διέρχεται από το σημείο $M(-1, -2)$.

- Να δείξετε ότι $\alpha = -2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
- Να λύσετε την ανίσωση : $x^2 \leq \frac{f(999)}{f(-999)} x$.

66. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε την τιμή $f(0)$
- Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

2.2 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ – ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με $f(x) = \phi(x) + c$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της ϕ κατά c μονάδες προς τα πάνω.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με $f(x) = \phi(x) - c$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της ϕ κατά c μονάδες προς τα κάτω.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

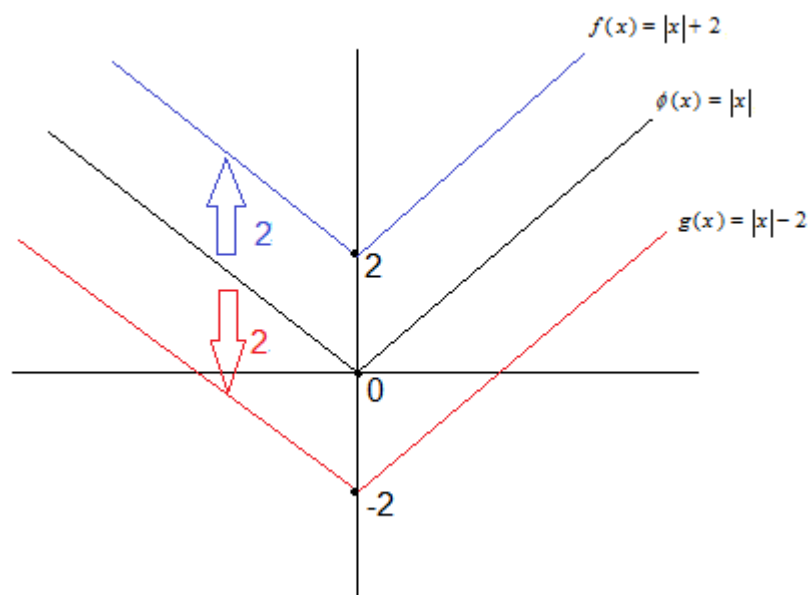
1. (Άσκηση 1 σελ. 45 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

$$\phi(x) = |x|, \quad f(x) = |x| + 2, \quad g(x) = |x| - 2$$

Λύση :

Οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Τονίζουμε ότι : η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x| + 2$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x) = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα πάνω. Ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = |x| - 2$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x) = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.



ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με $f(x) = \phi(x - c)$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της ϕ κατά c μονάδες προς τα δεξιά.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με $f(x) = \phi(x + c)$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της ϕ κατά c μονάδες προς τα αριστερά.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

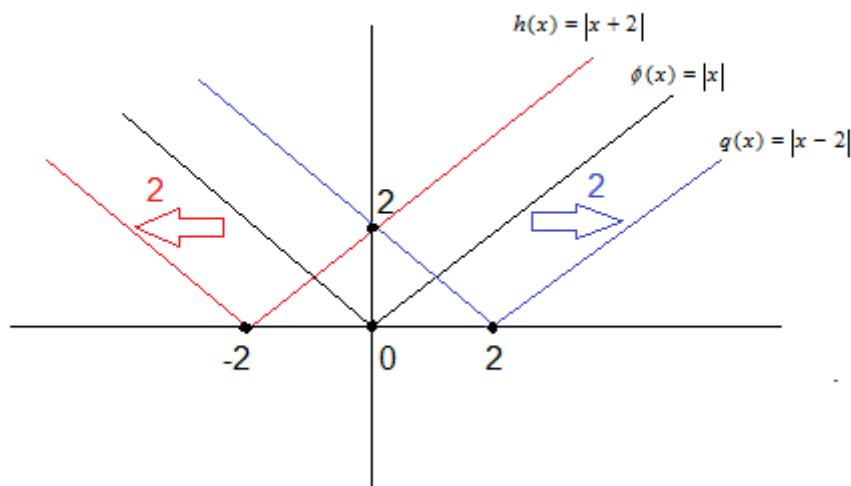
2. (Άσκηση 2 σελ. 45 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

$$\phi(x) = |x|, \quad h(x) = |x + 2|, \quad q(x) = |x - 2|$$

Λύση :

Οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Τονίζουμε ότι : η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = |x + 2|$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x) = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά. Ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $q(x) = |x - 2|$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x) = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.



ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΣΥΝΔΙΑΣΜΟΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

- Αν έχω $f(x) = \phi(x - c) + \kappa$, μετατοπίζω τη γραφική παράσταση της ϕ κατά c μονάδες προς τα δεξιά και κ μονάδες πάνω
- Αν έχω $f(x) = \phi(x - c) - \kappa$, μετατοπίζω τη γραφική παράσταση της ϕ κατά c μονάδες προς τα δεξιά και κ μονάδες κάτω
- Αν έχω $f(x) = \phi(x + c) + \kappa$, μετατοπίζω τη γραφική παράσταση της ϕ κατά c μονάδες προς τα αριστερά και κ μονάδες πάνω
- Αν έχω $f(x) = \phi(x + c) - \kappa$, μετατοπίζω τη γραφική παράσταση της ϕ κατά c μονάδες προς τα αριστερά και κ μονάδες κάτω

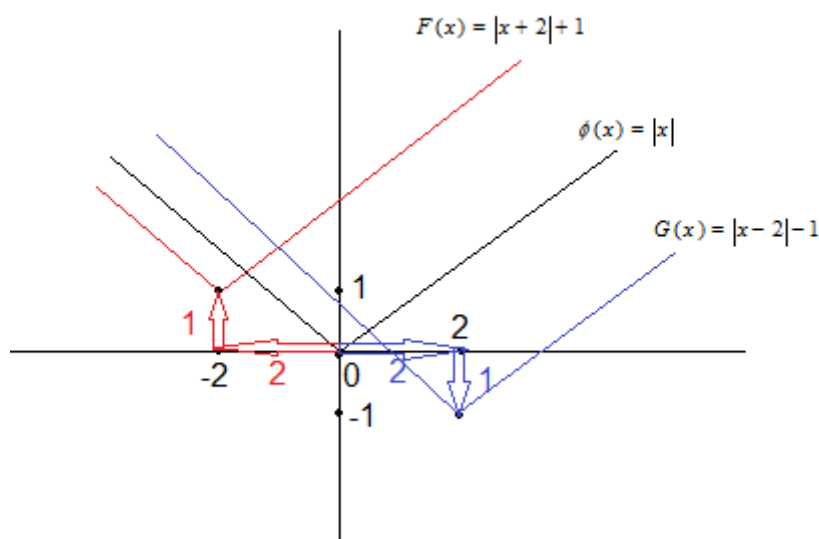
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**3. (Άσκηση 3 σελ. 45 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)**

Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

$$\phi(x) = |x|, \quad F(x) = |x + 2| + 1, \quad G(x) = |x - 2| - 1$$

Λύση :

Οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Τονίζουμε ότι : η γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x) = |x + 2| + 1$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x) = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και 1 μονάδα προς τα πάνω. Ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $G(x) = |x - 2| - 1$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x) = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και 1 μονάδα προς τα κάτω.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$f(x)=|x|$$

$$g(x)=|x|+3$$

$$h(x)=|x|-3$$

5. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$f(x)=|x|$$

$$g(x)=|x-2|$$

$$h(x)=|x+3|$$

6. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$\varphi(x)=|x|$$

$$f(x)=|x-2|+1$$

$$g(x)=|x+3|-2$$

7. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$f(x)=|x|$$

$$g(x)=|x-1|+2$$

$$h(x)=|x+3|-4$$

$$\varphi(x)=-|x-1|+3$$

8. Να βρείτε ποιες μεταφορές έχουν γίνει στη συνάρτηση f ώστε να προκύψει η συνάρτηση g στις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $g(x) = f(x-1) + 2$ ii. $g(x) = f(x+2) + 3$ iii. $g(x) = f(x+3) - 5$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δυο διαφορετικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της f :

- i. κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και 3 μονάδες προς τα πάνω
- ii. κατά 4 μονάδες προς τα δεξιά και 2 μονάδες προς τα κάτω
- iii. κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και 1 μονάδα προς τα πάνω
- iv. κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και 5 μονάδα προς τα κάτω

10. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2} & x \in [-1,1] \\ x-1 & x > 1 \end{cases}$

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις: $\varphi(x)$, $f(x)=\varphi(x)+1$ και $g(x)=\varphi(x-2)$.

11. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$f(x)=|x|-1$ και $g(x)=1-|x|$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και C_g .

12. i. Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=|x+1|$

ii. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x)=|x-2| \text{ και } g(x)=|x+1|$$

iii. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $|x-2| < |x+1|$ και να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα συμπεράσματα.

13. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=3x^2-x+1$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δυο διαδοχικές μετατοπίσεις της C_φ .

i. Κατά 2 μονάδες αριστερά και κατά 3 μονάδες προς τα πάνω

ii. Κατά μια μονάδα δεξιά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΟ 2^Ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ §2.1****ΘΕΜΑ 2ο****ΘΕΜΑ 2 – 16962 §2.1**

Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(5,2)$ και $B(4,9)$.

- α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 12)
 β) Να λύσετε την ανίσωση $f(5-3x) < 2$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 17688 §2.1

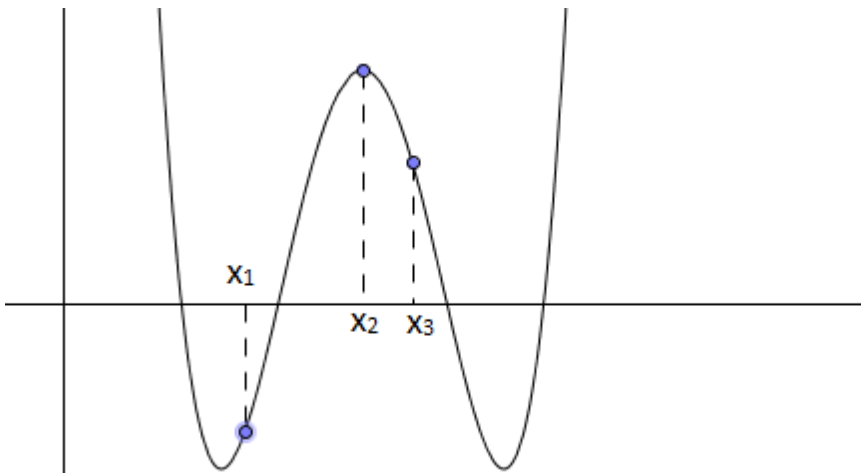
Δίνεται η συνάρτηση, $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

- α) Να δείξετε ότι η $f(x) \leq 1$. (Μονάδες 8)
 β) Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)
 γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 – 17698 §2.1

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
 Να απαντήσετε τα παρακάτω ερωτήματα:

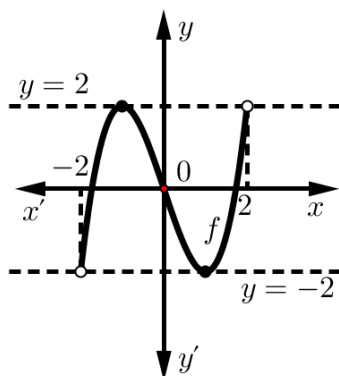
- α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$. (Μονάδες 10)
 β) Είναι η συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)
 γ) Παρουσιάζει η f μέγιστο στο σημείο x_2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ 2 – 17732 §2.1**

Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η γραφική παράστασή της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(4,5)$.

- α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f . (Μονάδες 13)
 β) Αν η γραφική παράστασή της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2 , να δείξετε ότι $f(0) > 0$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 – 22679



Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x$, $x \in (-2, 2)$.

α) Είναι η f άρτια ή περιττή; Να αποδείξετε αλγεβρικά τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 7)

β) Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις θέσεις των ακρότατων της f . (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4ο

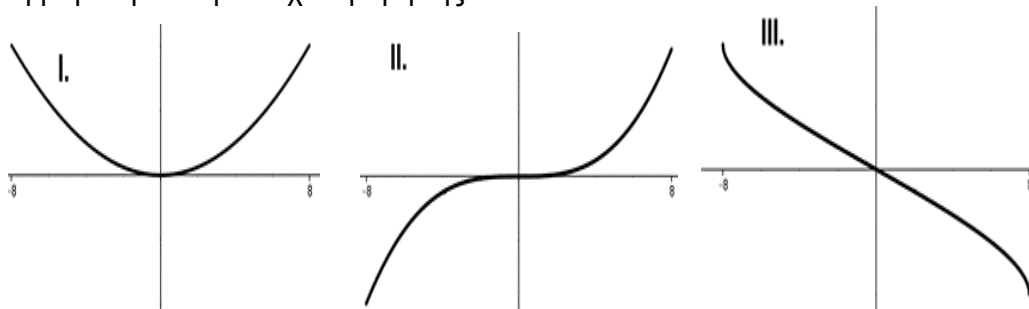
ΘΕΜΑ 4 – 17833 §2.1 - §2.2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{8-x} - \sqrt{8+x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 8)

γ) Αν η συνάρτησης f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, να επιλέξετε ποια από τις παρακάτω τρεις προτεινόμενες, είναι η γραφική της παράσταση και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.



(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γραφικά ή αλγεβρικά, γιατί οι συναρτήσεις $g(x) = f(x) - 3$ και

$h(x) = f(x+3)$ δεν είναι ούτε άρτιες ούτε περιττές. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 – 20919

Η περιβαλλοντική ομάδα ενός σχολείου παρέλαβε συρματόπλεγμα μήκους 40 m για να περιφράξει, χρησιμοποιώντας όλο το συρματόπλεγμα, έναν ορθογώνιο κήπο για καλλιέργεια λαχανικών. Οι μαθητές της περιβαλλοντικής ομάδας θέλουν να επιλέξουν ένα κήπο που να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εμβαδόν.

α) Να δώσετε τις διαστάσεις τριών διαφορετικών ορθογώνιων κήπων με περίμετρο 40 m.

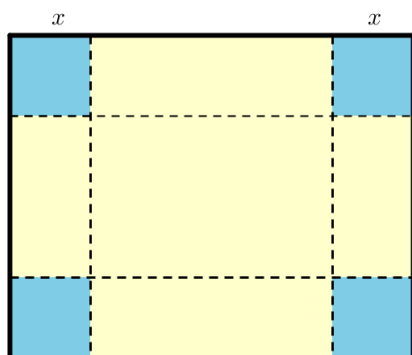
Να εξετάσετε αν οι τρεις λαχανόκηποι έχουν το ίδιο εμβαδόν. (Μονάδες 7)

β) Αν συμβολίσουμε με x το πλάτος και με E το εμβαδόν ενός λαχανόκηπου με περίμετρο 40 m, να εκφράσετε το E ως συνάρτηση του x . (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι $E(x) = -(x-10)^2 + 100$. Χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2$, να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της $E(x)$. Από τη γραφική παράσταση της $E(x)$ να βρείτε τις διαστάσεις του λαχανόκηπου με το μεγαλύτερο εμβαδόν. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 – 22776

Για να κατασκευάσουμε ένα ανοικτό κουτί από ένα ορθογώνιο χαρτόνι με διαστάσεις 5 dm και 8 dm, κόβουμε ίσα τετράγωνα, πλευράς x , από κάθε γωνία του και γυρίζουμε προς τα πάνω τις

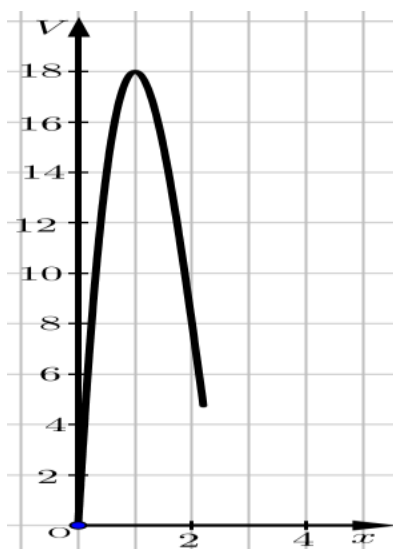


(Σχήμα 1).

πλευρές του

α) Να δείξετε ότι ο όγκος V του κουτιού εκφράζεται ως συνάρτηση του x με τον τύπο

$$V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x.$$



(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει το x στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις διαστάσεις (εκφρασμένες σε dm με ακέραιους αριθμούς) του κουτιού αν γνωρίζουμε ότι ο όγκος του είναι 8 dm^3 .

(Μονάδες 7)

δ) Στο σχ.2 δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x \text{ για } x \in (0, 2.5).$$

Χρησιμοποιώντας το σχήμα να βρείτε ποιος είναι ο μεγαλύτερος όγκος που μπορεί να έχει το κουτί.

Στη συνέχεια να υπολογίσετε αλγεβρικά τις διαστάσεις του κουτιού με το μεγαλύτερο όγκο.

(Μονάδες 7)

ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ §2.2

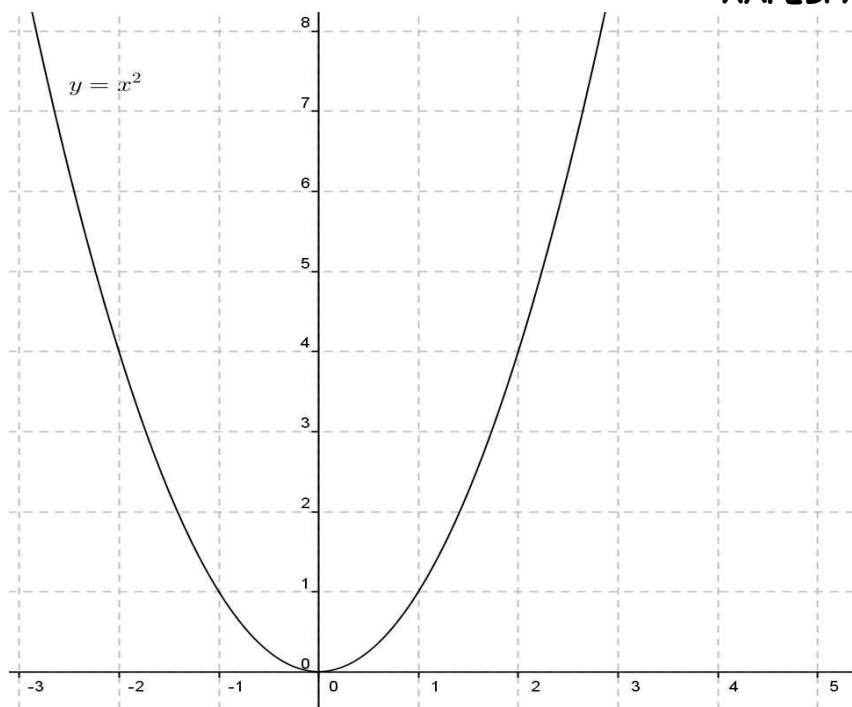
ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2 – 16965 §2.2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

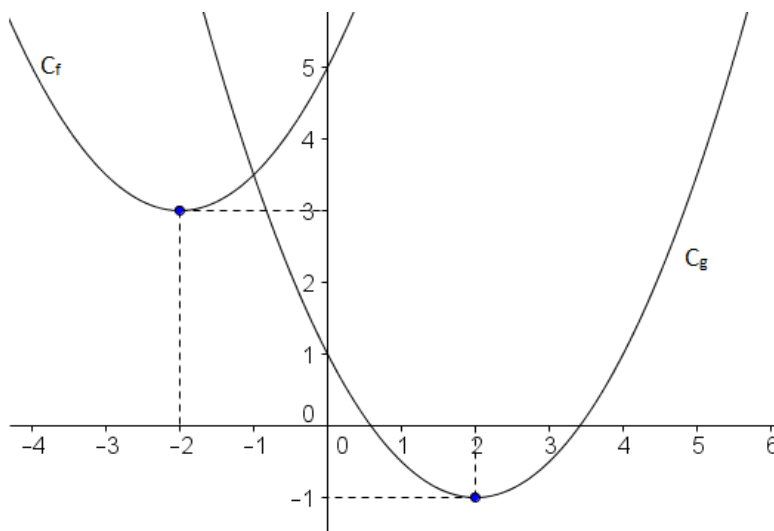
α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x - 2)^2 + 1$. (Μονάδες 12)

β) Στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , μετατοπίζοντας κατάλληλα την $y = x^2$. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2 – 18632 §2.2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι παραβολές C_f και C_g που είναι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Παρατηρώντας το σχήμα:



α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του. (Μονάδες 10)

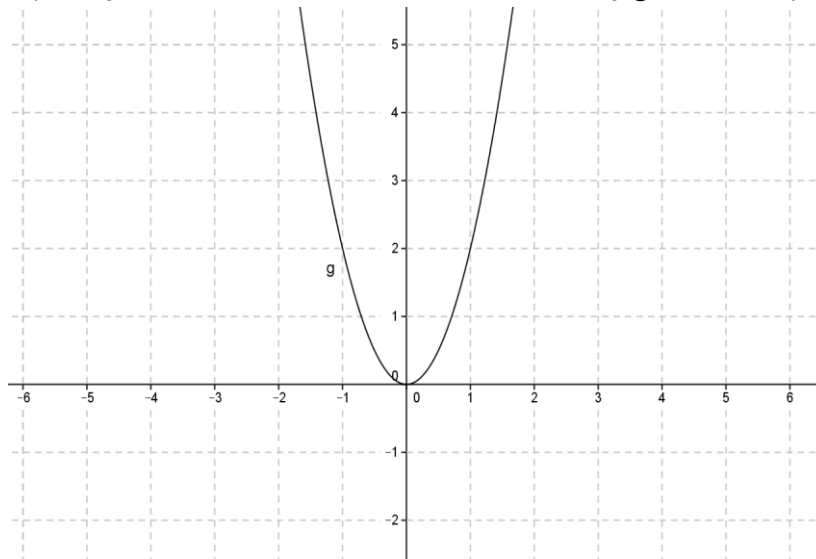
β) Να βρείτε μέσω ποιων μετατοπίσεων της C_f προκύπτει η C_g . (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 – 18634 §2.2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f γράφεται στη μορφή: $f(x) = 2(x - 3)^2 + 1$. (Μονάδες 10)

β) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή προκύπτει μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της g . (Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 4 – 17842 §1.1- § 2.2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{2}(x-c)^2 - d$, $x \in \mathbb{R}$, με c, d θετικές σταθερές, η γραφική

παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(0,16)$, $B(4,0)$.

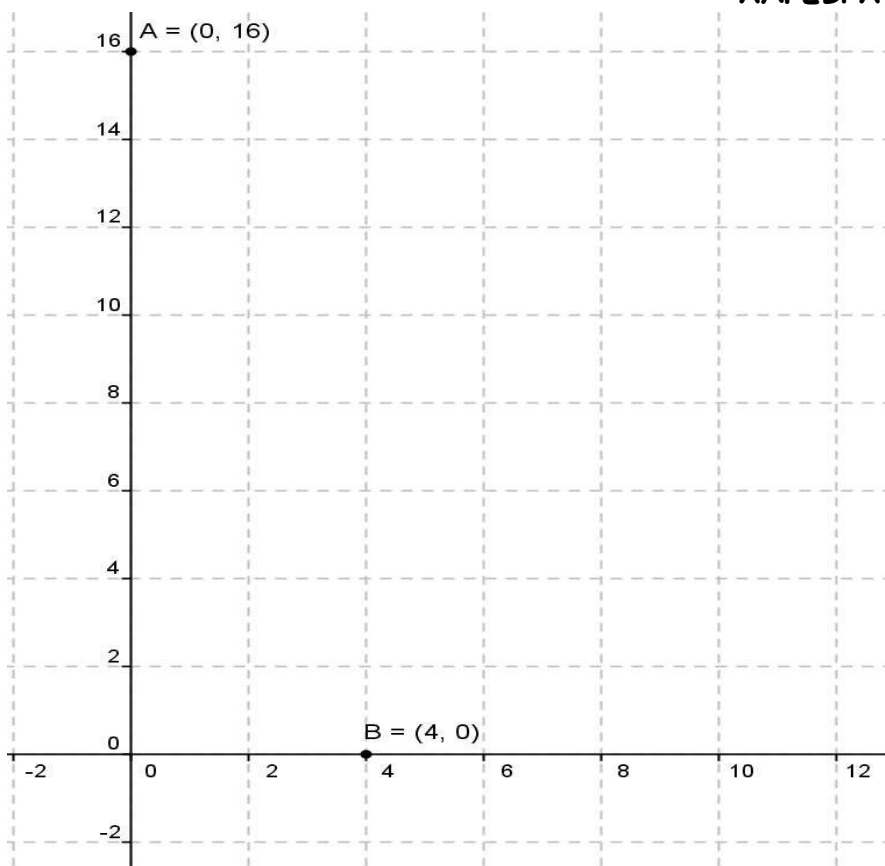
α) Με βάση τα δεδομένα, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τους c, d και να υπολογίσετε την τιμή τους. (Μονάδες 10)

β) Θεωρώντας γνωστό ότι $c = 6$ και $d = 2$.

i. να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 3)

ii. να μεταφέρετε στην κόλα σας το σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή σχετίζεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{2}x^2$. (Μονάδες 6)

iii. με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση, να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης f , τα διαστήματα στα οποία η f είναι μονότονη, καθώς και το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά τα διαστήματα. (Μονάδες 6)

**ΘΕΜΑ 4 – 20924**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(5, 8)$, να δείξετε ότι $\alpha = \frac{3}{2}$ και $\beta = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 8)

β) Αν $g(x)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και κατακόρυφα κατά 3 μονάδες προς τα κάτω, να βρείτε τον τύπο της g . (Μονάδες 9)

γ) Αν $h(x) = \frac{3}{2}(x-1)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής

παράστασης της f οριζόντια κατά κ μονάδες προς τα δεξιά και κατακόρυφα κατά $\frac{\kappa}{2}$ μονάδες κάτω, να βρείτε το κ ($\kappa > 0$). (Μονάδες 8)

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**ΘΕΜΑ 1^Ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 4x^3 + 3x$.

- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
- Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(x^2) > f(1)$.
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) < 8$.
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(f(x) - 8) > 0$.
- Να λύσετε την ανίσωση : $x^5 + 3x < 8 - 4x^3$.

ΘΕΜΑ 2^Ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 8x^2 + 17$.

- Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
- Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το 1. Στη συνέχεια να βρείτε ποια είναι η θέση ελαχίστου;

ΘΕΜΑ 3^Ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\lambda}{x} - \sqrt{x}$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(4,1)$.

- Να δείξετε ότι $\lambda = 12$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

ΘΕΜΑ 4^Ο

Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $B(3,2)$.

- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
- Να λύσετε την ανίσωση : $2 < f(|x-2|) < 5$.
- Να λύσετε την ανίσωση : $(f(10) - f(7))x < f(7) - f(10)$.
- Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι : $2f(\alpha) > f(\alpha+1) + f(\alpha+2)$.

ΘΕΜΑ 5^Ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{\alpha - x} - 3x$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(-5,18)$.

- Να δείξετε ότι $\alpha = 4$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο, το οποίο και να βρείτε.
- Για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in A$ να αποδείξετε ότι : $\frac{f(\alpha)}{6} + \frac{f(\beta)}{4} + 5 \geq 0$
- Αν $\kappa < 0 < \lambda \leq 4$, να αποδείξετε ότι : $f(\kappa)f(\lambda) + 4 < 2(f(\kappa) + f(\lambda))$.

ΘΕΜΑ 6^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{\lambda - x}} + x + 16$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(-7, 10)$.

- Να δείξετε ότι $\lambda = 2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τα ακρότατα της f .
- Για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in A$ να αποδείξετε ότι : $|3f(\alpha) - 2f(\beta) - 11| \leq 45$

ΘΕΜΑ 7^ο

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι γνησίως μονότονη, ισχύει : $f(\sqrt{2} - 1) < f(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(2, -3)$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Αν ισχύει $f(a^2) < f(8a)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + (a - 2)x + a + 1 = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- Για κάθε $\kappa, \lambda \in (2, +\infty)$, να αποδείξετε ότι : $f(\kappa) + f(\lambda) + 6 < 0$.
- Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - (\lambda + 2)x + \lambda = 0$ (1). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1). Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει : $f(x_1^2 + x_2^2 - 10) > x_1x_2 - x_1 - x_2 - 1$.

ΘΕΜΑ 8^ο

Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, για την οποία ισχύει :

$$f\left(\frac{2017}{2016}\right) < f\left(\frac{2018}{2019}\right).$$

- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
- Να αποδείξετε ότι : $f(x) + f(5x) > f(3x) + f(7x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- Να αποδείξετε ότι : $f(x) + f(x^5) < f(x^3) + f(x^7)$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

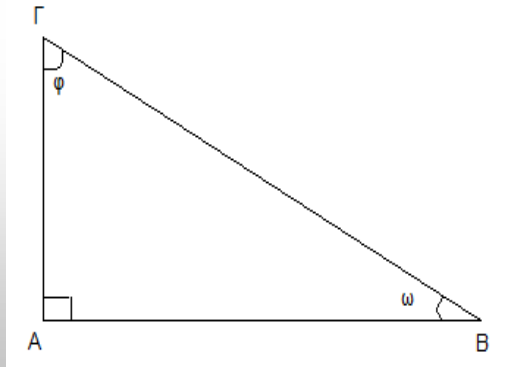
ΘΕΜΑ 9^ο

Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη, περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-2, \lambda)$ και $B(2, 8 - 3\lambda)$.

- Να αποδείξετε ότι $\lambda = 4$.
- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(x^2 - x) > -4$.
- Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $g(x) = f(|2x - 5| - 3)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

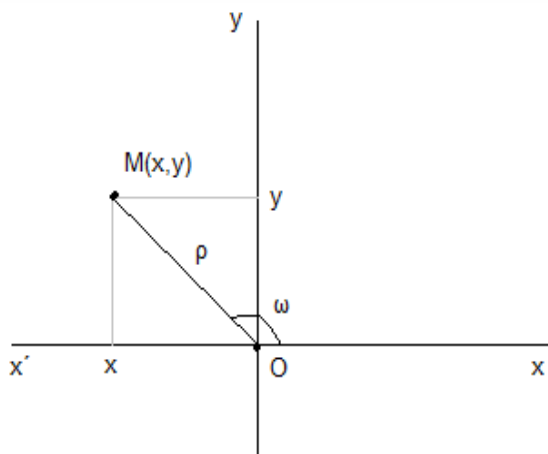
3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ



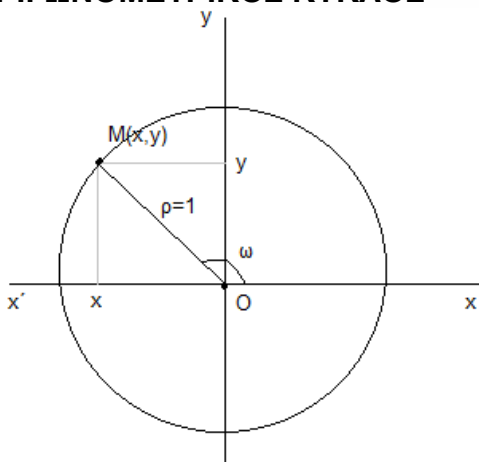
$$\begin{aligned}\eta\mu\omega &= \frac{AG}{BG} = \frac{\text{Απέναντι_κάθετη}}{\text{Υποτένουσα}} \\ \sigma\upsilon\nu\omega &= \frac{AB}{BG} = \frac{\text{Προσκείμενη_κάθετη}}{\text{Υποτένουσα}} \\ \varepsilon\phi\omega &= \frac{AG}{AB} = \frac{\text{Απέναντι_κάθετη}}{\text{Προσκείμενη_κάθετη}} \\ \sigma\phi\omega &= \frac{AB}{AG} = \frac{\text{Προσκείμενη_κάθετη}}{\text{Απέναντι_κάθετη}}\end{aligned}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΥΧΑΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ



$$\begin{aligned}\eta\mu\omega &= \frac{y}{\rho} \\ \sigma\upsilon\nu\omega &= \frac{x}{\rho} \quad \text{όπου } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varepsilon\phi\omega &= \frac{y}{x} \quad \text{η απόσταση του M από} \\ \sigma\phi\omega &= \frac{x}{y} \quad \text{την αρχή των αξόνων O}\end{aligned}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

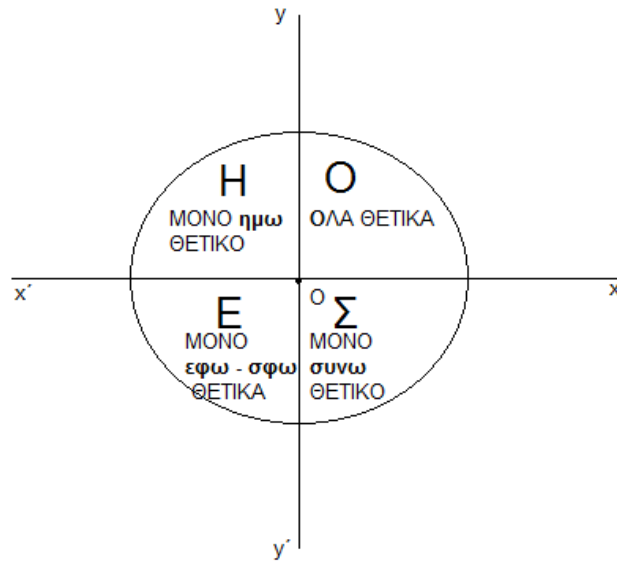


Για έναν σύντομο κατά προσέγγιση υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών χρησιμοποιούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο, ο κύκλος δηλ. που έχει κέντρο O και $\rho=1$. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα ισχύει :

- $\eta\mu\omega = y$
- $\sigma\upsilon\nu\omega = x$
- $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$ (ή $|\eta\mu\omega| \leq 1$)
- $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$ (ή $|\sigma\upsilon\nu\omega| \leq 1$).

ΤΑ ΠΡΟΣΗΜΑ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Από τον τριγωνομετρικό κύκλο προκύπτουν και τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Οι γωνίες εκτός από μοίρες, μετριοούνται και με ακτίνια (rad). Ένας κύκλος είναι 2π rad, οπότε προκύπτει ο τύπος που μετατρέπει τις μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα για μια γωνίας ω :

$$\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \quad \text{όπου η γωνία } \omega \text{ είναι } \mu^\circ \text{ και } \alpha \text{ rad. π.χ. η γωνία } \omega = 30^\circ \text{ είναι}$$

$$\frac{30}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow 6\alpha = \pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Έτσι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών του 1° τεταρτημορίου δίνονται από τον παρακάτω πίνακα :

Γωνία ω	$\omega = 0^\circ$ ή $\omega = 0 \text{ rad}$	$\omega = 30^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$	$\omega = 45^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$	$\omega = 60^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$	$\omega = 90^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$
$\eta\mu\omega$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sigma\upsilon\nu\omega$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\epsilon\varphi\omega$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται
$\sigma\varphi\omega$	Δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ΕΝΑΣ ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ ΤΟΥ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΠΙΝΑΚΑ

1^ο ΒΗΜΑ : Αρχικά γράφουμε :

Γωνία ω	$\omega = 0^\circ$ ή $\omega = 0rad$	$\omega = 30^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{6}rad$	$\omega = 45^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{4}rad$	$\omega = 60^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{3}rad$	$\omega = 90^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{2}rad$
ημω	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$
συνω					
εφω					
σφω					

2^ο ΒΗΜΑ : Συμπληρώνουμε κάτω από τις ρίζες κατά σειρά τους αριθμούς 0, 1, 2, 3, 4 και υπολογίζουμε το κάθε αποτέλεσμα.

Γωνία ω	$\omega = 0^\circ$ ή $\omega = 0rad$	$\omega = 30^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{6}rad$	$\omega = 45^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{4}rad$	$\omega = 60^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{3}rad$	$\omega = 90^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{2}rad$
ημω	$\frac{\sqrt{0}}{2} = \frac{0}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$
συνω					
εφω					
σφω					

3^ο ΒΗΜΑ : Οι τιμές του συνω είναι «ανάποδες» από τις τιμές του ημω

Γωνία ω	$\omega = 0^\circ$ ή $\omega = 0rad$	$\omega = 30^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{6}rad$	$\omega = 45^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{4}rad$	$\omega = 60^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{3}rad$	$\omega = 90^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{2}rad$
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφω					
σφω					

4° ΒΗΜΑ : Για την εφω ισχύει : $\varepsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ άρα :

Γωνία ω	$\omega = 0^\circ$ ή $\omega = 0rad$	$\omega = 30^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{6}rad$	$\omega = 45^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{4}rad$	$\omega = 60^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{3}rad$	$\omega = 90^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{2}rad$
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφω	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$	$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$	$\frac{1}{0} = -$ δεν ορίζεται
σφω					

5° ΒΗΜΑ : Οι τιμές της εφω είναι «ανάποδες» από τις τιμές της σφω

Γωνία ω	$\omega = 0^\circ$ ή $\omega = 0rad$	$\omega = 30^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{6}rad$	$\omega = 45^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{4}rad$	$\omega = 60^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{3}rad$	$\omega = 90^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{2}rad$
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	δεν ορίζεται
σφω	δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ ή $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

- $\eta\mu 0^\circ = 0$, $\eta\mu 90^\circ = 1$, $\eta\mu 180^\circ = 0$, $\eta\mu 270^\circ = -1$
- $\sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1$, $\sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0$, $\sigma\upsilon\nu 180^\circ = -1$, $\sigma\upsilon\nu 270^\circ = 0$

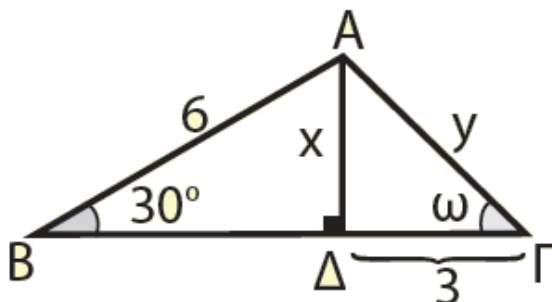
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ «ΜΕΓΑΛΩΝ» ΓΩΝΙΩΝ

- $\eta\mu(\kappa \cdot 360^\circ + \theta) = \eta\mu\theta$ ή σε ακτίνια $\eta\mu(2\kappa\pi + \theta) = \eta\mu\theta$
- $\sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360^\circ + \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$ ή σε ακτίνια $\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$
- $\varepsilon\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \theta) = \varepsilon\phi\theta$ ή σε ακτίνια $\varepsilon\phi(2\kappa\pi + \theta) = \varepsilon\phi\theta$
- $\sigma\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \theta) = \sigma\phi\theta$ ή σε ακτίνια $\sigma\phi(2\kappa\pi + \theta) = \sigma\phi\theta$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 58 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τα μήκη x, y και τη γωνία ω .



Λύση :

Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ορθογώνιο άρα : $\eta\mu B = \frac{A\Delta}{AB} \Leftrightarrow \eta\mu 30^\circ = \frac{x}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$

Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο άρα : $\epsilon\phi\Gamma = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \epsilon\phi\omega = \frac{x}{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi\omega = \frac{3}{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi\omega = 1$

άρα $\omega = 45^\circ$. Επίσης $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\Delta\Gamma}{AG} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{3}{y} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{y} \Leftrightarrow \sqrt{2}y = 6 \Leftrightarrow y = \frac{6}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \Leftrightarrow y = \frac{6\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = 3\sqrt{2}$$

2. (Άσκηση 4 σελ. 58 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να εκφράσετε σε rad γωνία :

- i. 30° ii. 120° iii. 1260° iv. -1485°

Λύση :

i. Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ για $\mu = 30^\circ$ και έχω :

$$\frac{30}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow 6\alpha = \pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad} . \text{ Άρα } \mu = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

ii. Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ για $\mu = 120^\circ$ και έχω :

$$\frac{120}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow 3\alpha = 2\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} . \text{ Άρα } \mu = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

iii. Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ για $\mu = 1260^\circ$ και έχω :

$$\frac{1260}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow 7 = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \alpha = 7\pi \text{ rad} . \text{ Άρα } \mu = 1260^\circ = 7\pi \text{ rad}$$

iv. Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ για $\mu = -1485^\circ$ και έχω :

$$\frac{-1485}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow -\frac{33}{4} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow 4\alpha = -33\pi \Leftrightarrow \alpha = -\frac{33\pi}{4} \text{ rad} . \text{ Άρα } \mu = -1485^\circ = -\frac{33\pi}{4} \text{ rad}$$

3. (Άσκηση 5 σελ. 58 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να μετατρέψετε σε μοίρες γωνία :

- i. $\frac{\pi}{10}rad$ ii. $\frac{5\pi}{6}rad$ iii. $\frac{91\pi}{3}rad$ iv. $100rad$

Λύση :

- i. Γνωρίζουμε ότι $2\pi rad = 360^\circ \Leftrightarrow \pi rad = 180^\circ$

$$\frac{\pi}{10}rad = \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ$$

ii. $\frac{5\pi}{6}rad = \frac{5 \cdot 180}{6} = 150^\circ$

iii. $\frac{91\pi}{3}rad = \frac{91 \cdot 180}{3} = 91 \cdot 60^\circ = 5460^\circ$

- iv. Από τον τύπο $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$, για $\alpha = 100$, έχουμε :
- $$\frac{\mu}{180} = \frac{100}{\pi} \Leftrightarrow \mu \cdot \pi = 18000 \Leftrightarrow \mu = \frac{18000}{\pi} \text{ μοίρες.}$$

4. (Άσκηση 6 σελ. 58 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας :

- i. 1830° ii. 2940° iii. 1980° iv. 3600°

Λύση :

- i. Θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους $\eta\mu(\kappa \cdot 360^\circ + \theta) = \eta\mu\theta$, $\sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360^\circ + \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$, $\epsilon\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \theta) = \epsilon\phi\theta$ και $\sigma\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \theta) = \sigma\phi\theta$

Αν κάνουμε τη διαίρεση $1830:360$ θα βρούμε πηλίκo 5 και υπόλοιπο 30.

Άρα ισχύει : $1830^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 30^\circ$ οπότε έχουμε :

$$\eta\mu 1830^\circ = \eta\mu(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 1830^\circ = \sigma\upsilon\nu(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon\phi 1830^\circ = \epsilon\phi(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \epsilon\phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\phi 1830^\circ = \sigma\phi(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sigma\phi 30^\circ = \sqrt{3}$$

- ii. Αν κάνουμε τη διαίρεση $2940:360$ θα βρούμε πηλίκo 8 και υπόλοιπο 60.

Άρα ισχύει : $2940^\circ = 8 \cdot 360^\circ + 60^\circ$ οπότε έχουμε :

$$\eta\mu 2940^\circ = \eta\mu(8 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2940^\circ = \sigma\upsilon\nu(8 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon\phi 2940^\circ = \epsilon\phi(8 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \epsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sigma\phi 2940^\circ = \sigma\phi(8 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sigma\phi 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- iii. Αν κάνουμε τη διαίρεση $1980:360$ θα βρούμε πηλίκo 5 και υπόλοιπο 180.

Άρα ισχύει : $1980^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 180^\circ$ οπότε έχουμε :

$$\begin{aligned}\eta\mu 1980^\circ &= \eta\mu(5 \cdot 360^\circ + 180^\circ) = \eta\mu 180^\circ = 0 \\ \sigma\upsilon\nu 1980^\circ &= \sigma\upsilon\nu(5 \cdot 360^\circ + 180^\circ) = \sigma\upsilon\nu 180^\circ = -1 \\ \epsilon\phi 1980^\circ &= \epsilon\phi(5 \cdot 360^\circ + 180^\circ) = \epsilon\phi 180^\circ = 0 \\ \sigma\phi 1980^\circ &= \sigma\phi(5 \cdot 360^\circ + 180^\circ) = \sigma\phi 180^\circ = - \text{ (δεν ορίζεται)}\end{aligned}$$

iv. Αν κάνουμε τη διαίρεση $3600:360$ θα βρούμε πηλίκο 10 και υπόλοιπο 0.

Άρα ισχύει : $3600^\circ = 10 \cdot 360^\circ + 0^\circ$ οπότε έχουμε :

$$\begin{aligned}\eta\mu 3600^\circ &= \eta\mu(10 \cdot 360^\circ + 0^\circ) = \eta\mu 0^\circ = 0 \\ \sigma\upsilon\nu 3600^\circ &= \sigma\upsilon\nu(10 \cdot 360^\circ + 0^\circ) = \sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1 \\ \epsilon\phi 3600^\circ &= \epsilon\phi(10 \cdot 360^\circ + 0^\circ) = \epsilon\phi 0^\circ = 0 \\ \sigma\phi 3600^\circ &= \sigma\phi(10 \cdot 360^\circ + 0^\circ) = \sigma\phi 0^\circ = - \text{ (δεν ορίζεται)}\end{aligned}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

5. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της γραμμής Α με τα ίσα τους στη γραμμή Β.

Γραμμή Α Γωνία ω σε μοίρες	Α. 30 ⁰	Β. 45 ⁰	Γ. 60 ⁰	Δ. 120 ⁰	Ε. 135 ⁰	ΣΤ. 150 ⁰	
Γραμμή Β Γωνία ω σε rad	1. $\frac{\pi}{3}$	2. $\frac{\pi}{4}$	3. $\frac{6\pi}{5}$	4. $\frac{3\pi}{4}$	5. $\frac{5\pi}{6}$	6. $\frac{2\pi}{3}$	7. $\frac{\pi}{6}$

6. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Γωνία ω	Πρόσημο			
	ημω	συνω	εφω	σφω
130 ⁰				
-100 ⁰				
87 ⁰				
-80 ⁰				

7. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

- | | |
|----------------------------|--|
| i. $\eta\mu 200^\circ > 0$ | ii. $\sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3} < 0$ |
| iii. $\eta\mu 3 > 0$ | iv. $\sigma\upsilon\nu 2 < 0$ |
| v. $\eta\mu 1 > 0$ | vi. $\epsilon\phi 6 > 0$ |

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Μια επίκεντρη γωνία ω βαίνει σε τόξο μήκους 20cm. Να εκφράσετε τη γωνία ω σε ακτίνια, αν η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = 5\text{cm}$.

9. Να εκφράσετε τη γωνία

- | | |
|----------------------------|------------------------------------|
| i. 120 ⁰ σε rad | ii. $\frac{3\pi}{4}$ rad σε μοίρες |
|----------------------------|------------------------------------|

10. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

- | | |
|---------------------|---------------------------|
| i. 765 ⁰ | ii. $\frac{49\pi}{6}$ rad |
|---------------------|---------------------------|

11. Να δείξετε ότι : $|2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu y| \leq 5$.

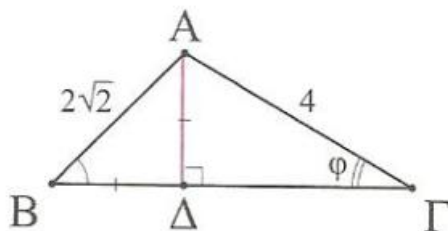
12. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων :

i. $A = 3\eta\mu x - 4\sigma\upsilon\nu y$ ii. $B = 2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu y$ iii. $\Gamma = 5 - 3\eta\mu^2 x$

13. Αν $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ και $\frac{\pi}{3} < y < \frac{\pi}{2}$, να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:

i. $A = \sigma\upsilon\nu(x+y)$ ii. $B = \epsilon\phi 3y$ iii. $\Gamma = \eta\mu(x-y)$

14. Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος να υπολογίσετε :



i. το ύψος ΑΔ ii. τη γωνία φ iii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

15. Να μετατρέψετε σε μοίρες τα τόξα :

i. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ ii. $\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, 2\pi$ iii. $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{18}$

16. Να μετατρέψετε σε ακτίνια (rad) τις γωνίες :

i. $120^\circ, 150^\circ, 135^\circ, 270^\circ$ ii. $10^\circ, 15^\circ, 12^\circ$

17. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

i. $A = \frac{2\eta\mu 30^\circ + 2\epsilon\phi 30^\circ \cdot \eta\mu 60^\circ + \epsilon\phi 45^\circ}{2\sigma\upsilon\nu 60^\circ - 2\sigma\phi 30^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ + \sigma\phi 45^\circ}$ ii. $B = \frac{2\eta\mu \frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} + 2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}}{\epsilon\phi \frac{\pi}{4} + \sqrt{3}\sigma\phi \frac{\pi}{3} + \sigma\phi \frac{\pi}{4}}$

iii. $\Gamma = \frac{3\epsilon\phi \frac{\pi}{3} + 2\eta\mu \frac{\pi}{3} - 3\sigma\phi \frac{\pi}{6} + 6\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}}{2\sigma\phi \frac{\pi}{6} + 2\epsilon\phi \frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} + 6\eta\mu \frac{\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}}$

18. Να βρείτε του τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών :

i. $\omega = \frac{41\pi}{4}$ ii. $\omega = \frac{601\pi}{6}$ iii. $\omega = \frac{901\pi}{3}$
iv. $\omega = \frac{61\pi}{6}$ v. $\omega = \frac{49\pi}{4}$ vi. $\omega = \frac{301\pi}{3}$

19. Να υπολογίσουμε τις τιμές των παραστάσεων :

i. $A = \frac{6\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sigma\upsilon\nu\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}\epsilon\phi\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \sigma\phi\left(8\pi + \frac{\pi}{4}\right)}$ ii. $B = \frac{2\eta\mu \frac{13\pi}{6} + \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu \frac{17\pi}{4} + 2\sigma\upsilon\nu \frac{61\pi}{3}}{\epsilon\phi \frac{17\pi}{4} + \sqrt{3}\sigma\phi \frac{25\pi}{3} + \sigma\phi \frac{33\pi}{4}}$

iii. $\Gamma = \frac{2\eta\mu \frac{13\pi}{6} + \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu \frac{17\pi}{4} + 2\sigma\upsilon\nu \frac{61\pi}{3}}{\epsilon\phi \frac{17\pi}{4} + \sqrt{3}\sigma\phi \frac{25\pi}{3} + \sigma\phi \frac{33\pi}{4}}$

3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

Απόδειξη :

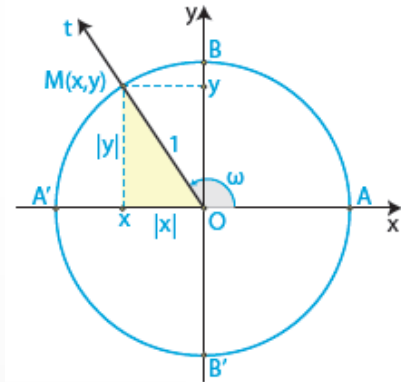
Αν $M(x, y)$ είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε θα είναι : $x = \sigma\upsilon\nu\omega$ και $y = \eta\mu\omega$

Επειδή όμως, $(OM) = 1$ και

$$(OM)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2, \text{ θα ισχύει :}$$

$$x^2 + y^2 = 1, \text{ οπότε θα έχουμε :}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$



2. $\varepsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ $\sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$

Απόδειξη :

Στο ίδιο σχήμα έχουμε : $\varepsilon\phi\omega = \frac{y}{x} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ (εφόσον $x = \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$)

$$\sigma\phi\omega = \frac{x}{y} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \text{ (εφόσον } y = \eta\mu\omega \neq 0 \text{)}$$

3. $\varepsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$

Απόδειξη :

Είναι :

$$\varepsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \text{ και } \sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \text{ (εφόσον } \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0 \text{ και } \eta\mu\omega \neq 0 \text{)}$$

$$\text{Επομένως : } \varepsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1$$

4. $\eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\phi^2\omega}{1 + \varepsilon\phi^2\omega}$ και $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\phi^2\omega}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 63 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $\eta\mu x = \frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

Λύση :

$$\begin{aligned} \text{Έχω} \quad \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x &= 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{25} + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x &= \frac{25}{25} - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \pm \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Όμως $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, άρα βρισκόμαστε στο 2^ο τεταρτημόριο όπου $\sigma\upsilon\nu x < 0$, άρα $\boxed{\sigma\upsilon\nu x = -\frac{4}{5}}$

Επίσης : $\varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon\phi x = -\frac{3}{4}}$ και

$$\varepsilon\phi x \cdot \sigma\phi x = 1 \Leftrightarrow \sigma\phi x = \frac{1}{\varepsilon\phi x} \Leftrightarrow \boxed{\sigma\phi x = -\frac{4}{3}}$$

2. (Άσκηση 2 σελ 63 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{2}{3}$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

Λύση :

$$\begin{aligned} \text{Έχω} \quad : \quad \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x &= 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + \frac{4}{9} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = 1 - \frac{4}{9} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \eta\mu^2 x &= \frac{9}{9} - \frac{4}{9} \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \eta\mu x = \pm \sqrt{\frac{5}{9}} \Leftrightarrow \eta\mu x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

Όμως $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, άρα βρισκόμαστε στο 3^ο τεταρτημόριο όπου $\eta\mu x < 0$, άρα $\boxed{\eta\mu x = -\frac{\sqrt{5}}{3}}$

Επίσης : $\varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon\phi x = \frac{\sqrt{5}}{2}}$ και

$$\varepsilon\phi x \cdot \sigma\phi x = 1 \Leftrightarrow \sigma\phi x = \frac{1}{\varepsilon\phi x} \Leftrightarrow \sigma\phi x = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \boxed{\sigma\phi x = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

3. (Άσκηση 3 σελ. 63 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $\varepsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

Λύση :

$$\text{Έχω} : \varepsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 3\eta\mu x = -\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x}{3}$$

$$\text{Όμως} : \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x}{3}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{9}\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \overset{3}{\sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu^2 x = 3} \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2 x = 3 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ όμως } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi, \text{ άρα βρισκόμαστε στο } 4^\circ \text{ τεταρτημόριο όπου}$$

$$\sigma\upsilon\nu x > 0, \text{ άρα } \boxed{\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

$$\text{Επίσης } \varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \eta\mu x = \varepsilon\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\eta\mu x = -\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Τέλος } \varepsilon\phi x \cdot \sigma\phi x = 1 \Leftrightarrow \sigma\phi x = \frac{1}{\varepsilon\phi x} \Leftrightarrow \sigma\phi x = -\frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sigma\phi x = -\frac{3\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \boxed{\sigma\phi x = -\sqrt{3}}$$

4. (Άσκηση 5 σελ. 63 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $\sigma\phi x = -2$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$.

Λύση:

$$\text{Έχω: } \varepsilon\phi x \cdot \sigma\phi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \frac{1}{\sigma\phi x} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \frac{1}{-2} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Από τον τύπο } \sigma\upsilon\nu^2 \omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\phi^2 \omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 \omega = \frac{1}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 \omega = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 \omega = \frac{1}{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 \omega = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \omega = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \omega = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ όμως } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

$$\text{άρα βρισκόμαστε στο } 4^\circ \text{ τεταρτημόριο άρα } \sigma\upsilon\nu x > 0, \text{ άρα } \boxed{\sigma\upsilon\nu x = \frac{2\sqrt{5}}{5}}.$$

$$\text{Επίσης } \varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \eta\mu x = \varepsilon\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \boxed{\eta\mu x = -\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

$$\text{Τελικά η παράσταση } \frac{2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{2\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}}{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{-\frac{4 \cdot 5}{5}}{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} = \frac{-4}{5 + 2\sqrt{5}}.$$

5. (Άσκηση 7 σελ. 63 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι, τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου με $x = 3\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y = 3\eta\mu\theta$, είναι σημεία κύκλου $O(0,0)$ κέντρου και ακτίνας $\rho=3$.

Λύση:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η απόσταση του σημείου $M(x, y)$ από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι ίση με 3. Έχουμε :

$$\begin{aligned} (OM) &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (3\eta\mu\theta)^2} = \sqrt{9\sigma\upsilon\nu^2\theta + 9\eta\mu^2\theta} = \\ &= \sqrt{9(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta)} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

6. (Άσκηση 8 σελ. 63 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν ισχύει $x = 2\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y = 3\eta\mu\theta$, να δείξετε ότι $9x^2 + 4y^2 = 36$.

Λύση:

$$\begin{aligned} \text{Έχω: } 9x^2 + 4y^2 = 36 &\Leftrightarrow 9(2\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + 4(3\eta\mu\theta)^2 = 36 \Leftrightarrow 9 \cdot 4\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4 \cdot 9\eta\mu^2\theta = 36 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 36\sigma\upsilon\nu^2\theta + 36\eta\mu^2\theta = 36 \Leftrightarrow 36(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta) = 36 \Leftrightarrow 36 \cdot 1 = 36 \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

7. (Άσκηση 10 σελ. 63 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι :

- i. $\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$
- ii. $\sigma\upsilon\nu^4\alpha - \eta\mu^4\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$

Λύση:

- i. Με τον περιορισμό ότι : $\eta\mu\alpha \neq 0$ και $1+\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha \neq -1$ έχω :

$$\begin{aligned} \frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} &= \frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} \stackrel{\text{γιαστί}}{\Leftrightarrow} \eta\mu^2\alpha = (1-\sigma\upsilon\nu\alpha)(1+\sigma\upsilon\nu\alpha) \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha = 1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

- ii. $\sigma\upsilon\nu^4\alpha - \eta\mu^4\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2 - (\eta\mu^2\alpha)^2 = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha)(\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha) = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha) \cdot 1 = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 \text{ που ισχύει.}$

8. (Άσκηση 11 σελ. 64 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι :

- i. $\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{2}{\eta\mu\theta}$
- ii. $\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1-\eta\mu\chi} + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\eta\mu\chi} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\chi}$

Λύση:

- i. Με τον περιορισμό ότι : $\eta\mu\theta \neq 0$ και $1+\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta \neq -1$ έχω :

$$\begin{aligned} \frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} &= \frac{2}{\eta\mu\theta} \stackrel{\cdot\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{\Leftrightarrow} \eta\mu^2\theta + (1+\sigma\upsilon\nu\theta)^2 = 2(1+\sigma\upsilon\nu\theta) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \eta\mu^2\theta + 1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta + 1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + 1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

- ii. Με τον περιορισμό ότι : $1-\eta\mu\chi \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi \neq 1$, $1+\eta\mu\chi \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi \neq -1$ και $\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{έχω: } \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1-\eta\mu\chi} + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\eta\mu\chi} &= \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\chi} \stackrel{\cdot(1-\eta\mu\chi)(1+\eta\mu\chi)\sigma\upsilon\nu\chi}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\chi(1+\eta\mu\chi) + \sigma\upsilon\nu^2\chi(1-\eta\mu\chi) = 2(1-\eta\mu\chi)(1+\eta\mu\chi) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi \cdot \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi \cdot \eta\mu\chi = 2(1-\eta\mu^2\chi) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 2 - 2\eta\mu^2\chi \Leftrightarrow 2\eta\mu^2\chi + 2\sigma\upsilon\nu^2\chi = 2 \Leftrightarrow \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 \\ &\text{που ισχύει.} \end{aligned}$$

9. (Άσκηση 3 σελ. 64 Β' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι : $\sqrt{\frac{1+\eta\mu\chi}{1-\eta\mu\chi}} - \sqrt{\frac{1-\eta\mu\chi}{1+\eta\mu\chi}} = 2\varepsilon\phi\chi$.

Λύση:

Έχω :

$$\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}} - \sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}} = 2\varepsilon\phi x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(1+\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}} - \sqrt{\frac{(1-\eta\mu x)(1-\eta\mu x)}{(1+\eta\mu x)(1-\eta\mu x)}} = 2\varepsilon\phi x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(1+\eta\mu x)^2}{1-\eta\mu^2 x}} - \sqrt{\frac{(1-\eta\mu x)^2}{1-\eta\mu^2 x}} = 2\varepsilon\phi x \text{ όμως } \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$$

$$\text{Άρα } \sqrt{\frac{(1+\eta\mu x)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} - \sqrt{\frac{(1-\eta\mu x)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = 2\varepsilon\phi x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(1+\eta\mu x)^2}}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x}} - \frac{\sqrt{(1-\eta\mu x)^2}}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = 2\varepsilon\phi x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|1+\eta\mu x|}{|\sigma\upsilon\nu x|} - \frac{|1-\eta\mu x|}{|\sigma\upsilon\nu x|} = 2\varepsilon\phi x. \text{ Όμως : } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ άρα βρισκόμαστε στο } 1^\circ \text{ και στο}$$

4^ο άρα ισχύει $\sigma\upsilon\nu x \geq 0$, οπότε $|\sigma\upsilon\nu x| = \sigma\upsilon\nu x$. Επίσης $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ άρα ισχύει $1 + \eta\mu x \geq 0$ και $1 - \eta\mu x \geq 0$. Άρα

$$\frac{|1+\eta\mu x|}{|\sigma\upsilon\nu x|} - \frac{|1-\eta\mu x|}{|\sigma\upsilon\nu x|} = 2\varepsilon\phi x \Leftrightarrow \frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2\varepsilon\phi x \Leftrightarrow \frac{1+\eta\mu x - 1 + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2\varepsilon\phi x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2\varepsilon\phi x \Leftrightarrow 2 \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2\varepsilon\phi x \text{ που ισχύει.}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

10. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα ίσα τους στη στήλη Β, ώστε να ισχύουν οι ταυτότητες.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\eta\mu^2\omega$	1. $\frac{1}{1+\varepsilon\phi^2\omega}$
Β. $\varepsilon\phi\omega$	2. $1-\sigma\upsilon\nu^2\omega$
Γ. $\sigma\phi\omega$	3. $\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$
Δ. $\sigma\upsilon\nu^2\omega$	4. $\frac{1}{\sigma\phi\omega}$
Ε. $1+\varepsilon\phi^2\omega$	5. $\frac{1}{\eta\mu^2\omega}$
	6. $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$

11. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

i. $\eta\mu^2 1 + \sigma\upsilon\nu^2 1 = 2$

ii. $\eta\mu 3 = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2 3}$

iii. $\sigma\upsilon\nu 2 = -\sqrt{1 - \eta\mu^2 2}$

iv. $\sigma\upsilon\nu 3 \cdot \varepsilon\phi 3 = \eta\mu 3$

v. $\varepsilon\phi 2012 \cdot \sigma\phi 2012 = 1$

vi. $\varepsilon\phi 10 = \frac{1}{\sigma\phi 10}$

vii. $\sigma\upsilon\nu^2 5 = \frac{1}{1 + \varepsilon\phi^2 5}$

viii. $\eta\mu^2 7 = \frac{1}{1 + \varepsilon\phi^2 7}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :**A. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ**

- 12.** Αν $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$ και $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .
- 13.** Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .
- 14.** Αν $\sigma\phi\omega = -\frac{5}{12}$ και $270^\circ < \omega < 360^\circ$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .
- 15.** Αν $\varepsilon\phi\omega = -\frac{4}{3}$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, να αποδείξετε ότι :
- $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$ και $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$
 - $\frac{5\eta\mu\omega - 15\sigma\upsilon\nu\omega}{6\varepsilon\phi\omega - 5\eta\mu 90^\circ} = -1$
- 16.** Για μια γωνία $\omega \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ισχύει : $5\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega - 6 = 0$
- Να αποδείξετε ότι : $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$
 - Να υπολογίσετε τους αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\omega, \varepsilon\phi\omega$ και $\sigma\phi\omega$.
- 17.** Αν είναι $3\sigma\upsilon\nu\chi + 4\eta\mu\chi = 5$, τότε :
- Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi, \varepsilon\phi\chi$ και $\sigma\phi\chi$.
 - Να βρείτε το τεταρτημόριο στο οποίο καταλήγει το τόξο χ .
- 18.** Αν είναι $3\eta\mu\chi - 4\sigma\upsilon\nu\chi = 5$, τότε :
- Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi, \varepsilon\phi\chi$ και $\sigma\phi\chi$.
 - Να βρείτε το τεταρτημόριο στο οποίο καταλήγει το τόξο χ .
- 19.** Αν για τη γωνία χ , ισχύει $3\sigma\upsilon\nu^2\chi + 4\eta\mu\chi + 1 = 0$, να βρείτε το $\eta\mu\chi$.
- 20.** Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου με $x=5\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y=5\eta\mu\theta$, είναι σημεία κύκλου κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho=5$.
- 21.** Αν $x=\eta\mu\theta$ και $y=\sigma\upsilon\nu^2\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ ανήκουν σε παραβολή, της οποίας να βρείτε την κορυφή.

22. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x , για τις οποίες να ισχύει συγχρόνως $\eta\mu x = \frac{2}{3}$ και

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{3}$$

23. Αν $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \alpha$, να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α τις παραστάσεις:

- i. $\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$ ii. $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x$

24. Αν $\eta\mu x = \frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να υπολογιστεί η παράσταση: $A = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\phi x + \sigma\phi x}$.

B. ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

25. Να δείξετε ότι: $\frac{1 - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha}$.

26. Να δείξετε ότι: $\eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\beta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$.

27. Να δείξετε ότι: $\frac{1 - \varepsilon\phi x}{1 + \varepsilon\phi x} = \frac{\sigma\phi x - 1}{\sigma\phi x + 1}$.

28. Να δείξετε ότι: $\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \varepsilon\phi\theta} - \frac{\eta\mu\theta}{1 + \sigma\phi\theta} = \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta$.

29. Να δείξετε ότι: $\frac{1 + \sigma\phi^5 x}{1 + \varepsilon\phi^5 x} = \left(\frac{1 + \sigma\phi x}{1 + \varepsilon\phi x}\right)^5$.

30. Αν $0 < x < \pi$, να δείξετε ότι: $\sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}} - \sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}} = -2\sigma\phi x$.

31. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$.

32. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^4\alpha}{\eta\mu^4\beta + 2\sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^4\beta}$.

33. Να αποδειχθεί ότι:

i. $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 + (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 = 2$

ii. $\frac{\eta\mu^3\alpha + \sigma\upsilon\nu^3\alpha}{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\eta\mu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu^3\alpha}{\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha} = 2$

iii. $\frac{1}{1 - \varepsilon\phi^2\alpha} + \frac{1}{1 - \sigma\phi^2\alpha} = 1$

iv. $\sigma\upsilon\nu^4\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha \cdot \left(\eta\mu^2\alpha + \frac{1}{\sigma\phi^2\alpha}\right) = 1$

- v. $\eta\mu^2\alpha \cdot \varepsilon\phi\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha \cdot \sigma\phi\alpha + 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = \varepsilon\phi\alpha + \sigma\phi\alpha$
vi. $\eta\mu^4x + \sigma\upsilon\nu^2x - \eta\mu^2x = \sigma\upsilon\nu^4x$
vii. $(\varepsilon\phi x + \sigma\phi x)^2 - (\varepsilon\phi x - \sigma\phi x)^2 = 4$

34. Να αποδειχθεί ότι :

- i. $\sigma\upsilon\nu^4x + \sigma\upsilon\nu^2x \cdot \eta\mu^2x + \eta\mu^2x = 1$
ii. $\sigma\upsilon\nu^4x + 2\eta\mu^2x - \eta\mu^4x = 1$
iii. $(\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta)^2 = 1$
iv. $(\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta)^2 = 1$
v. $\frac{\eta\mu^3x - \sigma\upsilon\nu^3x}{1 + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$
vi. $\frac{\eta\mu^3x + \sigma\upsilon\nu^3x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} - \frac{\eta\mu^3x - \sigma\upsilon\nu^3x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = 2$
vii. $\frac{(1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2}{(1 + \eta\mu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)} = 2$
viii. $\frac{\eta\mu^2x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x} - \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\phi^2x - 1} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$
ix. $\frac{1 - 3\eta\mu x}{1 - \eta\mu x} + \frac{2\eta\mu x - 1}{\sigma\upsilon\nu^2x} = -3\varepsilon\phi^2x$
x. $\frac{\varepsilon\phi x}{1 - \sigma\phi x} + \frac{\sigma\phi x}{1 - \varepsilon\phi x} = \frac{1 + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$
xi. $\frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1}{\varepsilon\phi x} = \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} - \frac{1}{\varepsilon\phi x}$

Γ. ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

35. Να αποδειχθεί ότι :

- i. $\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta + 2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \leq 2$
ii. $(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 \leq 2$
iii. $\left(3\sigma\upsilon\nu\alpha + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\right)^2 \geq 12$
iv. $-\sqrt{2} \leq \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x \leq \sqrt{2}$
v. $-13 \leq 5\eta\mu x + 12\sigma\upsilon\nu x \leq 13$

36. Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι : $\varepsilon\phi x + \sigma\phi x \geq 2$.

37. Αν $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να αποδείξετε ότι : $\varepsilon\phi x + \sigma\phi x \leq -2$.

3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Μέχρι στιγμής γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του 1^{ου} τεταρτημορίου (δηλαδή γωνιών από $0^\circ \rightarrow 90^\circ$ ή αλλιώς από $0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ rad}$), όπως δίνονται από τον πίνακα. Θα μάθουμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μεγαλύτερων γωνιών. Αυτή η διαδικασία γίνεται με αναγωγή στο 1^ο τεταρτημόριο.

ΑΠΟ ΤΟ 2^ο ΣΤΟ 1^ο

Δυο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές αν έχουν άθροισμα 180° ή $\pi \text{ rad}$. Δηλαδή οι γωνίες ω και $180^\circ - \omega$ ή ω και $\pi - \omega$ είναι παραπληρωματικές και ισχύει :

➤ $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$	ή	$\eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega$
➤ $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$	ή	$\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
➤ $\epsilon\phi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\phi\omega$	ή	$\epsilon\phi(\pi - \omega) = -\epsilon\phi\omega$
➤ $\sigma\phi(180^\circ - \omega) = -\sigma\phi\omega$	ή	$\sigma\phi(\pi - \omega) = -\sigma\phi\omega$

Δηλαδή :

Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς :

- i. $\eta\mu 120^\circ$ ii. $\sigma\upsilon\nu 135^\circ$ iii. $\epsilon\phi 150^\circ$ iv. $\eta\mu \frac{5\pi}{6}$ v. $\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3}$ vi. $\epsilon\phi \frac{3\pi}{4}$

Λύση :

- i. $\eta\mu 120^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- ii. $\sigma\upsilon\nu 135^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 45^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- iii. $\epsilon\phi 150^\circ = \epsilon\phi(180^\circ - 30^\circ) = -\epsilon\phi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- iv. $\eta\mu \frac{5\pi}{6} = \eta\mu(\pi - \frac{\pi}{6}) = \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- v. $\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
- vi. $\epsilon\phi \frac{3\pi}{4} = \epsilon\phi(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\epsilon\phi \frac{\pi}{4} = -1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

2. Να υπολογιστούν οι παρακάτω τριγωνομετρικοί αριθμοί :

- i. $\eta\mu 150^\circ$ ii. $\sigma\upsilon\nu 135^\circ$ iii. $\epsilon\phi 120^\circ$ iv. $\eta\mu \frac{2\pi}{3}$ v. $\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6}$ vi. $\epsilon\phi \frac{3\pi}{4}$

ΑΠΟ ΤΟ 3^ο ΣΤΟ 1^ο

Γωνίες που διαφέρουν κατά 180° ή $\pi \text{ rad}$ είναι οι ω και $180^\circ + \omega$ ή ω και $\pi + \omega$ για τις οποίες ισχύει :

➤ $\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$	ή	$\eta\mu(\pi + \omega) = -\eta\mu\omega$
➤ $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$	ή	$\sigma\upsilon\nu(\pi + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
➤ $\epsilon\phi(180^\circ + \omega) = \epsilon\phi\omega$	ή	$\epsilon\phi(\pi + \omega) = \epsilon\phi\omega$
➤ $\sigma\phi(180^\circ + \omega) = \sigma\phi\omega$	ή	$\sigma\phi(\pi + \omega) = \sigma\phi\omega$

Δηλαδή :

Οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° ή $\pi \text{ rad}$, έχουν ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη, ενώ έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς :

i. $\eta\mu 210^\circ$ ii. $\sigma\upsilon\nu 225^\circ$ iii. $\epsilon\phi 240^\circ$ iv. $\eta\mu \frac{5\pi}{4}$ v. $\sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{6}$ vi. $\epsilon\phi \frac{4\pi}{3}$

Λύση :

i. $\eta\mu 210^\circ = \eta\mu(180^\circ + 30^\circ) = -\eta\mu 30^\circ = -\frac{1}{2}$

ii. $\sigma\upsilon\nu 225^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 45^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

iii. $\epsilon\phi 240^\circ = \epsilon\phi(180^\circ + 60^\circ) = \epsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3}$

iv. $\eta\mu \frac{5\pi}{4} = \eta\mu(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\eta\mu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

v. $\sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

vi. $\epsilon\phi \frac{4\pi}{3} = \epsilon\phi(\pi + \frac{\pi}{3}) = \epsilon\phi \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

4. Να υπολογιστούν οι παρακάτω τριγωνομετρικοί αριθμοί :

i. $\eta\mu 225^\circ$ ii. $\sigma\upsilon\nu 240^\circ$ iii. $\epsilon\phi 210^\circ$ iv. $\eta\mu \frac{7\pi}{6}$ v. $\sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3}$ vi. $\epsilon\phi \frac{5\pi}{4}$

ΑΠΟ ΤΟ 4° ΣΤΟ 1°

Έστω ότι μια γωνία ω βρίσκεται στο 1° τεταρτημόριο. Τότε η αντίθετη της $-\omega$ θα βρίσκεται στο 4° τεταρτημόριο και ισχύει :

- $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\epsilon\phi(-\omega) = -\epsilon\phi\omega$
- $\sigma\phi(-\omega) = -\sigma\phi\omega$

Δηλαδή :

Οι γωνίες ω και $-\omega$ έχουν ίδιο συνημίτονο και αντιθέτους τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5. Να υπολογιστούν οι παρακάτω τριγωνομετρικοί αριθμοί :

- i. $\eta\mu 330^\circ$ ii. $\sigma\upsilon\nu 300^\circ$ iii. $\epsilon\phi 315^\circ$

Λύση :

- i. $\eta\mu 330^\circ = \eta\mu(360^\circ - 30^\circ) = \eta\mu(-30^\circ) = -\eta\mu 30^\circ = -\frac{1}{2}$
- ii. $\sigma\upsilon\nu 300^\circ = \sigma\upsilon\nu(360^\circ - 60^\circ) = \sigma\upsilon\nu(-60^\circ) = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$
- iii. $\epsilon\phi 315^\circ = \epsilon\phi(360^\circ - 45^\circ) = \epsilon\phi(-45^\circ) = -\epsilon\phi 45^\circ = -1$

ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ $\frac{\pi}{2}$ (90°)

Γωνίες με αθροισμα $\frac{\pi}{2}$ (ή 90°) δηλαδή συμπληρωματικές, είναι οι ω και $\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$ ή αλλιώς ω και $(90^\circ - \omega)$ και ισχύει :

- | | | |
|--|--------|--|
| ➤ $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega$ | επίσης | $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - (-\omega)\right) = \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$ |
| ➤ $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\omega$ | επίσης | $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - (-\omega)\right) = \eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$ |
| ➤ $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\phi\omega$ | επίσης | $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - (-\omega)\right) = \sigma\phi(-\omega) = -\sigma\phi\omega$ |
| ➤ $\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \epsilon\phi\omega$ | επίσης | $\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - (-\omega)\right) = \epsilon\phi(-\omega) = -\epsilon\phi\omega$ |

Δηλαδή :

Στις συμπληρωματικές γωνίες το ημίτονο καθεμίας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη καθεμίας με τη συνεφαπτομένη της άλλης και αντίστροφα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

6. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα ίσα τους στοιχεία της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\eta\mu(\pi+\theta)$	1. $\eta\mu\theta$
Β. $\epsilon\varphi(\pi-\theta)$	2. $-\sigma\varphi\theta$
Γ. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	3. $-\eta\mu\theta$
Δ. $\sigma\varphi(-\theta)$	4. $\sigma\varphi\theta$
Ε. $\sigma\varphi(\pi+\theta)$	5. $-\epsilon\varphi\theta$
ΣΤ. $\sigma\upsilon\nu(-\theta)$	6. $\epsilon\varphi\theta$
	7. $\sigma\upsilon\nu\theta$

7. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα ίσα τους στοιχεία της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\eta\mu 25^{\circ}$	1. $\eta\mu 65^{\circ}$
Β. $\sigma\upsilon\nu 72^{\circ}$	2. $-\sigma\varphi 65^{\circ}$
Γ. $\epsilon\varphi 10^{\circ}$	3. $\sigma\upsilon\nu 65^{\circ}$
Δ. $\sigma\varphi 115^{\circ}$	4. $\eta\mu 18^{\circ}$
	5. $\sigma\varphi 80^{\circ}$

8. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

i. $\eta\mu \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ii. $\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

iii. $\epsilon\varphi \frac{3\pi}{4} = 1$

iv. $\eta\mu 120^{\circ} = \frac{1}{2}$

v. $\sigma\upsilon\nu 120^{\circ} = -\frac{1}{2}$

vi. $\sigma\upsilon\nu 150^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

9. Να απλοποιηθεί η παράσταση : $A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{11\pi}{2}+\theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2}-\theta\right)}$

Λύση :

Θα απλοποιήσουμε κάθε παράγοντα ξεχωριστά και έχουμε :

$$\triangleright \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\triangleright \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi + \pi}{2} - \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\eta\mu\theta$$

$$\triangleright \eta\mu\left(\frac{11\pi}{2} + \theta\right) = \eta\mu\left(\frac{10\pi + \pi}{2} + \theta\right) = \eta\mu\left(5\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = \eta\mu\left(4\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right)\right) = \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\triangleright \sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{12\pi + \pi}{2} - \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(6\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \eta\mu\theta$$

Άρα η τιμή της παράστασης είναι :

$$A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{11\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta \cdot (-\eta\mu\theta)}{-\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \eta\mu\theta} = 1$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ :

10. (Άσκηση 1 σελ. 70 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας :

i. 1200° ii. -2850°

Λύση :

i. Αν διαιρέσουμε το 1200 με το 360 έχουμε $1200^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 120^\circ$ Άρα

$$\triangleright \eta\mu 1200^\circ = \eta\mu(3 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \eta\mu 120^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangleright \sigma\upsilon\nu 1200^\circ = \sigma\upsilon\nu(3 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \sigma\upsilon\nu 120^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 60^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\triangleright \epsilon\phi 1200^\circ = \epsilon\phi(3 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \epsilon\phi 120^\circ = \epsilon\phi(180^\circ - 60^\circ) = -\epsilon\phi 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\triangleright \sigma\phi 1200^\circ = \sigma\phi(3 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \sigma\phi 120^\circ = \sigma\phi(180^\circ - 60^\circ) = -\sigma\phi 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ii. Αν διαιρέσουμε το 2850 με το 360 έχουμε $2850^\circ = 7 \cdot 360^\circ + 330^\circ$ άρα :

$$\triangleright \eta\mu(-2850^\circ) = -\eta\mu 2850^\circ = -\eta\mu(7 \cdot 360^\circ + 330^\circ) = -\eta\mu 330^\circ = -\eta\mu(360^\circ - 30^\circ) = -\eta\mu(-30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\triangleright \sigma\upsilon\nu(-2850^\circ) = \sigma\upsilon\nu 2850^\circ = \sigma\upsilon\nu(7 \cdot 360^\circ + 330^\circ) = \sigma\upsilon\nu 330^\circ = \sigma\upsilon\nu(360^\circ - 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu(-30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangleright \epsilon\phi(-2850^\circ) = -\epsilon\phi 2850^\circ = -\epsilon\phi(7 \cdot 360^\circ + 330^\circ) = -\epsilon\phi 330^\circ = -\epsilon\phi(360^\circ - 30^\circ) = -\epsilon\phi(-30^\circ) = \epsilon\phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\triangleright \sigma\phi(-2850^\circ) = -\sigma\phi 2850^\circ = -\sigma\phi(7 \cdot 360^\circ + 330^\circ) = -\sigma\phi 330^\circ = -\sigma\phi(360^\circ - 30^\circ) = -\sigma\phi(-30^\circ) = \sigma\phi 30^\circ = \sqrt{3}$$

11. (Άσκηση 2 σελ. 70 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας :

i. $\frac{187\pi}{6} \text{ rad}$ ii. $\frac{21\pi}{4} \text{ rad}$

Λύση :

i. Αν διαιρέσουμε το 187 με το 6 έχουμε : $187 = 6 \cdot 31 + 1$ άρα :

$$\begin{aligned} \text{➤ } \eta\mu \frac{187\pi}{6} &= \eta\mu \frac{(6 \cdot 31 + 1)\pi}{6} = \eta\mu \left(31\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \eta\mu \left(30\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \right) = \eta\mu \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= -\eta\mu \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } \sigma\upsilon\nu \frac{187\pi}{6} &= \sigma\upsilon\nu \frac{(6 \cdot 31 + 1)\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu \left(31\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sigma\upsilon\nu \left(30\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sigma\upsilon\nu \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } \varepsilon\phi \frac{187\pi}{6} &= \varepsilon\phi \frac{(6 \cdot 31 + 1)\pi}{6} = \varepsilon\phi \left(31\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \varepsilon\phi \left(30\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \right) = \varepsilon\phi \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \varepsilon\phi \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } \sigma\phi \frac{187\pi}{6} &= \sigma\phi \frac{(6 \cdot 31 + 1)\pi}{6} = \sigma\phi \left(31\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sigma\phi \left(30\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sigma\phi \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \sigma\phi \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

ii. Αν διαιρέσουμε το 21 με το 4 έχουμε : $21 = 4 \cdot 5 + 1$ άρα :

$$\begin{aligned} \text{➤ } \eta\mu \frac{21\pi}{4} &= \eta\mu \frac{(4 \cdot 5 + 1)\pi}{4} = \eta\mu \left(5\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \eta\mu \left(4\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \right) = \eta\mu \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= -\eta\mu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } \sigma\upsilon\nu \frac{21\pi}{4} &= \sigma\upsilon\nu \frac{(4 \cdot 5 + 1)\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu \left(5\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sigma\upsilon\nu \left(4\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sigma\upsilon\nu \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{➤ } \varepsilon\phi \frac{21\pi}{4} = \varepsilon\phi \frac{(4 \cdot 5 + 1)\pi}{4} = \varepsilon\phi \left(5\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \varepsilon\phi \left(4\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \right) = \varepsilon\phi \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \varepsilon\phi \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\text{➤ } \sigma\phi \frac{21\pi}{4} = \sigma\phi \frac{(4 \cdot 5 + 1)\pi}{4} = \sigma\phi \left(5\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sigma\phi \left(4\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sigma\phi \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sigma\phi \frac{\pi}{4} = 1$$

12. (Άσκηση 3 σελ. 70 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι :

i. $\eta\mu A = \eta\mu(B + \Gamma)$ ii. $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = 0$

iii. $\eta\mu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{2}$ iv. $\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \eta\mu \frac{B + \Gamma}{2}$

Λύση :

- i. Σε κάθε τρίγωνο ισχύει : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \pi \Leftrightarrow \hat{A} = \pi - \hat{B} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{A} = \pi - (\hat{B} + \hat{\Gamma})$
 Άρα $\eta\mu A = \eta\mu(\pi - (B + \Gamma)) = \eta\mu(B + \Gamma)$
- ii. Ομοίως : $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = \sigma\upsilon\nu(\pi - (B + \Gamma)) + \sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) =$
 $= -\sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) + \sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = 0$
- iii. Ισχύει : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \pi \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2}$, άρα :
 $\eta\mu \frac{A}{2} = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B + \Gamma}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{2}$
- iv. Ομοίως : $\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B + \Gamma}{2}\right) = \eta\mu \frac{B + \Gamma}{2}$

13. (Άσκηση 4 σελ. 70 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να απλοποιήσετε την παράσταση : $\frac{\sigma\upsilon\nu(-\alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha)}{\eta\mu(-\alpha) \cdot \eta\mu(90^\circ + \alpha)}$

Λύση :

- $\sigma\upsilon\nu(-\alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$
- $\eta\mu(-\alpha) = -\eta\mu\alpha$
- $\eta\mu(90^\circ + \alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$

Επομένως έχουμε : $\frac{\sigma\upsilon\nu(-\alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha)}{\eta\mu(-\alpha) \cdot \eta\mu(90^\circ + \alpha)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot (-\sigma\upsilon\nu\alpha)}{-\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \sigma\phi\alpha$

14. (Άσκηση 5 σελ. 70 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι : $\frac{\epsilon\phi(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)}{\eta\mu(13\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu(-x) \cdot \sigma\phi\left(\frac{21\pi}{2} - x\right)} = -1$

Λύση :

- $\epsilon\phi(\pi - x) = -\epsilon\phi x$
- $\sigma\upsilon\nu(2\pi + x) = \sigma\upsilon\nu x$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{(4 \cdot 2 + 1)\pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\eta\mu x$
- $\eta\mu(13\pi + x) = \eta\mu(12\pi + \pi + x) = \eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x$
- $\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$
- $\sigma\phi\left(\frac{21\pi}{2} - x\right) = \sigma\phi\left(\frac{(10 \cdot 2 + 1)\pi}{2} - x\right) = \sigma\phi\left(10\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \epsilon\phi x$

Επομένως έχουμε : $\frac{\epsilon\phi(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)}{\eta\mu(13\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu(-x) \cdot \sigma\phi\left(\frac{21\pi}{2} - x\right)} = \frac{-\epsilon\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot (-\eta\mu x)}{-\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \epsilon\phi x} = -1$

15. (Άσκηση 6 σελ. 70 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι έχει σταθερή τιμή η παράσταση :

$$\eta\mu^2(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Λύση :

- $\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$
- $\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$
- $\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$
- $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως έχουμε : } & \eta\mu^2(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \\ & = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \end{aligned}$$

16. (Άσκηση 2 σελ. 71 Β' ομάδας σχολικού βιβλίου)

$$\text{Να αποδείξετε ότι : } \frac{\eta\mu(5\pi + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(7\pi - \omega) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)}{\sigma\phi(5\pi + \omega) \cdot \eta\mu(7\pi - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)} = \eta\mu^2 \omega - 1$$

Λύση :

- $\eta\mu(5\pi + \omega) = \eta\mu(4\pi + \pi + \omega) = \eta\mu(\pi + \omega) = -\eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(7\pi - \omega) = \sigma\upsilon\nu(6\pi + \pi - \omega) = \sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
- $\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\left(\frac{(2 \cdot 2 + 1)\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{(2 \cdot 3 + 1)\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(3\pi + \frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{2} + \omega\right) =$
 $= \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\phi(5\pi + \omega) = \sigma\phi(4\pi + \pi + \omega) = \sigma\phi(\pi + \omega) = \sigma\phi\omega$
- $\eta\mu(7\pi - \omega) = \eta\mu(6\pi + \pi - \omega) = \eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{(2 \cdot 2 + 1)\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\phi\left(\frac{(2 \cdot 3 + 1)\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\phi\left(3\pi + \frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\phi\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{2} + \omega\right) =$
 $= \sigma\phi\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\epsilon\phi\omega$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως έχουμε : } & \frac{\eta\mu(5\pi + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(7\pi - \omega) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)}{\sigma\phi(5\pi + \omega) \cdot \eta\mu(7\pi - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)} = \\ & = \frac{-\eta\mu\omega \cdot (-\sigma\upsilon\nu\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \eta\mu\omega}{\sigma\phi\omega \cdot \eta\mu\omega \cdot \eta\mu\omega \cdot (-\epsilon\phi\omega)} = -\sigma\upsilon\nu^2 \omega \stackrel{\substack{\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1 \Leftrightarrow \\ \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1 - \eta\mu^2 \omega}}{=} = -(1 - \eta\mu^2 \omega) = \eta\mu^2 \omega - 1. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

17. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω , όταν :

i. $\omega = 330^\circ$ ii. $\omega = 660^\circ$ iii. $\omega = 405^\circ$ iv. $\omega = 300^\circ$

18. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω , όταν :

i. $\omega = \frac{2\pi}{3}$ ii. $\omega = \frac{3\pi}{4}$ iii. $\omega = \frac{5\pi}{6}$ iv. $\omega = \frac{19\pi}{6}$ v. $\omega = \frac{22\pi}{3}$

19. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω , όταν :

i. $\omega = \frac{23\pi}{4}$ ii. $\omega = \frac{89\pi}{6}$ iii. $\omega = \frac{23\pi}{6}$ iv. $\omega = \frac{43\pi}{2}$ v. $\omega = \frac{29\pi}{3}$

20. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i. $A = \frac{\eta\mu(9\pi + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(19\pi - \theta) \cdot \epsilon\phi(29\pi + \theta) \cdot \sigma\phi(93\pi - \theta)}{\eta\mu(7\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(17\pi + \theta) \cdot \epsilon\phi(27\pi - \theta) \cdot \sigma\phi(37\pi + \theta)}$

ii. $B = \frac{\eta\mu(11\pi + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(21\pi - \theta) \cdot \epsilon\phi(31\pi + \theta) \cdot \sigma\phi(41\pi - \theta)}{\eta\mu(13\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(23\pi + \theta) \cdot \epsilon\phi(33\pi - \theta) \cdot \sigma\phi(43\pi + \theta)}$

21. Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{\eta\mu(\pi - \alpha)}{\epsilon\phi(\pi + \alpha)} \cdot \frac{\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu(2\pi - \alpha)}{\eta\mu(4\pi - \alpha)} = \eta\mu\alpha$

ii. $\frac{\eta\mu(3\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(5\pi + \theta) \cdot \epsilon\phi(7\pi + \theta) \cdot \sigma\phi(9\pi - \theta)}{\eta\mu(2\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(4\pi - \theta) \cdot \epsilon\phi(6\pi - \theta) \cdot \sigma\phi(8\pi + \theta)} = 1$

iii. $\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{5\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} + \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{5\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} - \theta\right)} = -1$

iv. $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \eta\mu(\pi - \alpha) + \sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \epsilon\phi\alpha$

v. $\frac{\sigma\upsilon\nu^2(\pi - \alpha) + \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sigma\upsilon\nu(\pi + \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - \alpha)}{\epsilon\phi^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sigma\phi^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \sigma\upsilon\nu^2\alpha$

22. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $A = \frac{\eta\mu(-\theta) \cdot \epsilon\phi(\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi + \theta)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \eta\mu(\pi - \theta)}$

ii. $B = \frac{\eta\mu(180^\circ + \theta) \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \theta) \epsilon\phi(360^\circ + \theta)}{\eta\mu(360^\circ + \theta) \epsilon\phi(180^\circ + \theta) \eta\mu(180^\circ - \theta)}$

23. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \eta\mu^2(13\pi + \omega) + \eta\mu^2\left(\frac{11\pi}{2} + \omega\right)$

24. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$\begin{aligned} \text{i. } A &= \frac{\eta\mu\left(\frac{9\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{19\pi}{2} - \theta\right) \cdot \varepsilon\phi\left(\frac{29\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{39\pi}{2} - \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{17\pi}{2} + \theta\right) \cdot \varepsilon\phi\left(\frac{27\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{37\pi}{2} + \theta\right)} \\ \text{ii. } B &= \frac{\eta\mu\left(\frac{91\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{191\pi}{2} + \theta\right) \cdot \varepsilon\phi\left(\frac{219\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{391\pi}{2} + \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{73\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{173\pi}{2} - \theta\right) \cdot \varepsilon\phi\left(\frac{273\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{373\pi}{2} - \theta\right)} \end{aligned}$$

25. Να δείξετε ότι: $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) + \eta\mu^2\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$

26. Να δείξετε ότι: $\eta\mu^4 \frac{\pi}{12} + \eta\mu^4 \frac{5\pi}{12} = 1 - 2\eta\mu^2 \frac{\pi}{12} \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{12}$

27. Να δείξετε ότι: $0 < \frac{\varepsilon\phi(\pi - x)}{\sigma\phi(\pi - x) - \varepsilon\phi x} < 1$

28. Να αποδείξετε ότι :

- i. $\eta\mu^2 70^\circ + \eta\mu^2 20^\circ + 3\eta\mu^2 110^\circ + \sigma\upsilon\nu^5 50^\circ + \sigma\upsilon\nu^5 130^\circ + 3\sigma\upsilon\nu^2 70^\circ = 4$
- ii. $\frac{\eta\mu 40^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 70^\circ}{\eta\mu 20^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 50^\circ} + \frac{\eta\mu 10^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 55^\circ}{\eta\mu 35^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 80^\circ} + \frac{\varepsilon\phi 15^\circ \cdot \sigma\phi 65^\circ}{\varepsilon\phi 25^\circ \cdot \sigma\phi 75^\circ} = 3$
- iii. $\eta\mu 1^\circ + \eta\mu 2^\circ + \dots + \eta\mu 89^\circ = \sigma\upsilon\nu 1^\circ + \sigma\upsilon\nu 2^\circ + \dots + \sigma\upsilon\nu 89^\circ$
- iv. $\varepsilon\phi 10^\circ \cdot \varepsilon\phi 15^\circ \cdot \dots \cdot \varepsilon\phi 75^\circ \cdot \varepsilon\phi 80^\circ = 1$
- v. $\varepsilon\phi 1^\circ \cdot \varepsilon\phi 2^\circ \cdot \dots \cdot \varepsilon\phi 89^\circ = 1$

29. Να δείξετε ότι : $\frac{2\sigma\upsilon\nu^2(2015\pi - x) - 1}{1 - 2\eta\mu(x - \pi) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} - \frac{\eta\mu^2\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) - 1}{1 - \eta\mu^2(2016\pi - x)} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(x - 2015\pi)}$

30. Να δείξετε ότι : $\frac{2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 1}{1 - 2\eta\mu(180^\circ + x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} - \frac{\eta\mu^2\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 1}{1 - \eta\mu^2(720^\circ - x)} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(3\pi - x)}$

31. Αν $\varepsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και ισχύει $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{\eta\mu(\pi + x) \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \varepsilon\phi(-x)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}.$$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

32. Δίνεται γωνία x με $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, για την οποία ισχύει :

$$15\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(7\pi - x) - 4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) = 12. \text{ Να υπολογίσετε :}$$

- i. τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x ,

ii. την τιμή της παράστασης : $A = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{15\pi}{2} + x\right) + 2\sigma\upsilon\nu(17\pi + x)}{3\varepsilon\phi\left(\frac{11\pi}{2} - x\right) + 4\sigma\phi\left(x - \frac{17\pi}{2}\right)}.$

33. Δίνεται γωνία x με $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ και η παράσταση :

$$A = \frac{\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) - \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi + x)}{\eta\mu(5\pi - x) + \eta\mu(7\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)}.$$

- i. Να δείξετε ότι : $A = \varepsilon\phi x$.

ii. Αν ισχύει ότι : $A = \frac{\eta\mu 10^\circ + \sigma\upsilon\nu 160^\circ}{\sigma\upsilon\nu 20^\circ - \eta\mu 170^\circ} - \frac{\eta\mu 40^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ}{\eta\mu 70^\circ + \sigma\upsilon\nu 50^\circ}$, να βρείτε σε ποιο

τεταρτημόριο ανήκει η τελική πλευρά της γωνίας x .

- iii. Να βρείτε το $\eta\mu x$ και το $\sigma\upsilon\nu x$

34. Δίνεται γωνία x για την οποία ισχύει : $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}.$

i. Να βρείτε τα $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ και $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$

ii. Να βρείτε το $\eta\mu\left(\frac{41\pi}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{14\pi}{3} + x\right) + x\right).$

iii. Αν επιπλέον ισχύει ότι $|12x - 7\pi| < 3\pi$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{6} - x\right).$

3.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A , λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει ότι :

- $x + T \in A$ και $x - T \in A$
- $f(x + T) = f(x)$ και $f(x - T) = f(x)$.

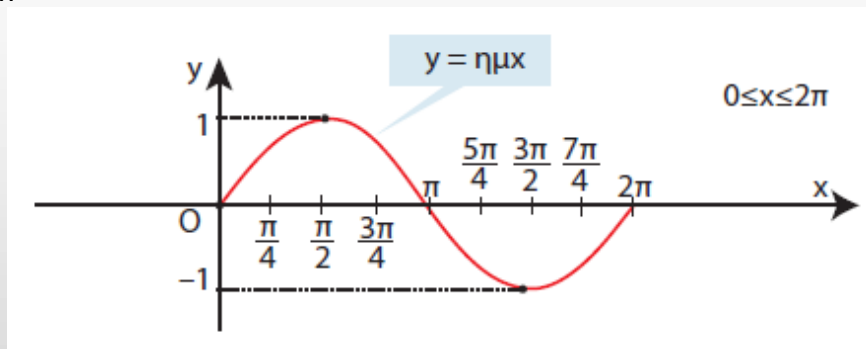
Ο αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f . Οι πιο γνωστές περιοδικές συναρτήσεις είναι οι $f(x) = \eta\mu x$, $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $f(x) = \varepsilon\phi x$ τις οποίες και θα μελετήσαμε.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \eta\mu x$

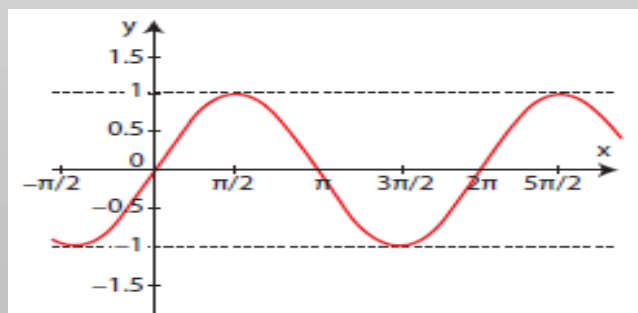
Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ έχει **πεδίο ορισμού** $A = \mathbb{R}$, είναι **περιοδική** με **περίοδο** $T = 2\pi$, είναι **περιττή συνάρτηση** άρα ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A = \mathbb{R}$ (πράγματι : $f(-x) = \eta\mu(-x) = -\eta\mu x = -f(x)$ για κάθε $x \in A = \mathbb{R}$), άρα η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ στο διάστημα μιας περιόδου $T = 2\pi$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1 μεγ.	0	-1 ελαχ.	0

Έτσι προκύπτει και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ στο διάστημα μιας περιόδου $T = 2\pi$



Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$ η γραφική της παράσταση έχει την ίδια μορφή και στα διαστήματα $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$, $[-2\pi, 0]$, $[-4\pi, -2\pi]$ κτλ.



Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$

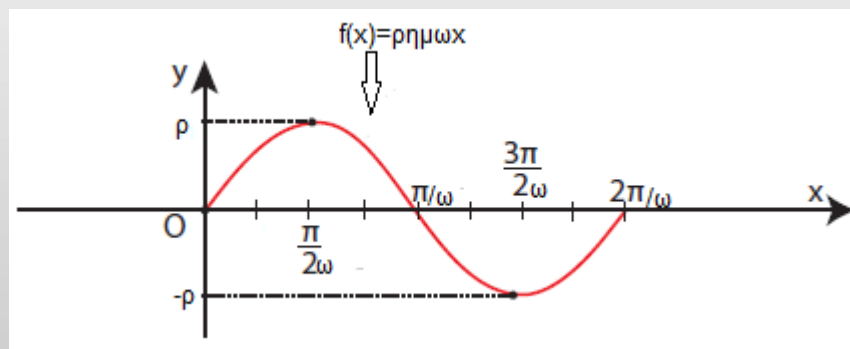
Η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$ με $\rho, \omega > 0$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$, έχει μέγιστο το ρ και ελάχιστο το $-\rho$. Για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$ δίνουμε στο x τις βασικές τιμές $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ και 2π αφού όμως πρώτα τις διαιρέσουμε με τον αριθμό ω . Δηλαδή : $0, \frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}$ και $\frac{2\pi}{\omega}$, έτσι ο βασικός πίνακας της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = \eta\mu x$	0	1	0	-1	0

γίνεται για την $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$:

x	0	$\frac{\pi}{2\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
$f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$	0	ρ	0	$-\rho$	0

και η αντίστοιχη γραφική παράσταση της $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$ στο διάστημα $\Delta = \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$ παίρνει τη μορφή :



Παρατηρήσεις :

- Αν έχω να σχεδιάσω τη συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x + \alpha$, τότε σχεδιάζουμε πρώτα την $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$ και μετατοπίζουμε τη γραφική παράσταση της f προς τα πάνω αν $\alpha > 0$ ή προς τα κάτω αν $\alpha < 0$, κατά α μονάδες.
- Αν έχω να σχεδιάσω τη συνάρτηση $f(x) = -\rho \cdot \eta\mu\omega x$, τότε σχεδιάζουμε πρώτα την $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$ και μετά παίρνουμε τη συμμετρική της ως προς τον άξονα $x'x$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**1. (Άσκηση 1 σελ. 81 Α' ομάδας)**

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, κάθε φορά στο ίδιο σύστημα αξόνων.

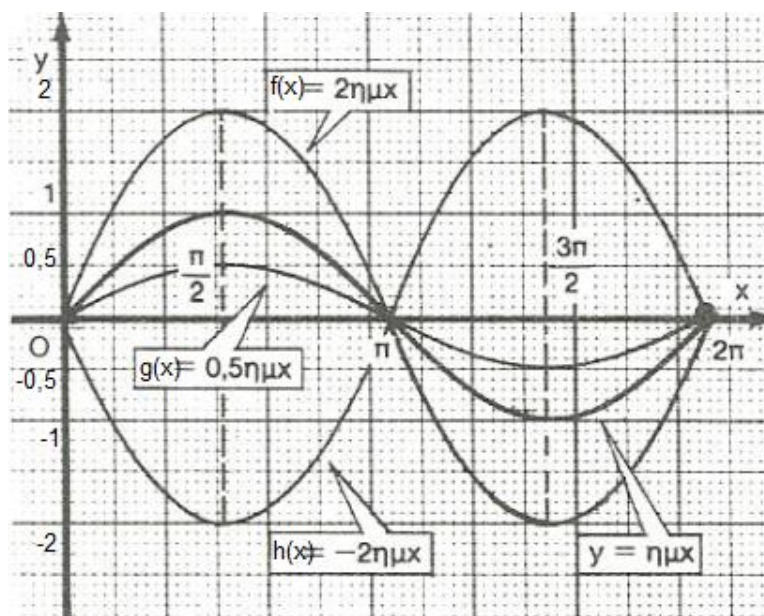
i. $f(x) = 2\eta\mu x$, $g(x) = 0,5\eta\mu x$, $h(x) = -2\eta\mu x$, $0 \leq x \leq 2\pi$

Λύση :

i. Για τις συναρτήσεις $f(x) = 2\eta\mu x$, $g(x) = 0,5\eta\mu x$, $h(x) = -2\eta\mu x$ ισχύει : $T = 2\pi$ άρα σχηματίζουμε τον πίνακα :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
$f(x) = 2\eta\mu x$	0	2	0	-2	0
$g(x) = 0,5\eta\mu x$	0	0,5	0	-0,5	0
$h(x) = -2\eta\mu x$	0	-2	0	2	0

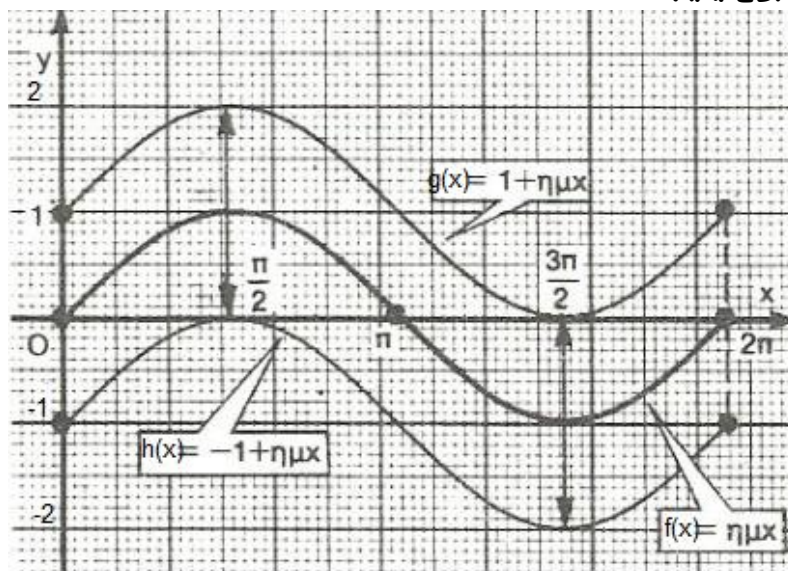
Οπότε προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων :

**2. (Άσκηση 2 σελ. 81 Α' ομάδας)**

Σε ένα σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ και στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = 1 + \eta\mu x$ και $h(x) = -1 + \eta\mu x$.

Λύση :

Η γραφική παράσταση της $g(x) = 1 + \eta\mu x$ προκύπτει αν μεταφέρουμε κατακόρυφα κατά μια μονάδα προς τα πάνω τη γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$, ενώ της $h(x) = -1 + \eta\mu x$ αν μεταφέρουμε κατακόρυφα κατά μια μονάδα προς τα κάτω τη γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$.



3. (Άσκηση 3 σελ. 81 Α' ομάδας)

Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$$f(x) = \eta\mu x \quad \text{και} \quad g(x) = \eta\mu 3x \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

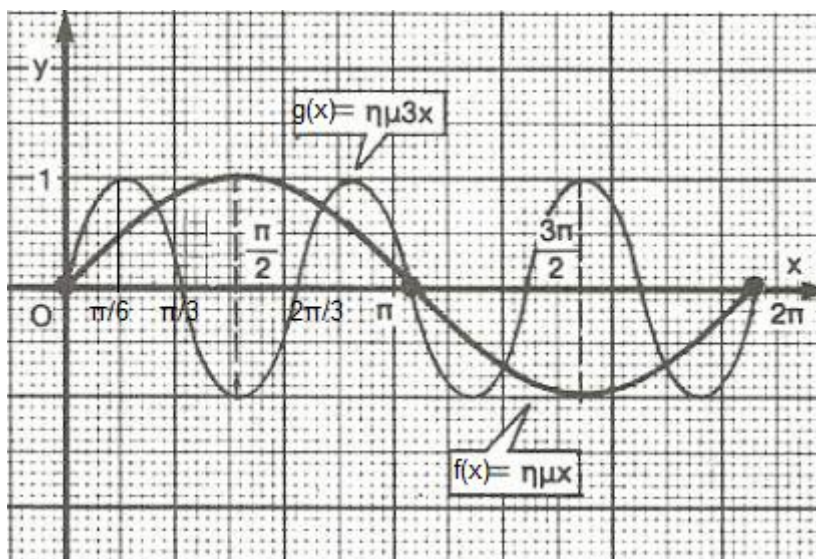
Λύση :

Η συνάρτηση $g(x) = \eta\mu 3x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$, άρα τις βασικές τιμές

$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ και 2π θα τις διαιρέσουμε με το 3. Δηλαδή : $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ και $\frac{2\pi}{3}$, έτσι ο βασικός πίνακας της συνάρτησης $g(x) = \eta\mu 3x$:

$3x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$g(x) = \eta\mu 3x$	0	1	0	-1	0

Έτσι οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \eta\mu 3x$ είναι :



4. (Άσκηση 5 σελ. 81 Α' ομάδας)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu \frac{x}{2}$. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδος της εν λόγω συνάρτησης; Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x)$ σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

Λύση:

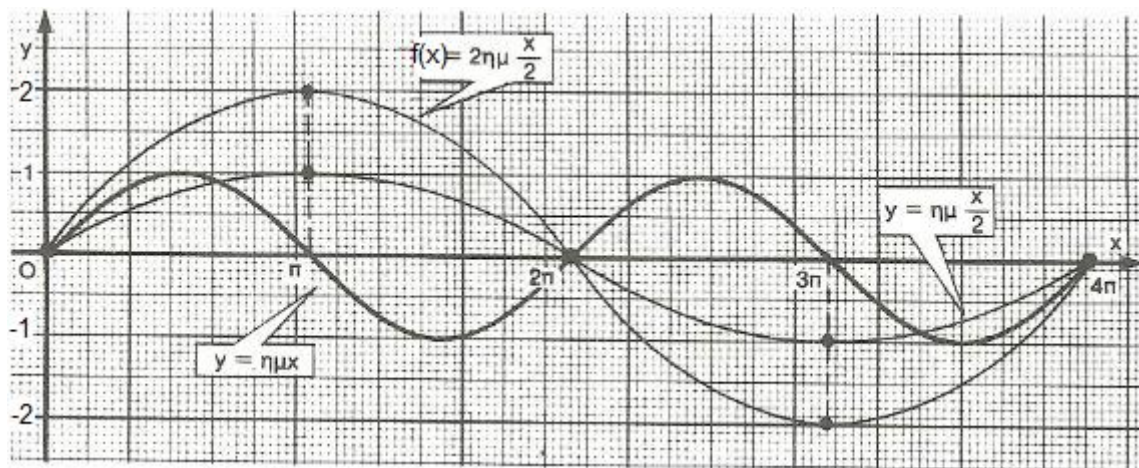
Η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu \frac{x}{2}$ είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \eta\mu \omega x$, με $\rho = 2$ και $\omega = \frac{1}{2}$. Άρα έχει μέγιστη τιμή $\rho = 2$ και ελάχιστη τιμή $-\rho = -2$. Η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, άρα τις βασικές τιμές $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ και 2π θα τις διαιρέσουμε

με το $\frac{1}{2}$ ή αλλιώς θα τις πολλαπλασιάσουμε επί 2 δηλαδή: $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ και 4π , έτσι ο

βασικός πίνακας της συνάρτησης $f(x) = 2\eta\mu \frac{x}{2}$:

$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	π	2π	3π	4π
$f(x) = 2\eta\mu \frac{x}{2}$	0	2	0	-2	0

Με τη βοήθεια του πίνακα σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2\eta\mu \frac{x}{2}$:

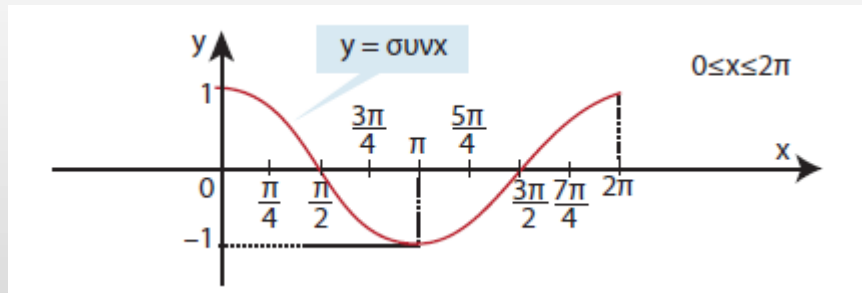


Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

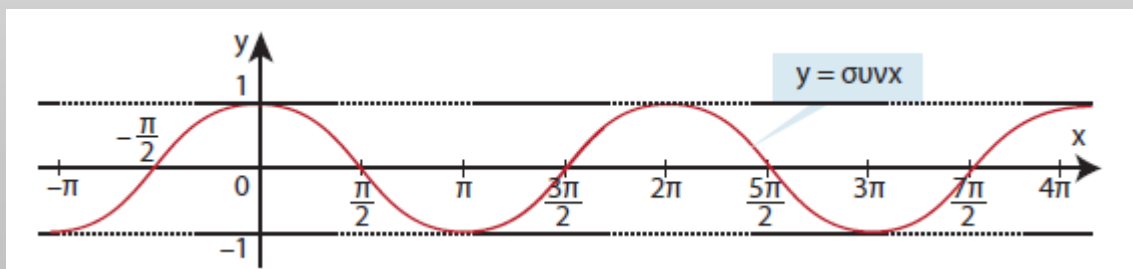
Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει **πεδίο ορισμού** $A = \mathbb{R}$, είναι **περιοδική** με **περίοδο** $T=2\pi$, είναι **άρτια συνάρτηση** άρα ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in A = \mathbb{R}$ (πράγματι : $f(-x) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x = f(x)$ για κάθε $x \in A = \mathbb{R}$), άρα η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$. Η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα μιας περιόδου $T=2\pi$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sigma\upsilon\nu x$	1 μεγ.	0	-1 ελαχ.	0	1 μεγ.

Έτσι προκύπτει και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα μιας περιόδου $T=2\pi$



Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδική με περίοδο $T=2\pi$ η γραφική της παράσταση έχει την ίδια μορφή και στα διαστήματα $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$, $[-2\pi, 0]$, $[-4\pi, -2\pi]$ κτλ.



Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$

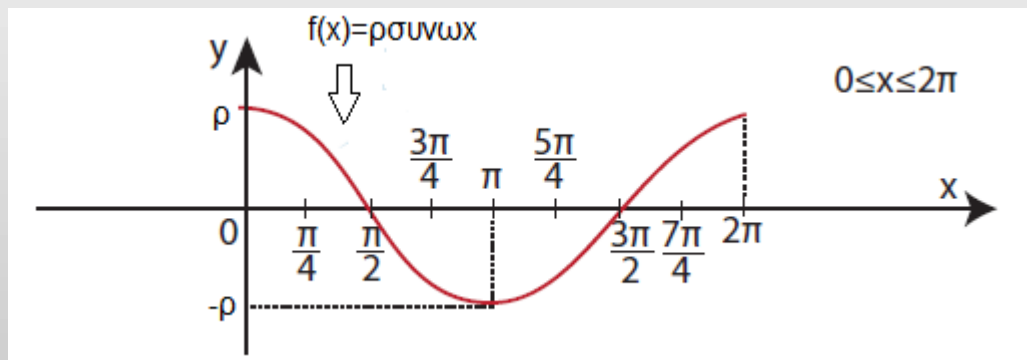
Η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$ με $\rho, \omega > 0$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$, έχει μέγιστο το ρ και ελάχιστο το $-\rho$. Για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$ δίνουμε στο x τις βασικές τιμές $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ και 2π αφού όμως πρώτα τις διαιρέσουμε με τον αριθμό ω . Δηλαδή : $0, \frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}$ και $\frac{2\pi}{\omega}$, έτσι ο βασικός πίνακας της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	1	0	-1	0	1

γίνεται για την $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$:

x	0	$\frac{\pi}{2\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
$f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$	ρ	0	$-\rho$	0	ρ

και η αντίστοιχη γραφική παράσταση της $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$ στο διάστημα $\Delta = \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$ παίρνει τη μορφή :



Παρατηρήσεις :

- Αν έχω να σχεδιάσω τη συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x + \alpha$, τότε σχεδιάζουμε πρώτα την $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$ και μετατοπίζουμε τη γραφική παράσταση της f προς τα πάνω αν $\alpha > 0$ ή προς τα κάτω αν $\alpha < 0$, κατά α μονάδες.
- Αν έχω να σχεδιάσω τη συνάρτηση $f(x) = -\rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$, τότε σχεδιάζουμε πρώτα την $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$ και μετά παίρνουμε τη συμμετρική της ως προς τον άξονα x ' x .

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5. (Άσκηση 1 σελ. 81 Α' ομάδας)

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, κάθε φορά στο ίδιο σύστημα αξόνων.

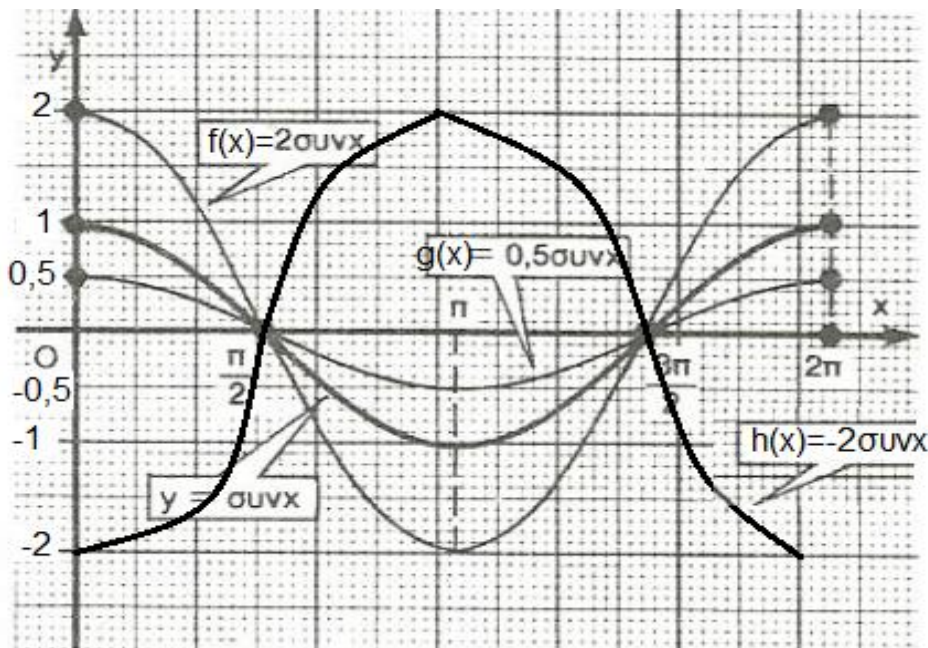
ii. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = 0,5\sigma\upsilon\nu x$, $h(x) = -2\sigma\upsilon\nu x$ $0 \leq x \leq 2\pi$

Λύση :

ii. Για τις συναρτήσεις $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = 0,5\sigma\upsilon\nu x$, $h(x) = -2\sigma\upsilon\nu x$ ισχύει : $T = 2\pi$ άρα σχηματίζουμε τον πίνακα :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sigma\upsilon\nu x$	1	0	-1	0	1
$f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$	2	0	-2	0	2
$g(x) = 0,5\sigma\upsilon\nu x$	0,5	0	-0,5	0	0,5
$h(x) = -2\sigma\upsilon\nu x$	-2	0	2	0	-2

Οπότε προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων :



6. (Άσκηση 4 σελ. 81 Α' ομάδας)

Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$ $0 \leq x \leq 2\pi$

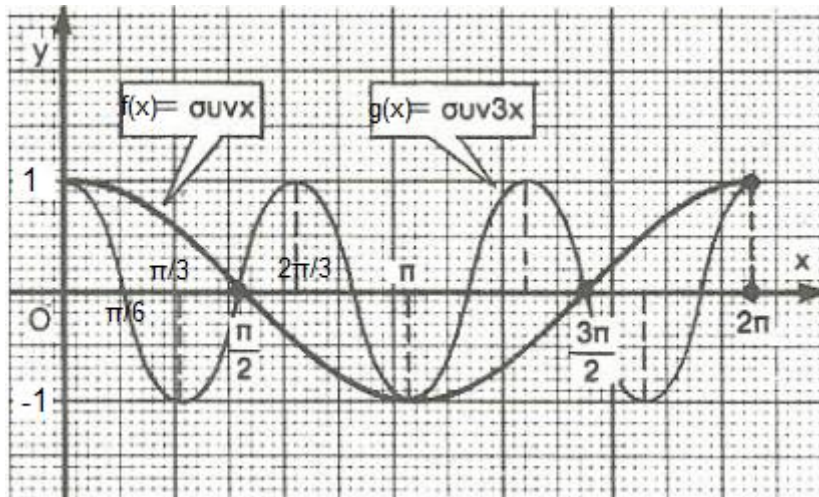
Λύση :

Η συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$, άρα τις βασικές τιμές

$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ και 2π θα τις διαιρέσουμε με το 3. Δηλαδή : $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ και $\frac{2\pi}{3}$, έτσι ο βασικός πίνακας της συνάρτησης $g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$:

$3x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$	1	0	-1	0	1

Έτσι οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$ είναι :



7. (Άσκηση 6 σελ. 82 Α' ομάδας)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδος της εν λόγω συνάρτησης; Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x)$ σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

Λύση :

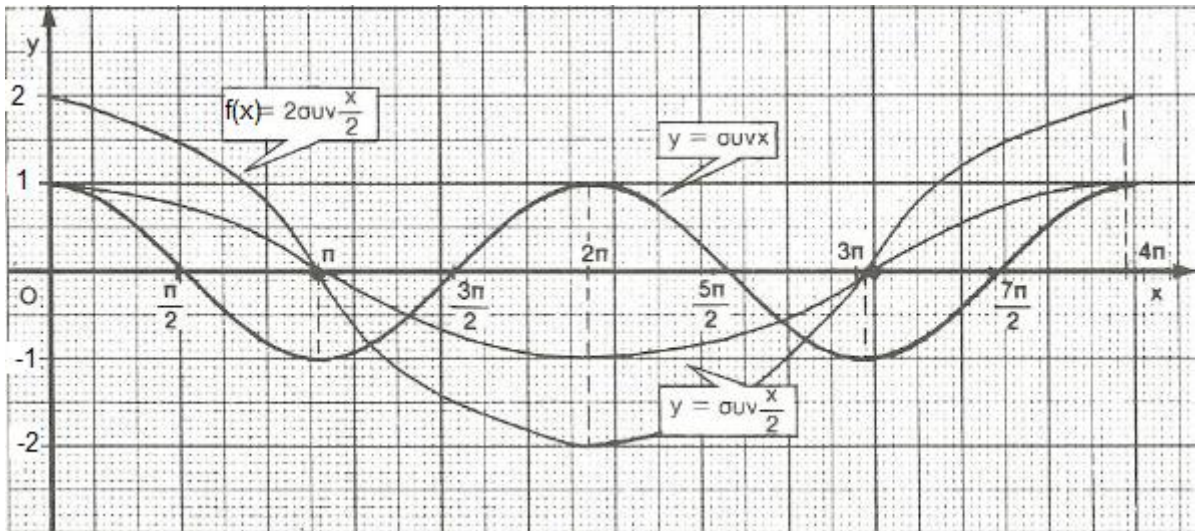
Η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$ είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu \omega x$, με $\rho = 2$ και $\omega = \frac{1}{2}$. Άρα έχει μέγιστη τιμή $\rho = 2$ και ελάχιστη τιμή $-\rho = -2$. Η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, άρα τις βασικές τιμές $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ και 2π θα τις διαιρέσουμε

με το $\frac{1}{2}$ ή αλλιώς θα τις πολλαπλασιάσουμε επί 2 δηλαδή : $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ και 4π , έτσι ο

βασικός πίνακας της συνάρτησης $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$:

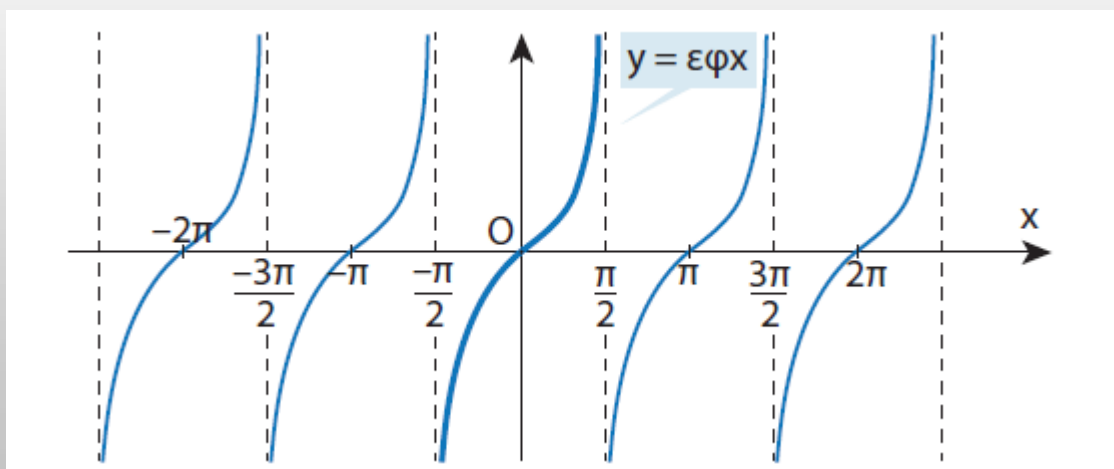
$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	π	2π	3π	4π
$f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$	2	0	-2	0	2

Με τη βοήθεια του πίνακα σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$:



Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \varepsilon\phi x$

Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$ έχει **πεδίο ορισμού** $A = \mathbb{R} - \left\{ x / x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$, είναι **περιοδική** με **περίοδο** $T=\pi$, είναι **περιττή συνάρτηση** άρα ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A = \mathbb{R}$ (πράγματι : $f(-x) = \varepsilon\phi(-x) = -\varepsilon\phi x = -f(x)$ για κάθε $x \in A$), άρα η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων. Ορίζεται στο διάστημα $\Delta = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ αλλά και σε κάθε διάστημα της μορφής $\Delta_\kappa = \left(\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ στα οποία είναι γνησίως αύξουσα και δεν έχει ακρότατα. Τέλος έχει ασύμπτωτες τις κατακόρυφες ευθείες $x = -\frac{\pi}{2}$ και $x = \frac{\pi}{2}$ και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα :



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

8. (Άσκηση 7 σελ. 82 Α' ομάδας)

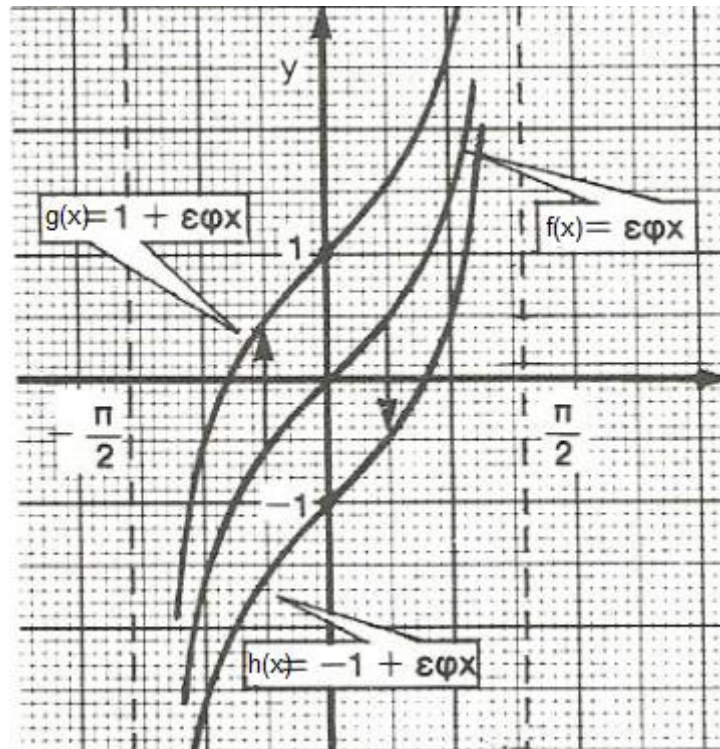
Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \varepsilon\phi x$ ii. $g(x) = 1 + \varepsilon\phi x$ iii. $h(x) = -1 + \varepsilon\phi x$

στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Λύση :

Η γραφική παράσταση της $g(x) = 1 + \varepsilon\phi x$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = \varepsilon\phi x$ κατά μια μονάδα προς τα πάνω, ενώ της $h(x) = -1 + \varepsilon\phi x$ κατά μια μονάδα προς τα κάτω. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

9. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

i. Αν η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο T , τότε

$f(x+T) = \dots = \dots$

ii. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει σύνολο τιμών το

iii. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$ λέγεται

iv. Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $R_1 = \{x \in R / \dots\}$

v. Η συνάρτηση $f(x) = \rho\eta\mu\omega x$, $\rho, \omega > 0$ έχει περίοδο $T = \dots$, μέγιστη τιμήκαι ελάχιστη τιμή

10. i. Να συμπληρώσετε με τα σύμβολα $\uparrow, \downarrow$ τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α. Αν $f(x) = \eta\mu x$, τότε $f \dots [0, \frac{\pi}{2}]$.

β. Αν $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, τότε $f \dots [\pi, 2\pi]$.

γ. Αν $f(x) = \epsilon\phi x$, τότε $f \dots (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

δ. Αν $f(x) = -2\eta\mu x$, τότε $f \dots [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

- ii. Να συμπληρώσετε με τα σύμβολα $<, >$ τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α. Αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, τότε $\sigma\upsilon\nu\alpha \dots \sigma\upsilon\nu\beta$

β. Αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, τότε $\epsilon\phi\alpha \dots \epsilon\phi\beta$

γ. Αν $\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{3\pi}{2}$, τότε $\eta\mu\alpha \dots \eta\mu\beta$

δ. Αν $1 < \alpha < 1,5$, τότε $\eta\mu\alpha \dots \eta\mu 1$

ε. $\sigma\upsilon\nu 1 \dots \sigma\upsilon\nu 2$

στ. Αν $x \in (2, 3)$, τότε $\eta\mu 3 \dots \eta\mu x \dots \eta\mu 2$

ζ. Αν $x \in (0, \frac{\pi}{4})$, τότε $\epsilon\phi x \dots \epsilon\phi 2x$

11. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ).

i. Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

ii. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι άρτια.

iii. Η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$ έχει σύνολο τιμών το $[-2, 2]$.

iv. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$ έχει βασική περίοδο το 2π .

v. Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

12. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές.

i. $f(x) = \eta\mu 2x + x$

ii. $f(x) = \eta\mu 5x + \eta\mu 3x$

iii. $f(x) = \eta\mu x + \epsilon\phi x$

13. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες.

i. $f(x) = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x + 1$

ii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu 2x$

14. Να αποδείξετε ότι :

i. η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 1$ έχει περίοδο τον αριθμό $T = 2\pi$.

ii. η συνάρτηση $f(x) = 3\epsilon\phi x + \sigma\phi x$ έχει περίοδο τον αριθμό $T = \pi$.

15. Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο των συναρτήσεων :

- i. $f(x) = 4\eta\mu x$
- ii. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$
- iii. $f(x) = -3\eta\mu 3x$
- iv. $f(x) = 5\sigma\upsilon\nu 3x$

16. Να βρείτε την περίοδο των συναρτήσεων :

- i. $f(x) = 3\eta\mu 2x$
- ii. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 3x$
- iii. $f(x) = 5\eta\mu \frac{x}{2}$
- iv. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{3}$

17. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu 2x$ $0 \leq x \leq 2\pi$
- ii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$ $0 \leq x \leq 2\pi$
- iii. $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = 3\eta\mu x$ $h(x) = -\eta\mu x$
- iv. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$ $h(x) = -\sigma\upsilon\nu x$
- v. $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu x + 2$ $h(x) = \eta\mu x - 1$
- vi. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + 1$ $h(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - 1$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu \frac{x}{2}$

- i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού Α της f
- ii. Να βρείτε τα ακρότατα της f
- iii. Να βρείτε την περίοδο της f
- iv. Να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f καθώς και της συνάρτησης $g(x) = -f(x)$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x$

- i. Να βρείτε τα ακρότατα της f
- ii. Να βρείτε την περίοδο της f
- iii. Να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f
- iv. Να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $-f$
- v. Να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $|f|$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(\pi - 2x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

- i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3\eta\mu 2x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f
- ii. Να βρείτε την περίοδο και τα ακρότατα της f
- iii. Να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f
- iv. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 4$ έχει λύση.

21. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x}{3}$ διέρχεται από το σημείο $M(2\pi, -2)$
- Να βρείτε την περίοδο και τα ακρότατα της f
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f
22. Αν η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x}{\beta}$ με $\alpha, \beta > 0$ έχει μέγιστο το 2 και περίοδο τον αριθμό $T=6\pi$, να βρείτε :
- Τον τύπο της συνάρτησης
 - Τις τιμές $f(2\pi)$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$
23. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu 2x$ με $\alpha > 0$ η οποία έχει μέγιστο το 3.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και την τιμή του α .
 - Να βρείτε την περίοδο της f
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f καθώς και της συνάρτησης $g(x) = -f(x)$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 4$ είναι αδύνατη.
24. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \kappa + 3 + 2\eta\mu \frac{(2\lambda + 1)x}{3}$ και $g(x) = 6\lambda + 10 - 3\sigma\upsilon\nu \frac{(\kappa - 2)x}{4}$. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ αν είναι γνωστό ότι έχουν την ίδια μέγιστη τιμή και η περίοδος της f είναι τριπλάσια από την περίοδο της g .
25. Να εξετάσετε, αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιοδικές και να βρείτε την περίοδο τους.
- $f(x) = \eta\mu 2x$
 - $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{3}$
 - $f(x) = \varepsilon\phi \frac{\pi x}{2}$
26. Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:
- $f(x) = 3\eta\mu 2x$
 - $f(x) = -\sigma\upsilon\nu \frac{x}{3}$
27. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:
- $f(x) = -2 + \eta\mu x$
 - $f(x) = \sigma\upsilon\nu \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
 - $f(x) = 1 + \eta\mu \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
 - $f(x) = 3\eta\mu \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
28. Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις :
29. Αν η συνάρτηση $f(x) = (2 - \alpha) \cdot \eta\mu(\beta x)$, $\alpha > 2$ και $\beta > 0$ έχει περίοδο το $\frac{\pi}{2}$ και μέγιστη τιμή το 3, να βρείτε τα α και β .

30. Έστω η συνάρτηση : $f(x) = \frac{2}{3}\eta\mu\frac{x}{3}$.

- Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .
- Να βρείτε την περίοδο της f .
- Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών και τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους ίσο με τη περίοδο της f .
- Να λύσετε γραφικά: α) Την εξίσωση $f(x)=0$, στο $[0,6\pi]$
β) Την ανίσωση $f(x)>0$, στο $[0,6\pi]$.

31. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=|\eta\mu x|$ στο διάστημα $[0,2\pi]$.

32. Η θερμοκρασία σε βαθμούς κελσίου μιας ημέρας σε ένα χώρο περιγράφεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση $\Theta = 10\eta\mu\frac{\pi t}{12}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες.

- Πόση είναι η μέγιστη μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου;
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για : $0 \leq t \leq 24$.
- Ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία ήταν: α) 0°C β) κάτω από 0°C

33. Να εξετάσετε αν καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτια ή περιττή :

- $f(x) = x\eta\mu\frac{1}{x} - 3\sigma\upsilon\nu 2x$
- $f(x) = \frac{\eta\mu^2 x}{x} - 2\epsilon\phi x$
- $f(x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2 x$
- $f(x) = \epsilon\phi x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x$
- $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - |\eta\mu x|$

34. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu\frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$ έχει περίοδο $T=12\pi$.

35. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις :

- $f(x) = 2x^5 + 3\eta\mu x$ στο διάστημα $A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu x + \frac{2}{x}$ στο διάστημα $A = (0, \pi)$

36. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $A = [0, 2\pi]$. Στη συνέχεια να συγκρίνεται τους τριγωνομετρικούς αριθμούς :

- $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}$
- $\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{10}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{9\pi}{10}$
- $\sigma\upsilon\nu\frac{13\pi}{12}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{12}$

37. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ στο διάστημα $A = [0, 2\pi]$. Στη συνέχεια να συγκρίνεται τους τριγωνομετρικούς αριθμούς :

- $\eta\mu\frac{\pi}{5}$ και $\eta\mu\frac{29\pi}{7}$
- $\eta\mu\frac{7\pi}{12}$ και $\eta\mu\frac{35\pi}{12}$
- $\eta\mu\frac{6\pi}{5}$ και $\eta\mu\frac{73\pi}{10}$

3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : $\eta\mu x = \alpha$, $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$,

$$\varepsilon\phi x = \alpha \quad \text{ΚΑΙ} \quad \sigma\phi x = \alpha$$

➤ Αν θ είναι μια λύση της εξίσωσης $\eta\mu x = \alpha$ τότε :

$$\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta) \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

➤ Αν θ είναι μια λύση της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$ τότε :

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

➤ Αν θ είναι μια λύση της εξίσωσης $\varepsilon\phi x = \alpha$ τότε :

$$\varepsilon\phi x = \varepsilon\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

➤ Αν θ είναι μια λύση της εξίσωσης $\sigma\phi x = \alpha$ τότε :

$$\sigma\phi x = \sigma\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : ΠΩΣ ΔΙΩΧΝΩ ΤΟ « - » (ΜΕΙΟΝ)

1. $-\eta\mu x = \eta\mu(-x)$

2. $-\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(\pi - x)$

3. $-\varepsilon\phi x = \varepsilon\phi(-x)$

4. $-\sigma\phi x = \sigma\phi(-x)$

• Σε όλους τους παραπάνω τύπους των x, θ μπορεί να καταλαμβάνουν διάφορες παραστάσεις της μορφής $f(x), g(x)$.

• Σε εξισώσεις με $\varepsilon\phi x$ παίρνουμε περιορισμό $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

• Σε εξισώσεις με $\sigma\phi x$ παίρνουμε περιορισμό $\eta\mu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

A. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ

1. (Άσκηση 1 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\eta\mu x = 0$ ii. $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ iii. $\sigma\upsilon\nu x = 0$ iv. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Λύση :

$$i. \quad \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + 0 \\ x = 2k\pi + (\pi - 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$ii. \quad \eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$iii. \quad \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$iv. \quad \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

2. (Άσκηση 2 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i. \quad \eta\mu x = -\frac{1}{2} \quad ii. \quad \eta\mu x = -1 \quad iii. \quad \sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad iv. \quad \sigma\upsilon\nu x = -1$$

Λύση :

$$i. \quad \eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$ii. \quad \eta\mu x = -1 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$iii. \quad \sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{iv. } \sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = -\sin 0 \Leftrightarrow \sin x = \sin(\pi - 0) \Leftrightarrow \sin x = \sin \pi \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \pi, k \in \mathbb{Z}$$

3. (Άσκηση 3 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\text{i. } \varepsilon\phi x = 0 \quad \text{ii. } \varepsilon\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{iii. } \sigma\phi x = 1 \quad \text{iv. } \sigma\phi x = \sqrt{3}$$

Λύση :

$$\text{i. } \text{Επειδή : } \varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \text{ πρέπει } \sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \neq \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Έτσι έχω : } \varepsilon\phi x = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi 0 \Leftrightarrow x = k\pi + 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ii. } \text{Επειδή : } \varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \text{ πρέπει } \sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \neq \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Έτσι έχω : } \varepsilon\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{iii. } \text{Επειδή : } \sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \text{ πρέπει } \eta\mu x \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x \neq \eta\mu 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Έτσι έχω : } \sigma\phi x = 1 \Leftrightarrow \sigma\phi x = \sigma\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{iv. } \text{Επειδή : } \sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \text{ πρέπει } \eta\mu x \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x \neq \eta\mu 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Έτσι έχω : } \sigma\phi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\phi x = \sigma\phi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

4. (Άσκηση 4 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\text{i. } \varepsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ii. } \sigma\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Λύση :

$$\text{i. } \text{Επειδή : } \varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \text{ πρέπει } \sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \neq \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Έτσι έχω : } \varepsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = -\varepsilon\phi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ii. } \text{Επειδή : } \sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \text{ πρέπει } \eta\mu x \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x \neq \eta\mu 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Έτσι έχω : } \sigma\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \sigma\phi x = -\sigma\phi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sigma\phi x = \sigma\phi \left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Β. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΜΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

5. (Άσκηση 5 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $(1 - \eta\mu x)(2\eta\mu x - \sqrt{3}) = 0$ ii. $(2\eta\mu x + \sqrt{2})(1 - \sigma\upsilon\nu x) = 0$

Λύση :

i. $(1 - \eta\mu x)(2\eta\mu x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\bullet \quad 1 - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$, \kappa \in \mathbb{Z}$

ή

$$\bullet \quad 2\eta\mu x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii. $(2\eta\mu x + \sqrt{2})(1 - \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\bullet \quad 2\eta\mu x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ή

$$\bullet \quad 1 - \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm 0 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$

6. (Άσκηση 6 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $(\sqrt{3} + \varepsilon\phi\kappa)(1 - \varepsilon\phi\kappa) = 0$ ii. $(2\sigma\upsilon\nu\chi + 1)(\varepsilon\phi^2\chi - 3)\sigma\phi\chi = 0$

Λύση:

i. Επειδή : $\varepsilon\phi\kappa = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}$ πρέπει $\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi \neq \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi \neq \kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

$$(\sqrt{3} + \varepsilon\phi\kappa)(1 - \varepsilon\phi\kappa) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\bullet \sqrt{3} + \varepsilon\phi\kappa = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\phi\kappa = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi\kappa = -\varepsilon\phi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi\kappa = \varepsilon\phi\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ή

$$\bullet 1 - \varepsilon\phi\kappa = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\phi\kappa = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi\kappa = \varepsilon\phi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii. Επειδή : $\varepsilon\phi\kappa = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}$ πρέπει $\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi \neq \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi \neq 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

$$\text{Επειδή : } \sigma\phi\chi = \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} \text{ πρέπει } \eta\mu\chi \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi \neq \eta\mu 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi \neq 2\kappa\pi \\ \text{και} \\ \chi \neq 2\kappa\pi + \pi \end{cases}$$

$$\text{Έτσι έχω : } (2\sigma\upsilon\nu\chi + 1)(\varepsilon\phi^2\chi - 3)\sigma\phi\chi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\bullet 2\sigma\upsilon\nu\chi + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\chi = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ή

$$\bullet \varepsilon\phi^2\chi - 3 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\phi^2\chi = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon\phi\kappa = \sqrt{3} \\ \text{ή} \\ \varepsilon\phi\kappa = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon\phi\kappa = \varepsilon\phi\frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \varepsilon\phi\kappa = -\varepsilon\phi\frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon\phi\kappa = \varepsilon\phi\frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \varepsilon\phi\kappa = \varepsilon\phi\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ή

$$\bullet \sigma\phi\chi = 0 \Leftrightarrow \sigma\phi\chi = \sigma\phi\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ απορρίπτεται λόγω περιορισμού.}$$

Γ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\eta\mu(f(x)) = \eta\mu(g(x))$ ή $\sigma\upsilon\nu(f(x)) = \sigma\upsilon\nu(g(x))$ ή $\varepsilon\phi(f(x)) = \varepsilon\phi(g(x))$ ή $\sigma\phi(f(x)) = \sigma\phi(g(x))$

7. (Άσκηση 8 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $2\eta\mu 3x = \sqrt{3}$ ii. $\sigma\upsilon\nu \frac{x}{5} + 1 = 0$ iii. $3\varepsilon\phi \frac{2x}{7} - \sqrt{3} = 0$

Λύση :

$$i. \quad 2\eta\mu 3x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 3x = \eta\mu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ 3x = 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ 3x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \\ x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$ii. \quad \sigma\upsilon\nu \frac{x}{5} + 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{x}{5} = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{x}{5} = -\sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{x}{5} = \sigma\upsilon\nu(\pi - 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{x}{5} = \sigma\upsilon\nu \pi \Leftrightarrow \frac{x}{5} = 2\kappa\pi \pm \pi \Leftrightarrow x = 10\kappa\pi \pm 5\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$

iii. Επειδή : $\varepsilon\phi \frac{2x}{7} = \frac{\eta\mu \frac{2x}{7}}{\sigma\upsilon\nu \frac{2x}{7}}$ πρέπει :

$$\sigma\upsilon\nu \frac{2x}{7} \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{2x}{7} \neq \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{2x}{7} \neq 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x \neq 14\kappa\pi \pm \frac{7\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \neq 7\kappa\pi \pm \frac{7\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Έτσι έχουμε : $3\varepsilon\phi \frac{2x}{7} - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 3\varepsilon\phi \frac{2x}{7} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi \frac{2x}{7} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$$\varepsilon\phi \frac{2x}{7} = \varepsilon\phi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{2x}{7} = \kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = 7\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{7\kappa\pi}{2} + \frac{7\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

8. (Άσκηση 9 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ ii. $2\sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ iii. $\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \sqrt{3}$

Λύση :

$$\begin{aligned} \text{i. } \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 &\Leftrightarrow \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \\ x + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{6} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } 2\sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \\ 3x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{7\pi}{36} \\ x = \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{36} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii. } \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \sqrt{3} &\Leftrightarrow \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \varepsilon\phi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - 5x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 5x = -\kappa\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5x = -\kappa\pi - \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{\kappa\pi}{5} - \frac{\pi}{60}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Δ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\eta\mu(f(x)) = \sigma\upsilon\nu(g(x))$ ή $\varepsilon\phi(f(x)) = \sigma\phi(g(x))$

9. (Άσκηση 1 σελ. 89 Β' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\text{i. } \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0 \quad \text{ii. } \varepsilon\phi 2x - \sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0$$

Λύση :

$$\begin{aligned} \text{i. } \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0 &\Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{4} + x\right) \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{4} + x\right)\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} - x \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi - \left(-\frac{\pi}{4} - x\right)\right) \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{4} + x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa\pi - \frac{\pi}{8} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa\pi - \frac{\pi}{8}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \text{ή} \\ 0 = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} \text{ (αδύνατη)} \end{cases}$$

ii. Επειδή : $\varepsilon\phi 2x = \frac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}$ πρέπει :

$$\sigma\upsilon\nu 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x \neq \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x \neq 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Επειδή} : \sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)} \quad \text{πρέπει} : \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) \neq \eta\mu 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 3x \neq 2\kappa\pi \\ \text{και} \\ \frac{\pi}{3} + 3x \neq 2\kappa\pi + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{9} \\ \text{και} \\ x \neq \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} \end{cases}$$

$$\text{Έτσι έχω : } \varepsilon\phi 2x - \sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\phi 2x = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\phi 2x = \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)\right) \Leftrightarrow \varepsilon\phi 2x = \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - 3x\right) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\phi 2x = \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) \Leftrightarrow 2x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6} - 3x \Leftrightarrow 5x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{5} + \frac{\pi}{30}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Ε. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\alpha f^2(x) + \beta f(x) + \gamma = 0$

10. (Άσκηση 10 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $2\eta\mu^2\omega + \eta\mu\omega - 1 = 0$ ii. $2\sigma\upsilon\nu^2x + 3\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$ iii. $3\varepsilon\phi^2t = 3 + 2\sqrt{3}\varepsilon\phi t$

Λύση :

i. $2\eta\mu^2\omega + \eta\mu\omega - 1 = 0$ θέτω $\eta\mu\omega = y$ και έχω $2y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ ή $y = \frac{1}{2}$

• Αν $y = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\omega = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\omega = -\eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \omega = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

• Αν $y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ \omega = 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ \omega = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$

ii. $2\sigma\upsilon\nu^2x + 3\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$ θέτω $\sigma\upsilon\nu x = y$ και έχω $2y^2 + 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$ ή $y = \frac{1}{2}$

- Αν $y = -2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -2$ αδύνατο αφού $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$.
- Αν $y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$

iii. $3\epsilon\phi^2t = 3 + 2\sqrt{3}\epsilon\phi t \Leftrightarrow 3\epsilon\phi^2t - 2\sqrt{3}\epsilon\phi t - 3 = 0$

Επειδή: $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ πρέπει $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \neq \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

Θέτω $\epsilon\phi t = y$ και έχω $3y^2 - 2\sqrt{3}y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{3}$ ή $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

- Αν $y = \sqrt{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi t = \sqrt{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi t = \epsilon\phi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow t = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$
- Αν $y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi t = -\epsilon\phi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \epsilon\phi t = \epsilon\phi \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow t = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$

11. (Άσκηση 11 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\eta\mu^2x + 5\sigma\upsilon\nu^2x = 4$ ii. $\epsilon\phi x \cdot \sigma\phi 2x = 1$

Λύση:

i. $\eta\mu^2x + 5\sigma\upsilon\nu^2x = 4 \xLeftrightarrow[\begin{smallmatrix} \eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^2x = 1 \\ \eta\mu^2x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2x \end{smallmatrix}]{1 - \sigma\upsilon\nu^2x + 5\sigma\upsilon\nu^2x - 4 = 0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

• $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$

• $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

ii. $\epsilon\phi x \cdot \sigma\phi 2x = 1$

Επειδή: $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ πρέπει $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \neq \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

Επειδή: $\sigma\phi 2x = \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 2x}$ πρέπει :

$\eta\mu 2x \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x \neq \eta\mu 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq 2\kappa\pi \\ \text{και} \\ 2x \neq 2\kappa\pi + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \kappa\pi \\ \text{και} \\ x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Έτσι έχω: $\epsilon\phi x \cdot \sigma\phi 2x = 1 \Leftrightarrow \sigma\phi 2x = \frac{1}{\epsilon\phi x} \Leftrightarrow \sigma\phi 2x = \sigma\phi x \Leftrightarrow 2x = \kappa\pi + x \Leftrightarrow x = \kappa\pi$
 $, \kappa \in \mathbb{Z}.$ Απορρίπτεται λόγω περιορισμού. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΣΤ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΣΕ ΔΟΣΜΕΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

12. (Άσκηση 3 σελ. 89 Β' ομάδας)

Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $\varepsilon\phi x = 1$ στο διάστημα $(3\pi, 4\pi)$.

Λύση:

$$\varepsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Όμως: } x \in (3\pi, 4\pi) \Leftrightarrow 3\pi < x < 4\pi \Leftrightarrow 3\pi < k\pi + \frac{\pi}{4} < 4\pi \Leftrightarrow 3\pi - \frac{\pi}{4} < k\pi < 4\pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{11\pi}{4} < k\pi < \frac{15\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{11}{4} < k < \frac{15}{4} \Leftrightarrow k = 3 \quad \text{αφού } k \in \mathbb{Z}. \quad \text{Άρα είναι:}$$

$$x = 3\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{4}.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

13. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ).

- Η εξίσωση $\eta\mu x = a$, με $a > 1$ είναι αδύνατη.
- $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \theta \Leftrightarrow x = 2k\pi + \theta, k \in \mathbb{Z}$
- $\eta\mu x = \eta\mu \theta \Leftrightarrow x = 2k\pi + \theta$ ή $x = 2k\pi - \theta, k \in \mathbb{Z}$
- $\varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \theta \Leftrightarrow x = 2k\pi + \theta, k \in \mathbb{Z}$

14. Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις που βρίσκονται στην στήλη Α με τις ρίζες τους στην στήλη Β.

Στήλη Α- Εξίσωση	Στήλη Β- ρίζες
Α. $\sigma\upsilon\nu x = 0$	1. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Β. $\eta\mu x = 0$	2. $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
Γ. $\sigma\upsilon\nu x = 1$	3. $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Δ. $\eta\mu x = -1$	4. $x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$
Ε. $\sigma\upsilon\nu x = -1$	5. $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
ΣΤ. $\eta\mu x = 1$	6. $x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$
	7. $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

15. Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις της στήλης Α με τις ρίζες τους στο διάστημα $[0, \pi]$ που βρίσκονται στην στήλη Β.

Στήλη Α- Εξίσωση	Στήλη Β- Ρίζες στο $[0, \pi]$
Α. $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$	1. $\frac{\pi}{4}$
Β. $\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x$	2. $\frac{3\pi}{4}$
Γ. $\varepsilon\phi x = \sigma\phi x$	3. $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$
	4. 0

16. Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις της στήλης Α με τις ρίζες τους στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ που βρίσκονται στην στήλη Β.

Στήλη Α- Εξίσωση	Στήλη Β- Ρίζες στο $[0, \frac{\pi}{2}]$
Α. $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	1. $\frac{\pi}{3}$
Β. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	2. $\frac{\pi}{4}$
Γ. $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$	3. $\frac{\pi}{2}$
Δ. $\sigma\upsilon\nu x = 0$	4. 0
	5. $\frac{\pi}{6}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

Α. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ

17. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ ii. $\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$ iii. $\eta\mu x = 0$ iv. $\sigma\upsilon\nu x = 0$
v. $\eta\mu x = 1$ vi. $\sigma\upsilon\nu x = 1$ vii. $\eta\mu x = -1$ viii. $\sigma\upsilon\nu x = -1$

18. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ii. $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ iii. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ iv. $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$
v. $\sigma\phi x = -\sqrt{3}$ vi. $\epsilon\phi x = -1$ vii. $2\sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x + 3 = 0$ viii. $\frac{\sqrt{3} \cdot \sigma\phi x + 7}{3} = 2$
ix. $2\eta\mu x = \sqrt{2}$ x. $\epsilon\phi^2 x - 3 = 0$ xi. $\sigma\phi^2 x - 3 = 0$ xii. $2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

Β. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΜΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

18. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $(2\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\eta\mu x - 1) = 0$ ii. $(\epsilon\phi x - 1)\sigma\phi x = 0$
iii. $2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 = 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$ iv. $(\sqrt{2}\eta\mu x - 1)(\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0$
v. $(2\sqrt{3} \cdot \eta\mu x + 3)(2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{5}) = 0$ vi. $\sigma\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 1 = \sigma\upsilon\nu x + \sigma\phi x$

19. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $(2\eta\mu x + 1)(\eta\mu x - 1) = 0$ ii. $(4\eta\mu^2 x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$
iii. $2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3} - 2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3}\eta\mu x = 0$ iv. $1 + 2\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu^2 x - 1) = \eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x$

Γ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\eta\mu(f(x))=\eta\mu(g(x))$ ή $\sigma\upsilon\nu(f(x))=\sigma\upsilon\nu(g(x))$ ή $\varepsilon\phi(f(x))=\varepsilon\phi(g(x))$ ή $\sigma\phi(f(x))=\sigma\phi(g(x))$

20. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $6\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-3=0$

ii. $\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

iii. $\varepsilon\phi 4x = \varepsilon\phi x$

iv. $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x = 0$

v. $\sigma\upsilon\nu\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$

vi. $\sqrt{3}\cdot\varepsilon\phi\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

vii. $\varepsilon\phi\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\varepsilon\phi x=0$

viii. $\sigma\phi\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)=\sigma\phi\left(\frac{2\pi}{5}-2x\right)$

ix. $2\eta\mu(2x-\pi)-1=0$

x. $2\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$

vii. $\eta\mu 2x = -\frac{1}{2}$

viii. $\sigma\upsilon\nu 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Δ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\eta\mu(f(x))=\sigma\upsilon\nu(g(x))$ ή $\varepsilon\phi(f(x))=\sigma\phi(g(x))$

21. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

ii. $\varepsilon\phi\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\phi\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

iii. $\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

iv. $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$

v. $\eta\mu(x-\pi)=-\sigma\upsilon\nu(x-3\pi)$

vi. $\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}+\eta\mu(x-\pi)=0$

vii. $\sigma\phi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\varepsilon\phi x$

viii. $\eta\mu 3x = \sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

ix. $\eta\mu x - \sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x = 0$

x. $\eta\mu x + \varepsilon\phi\frac{3\pi}{8}\cdot\sigma\upsilon\nu x = 0$

Ε. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\alpha f^2(x) + \beta f(x) + \gamma = 0$

22. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $2\eta\mu^2x-3\eta\mu x+1=0$

ii. $2\eta\mu^2x-5\eta\mu x+2=0$

iii. $2\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu x+2=0$

iv. $2\sigma\upsilon\nu^2x+3\eta\mu x-3=0$

v. $2\eta\mu^2x=3(1-\sigma\upsilon\nu x)$

vi. $16\sigma\upsilon\nu^4x-25\sigma\upsilon\nu^2x+9=0$

vii. $2\cdot\eta\mu^2x=5\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu^2x$

viii. $2\sigma\upsilon\nu^2x+1=5\eta\mu x$

ix. $\eta\mu^2x+7\sigma\upsilon\nu^2x=1$

x. $5\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu x=5$

23. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $2\eta\mu^2x+\sqrt{5}\eta\mu x=0$

ii. $3\sigma\upsilon\nu^2x+5\sigma\upsilon\nu 2x=0$

iii. $\sigma\phi^2x=\sigma\phi x$

iv. $\varepsilon\phi^2x+\varepsilon\phi 2x=0$

ΣΤ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΣΕ ΔΟΣΜΕΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

25. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\sqrt{2}\eta\mu x = 1$ στο $[-\pi, \pi]$

ii. $4\eta\mu^2 x - 3 = 0$ στο $[0, 2\pi]$

iii. $3\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu^2 x - 2$ στο $[0, 4\pi]$

iv. $\eta\mu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ στο $(-\pi, \pi)$

Ζ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

24. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} = 4$

ii. $\epsilon\phi x - 1 + 2\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2\eta\mu x$

iii. $\eta\mu x \cdot \epsilon\phi x = 1 + \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

iv. $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x} - \epsilon\phi x = 2$

Η. ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

26. Έστω $f(x) = \eta\mu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x + 2$.

i. Να παραγοντοποιηθεί η $f(x)$.

ii. Να δείξετε ότι $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$.

iii. Να βρείτε το x ώστε $f(x) = 0$.

iv. Να δείξετε ότι η f είναι άρτια, περιοδική με περίοδο το 2π , και μέγιστο το 4.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sigma\upsilon\nu 2x - \epsilon\phi\frac{35\pi}{4}$, της οποίας η γραφική παράσταση

διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{25\pi}{6}, 2\right)$

i. Να βρείτε το α .

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.

iii. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της f και για ποια τιμή του x η f παίρνει τη μέγιστη τιμή.

iv. Να λυθεί η εξίσωση : $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - f(x) = 2$ στο $[-\pi, \pi]$.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu^2 x + \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να εξετάσετε αν C_f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 1 + \sqrt{3}$

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(7\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{17\pi}{2} + x\right)$.

- i. Να δείξετε ότι $f(x) = \eta\mu^2 x$
- ii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 3f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
- iii. Να λύσετε την εξίσωση : $2f(x) = 3\sqrt{1 - f(x)}$

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{20\pi}{3}, \frac{10}{3}\right)$, να δείξετε ότι $\alpha = 2$.
- iii. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
- iv. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = \alpha$.

31. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu\left(\frac{21\pi}{2} - 4x\right) + \eta\mu(21\pi + 4x)$ και

$$g(x) = \eta\mu\left(\frac{37\pi}{2} + 2x\right) - \sigma\upsilon\nu(37\pi - 2x).$$

- i. Να δείξετε ότι : $f(x) = 2\eta\mu 4x$ και $g(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$
- ii. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της f και για ποια τιμή του x η f παίρνει τη μέγιστη τιμή.
- iii. Να βρείτε τη ελάχιστη τιμή της g και για ποια τιμή του x η g παίρνει την ελάχιστη τιμή.
- iv. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f και g στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- v. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) + g(x) = 0$.

32. Η συνάρτηση $f(x) = 4\kappa - 3 + \lambda \cdot \eta\mu \frac{x}{\kappa}$, με $\lambda > 0$, έχει μέγιστο το 7 και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3.

- i. Να δείξετε ότι : $\kappa = \frac{3}{2}$ και $\lambda = 4$.
- ii. Να βρείτε την περίοδο και την ελάχιστη τιμή μ της f .
- iii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[-3\pi, 3\pi]$.
- iv. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 5$.

33.

- i. Να αποδείξετε ότι : $-\sqrt{2} \leq \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \leq \sqrt{2}$.
- ii. Να λύσετε την εξίσωση : $2 + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 3\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x$.

3.6 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΓΩΝΙΩΝ

- ✓ Αποδεικνύεται ότι για οποιεσδήποτε γωνίες α, β ισχύουν:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha \cdot \cos\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \\ \eta\mu(\alpha + \beta) &= \eta\mu\alpha \cdot \cos\beta + \eta\mu\beta \cdot \sin\alpha \\ \eta\mu(\alpha - \beta) &= \eta\mu\alpha \cdot \cos\beta - \eta\mu\beta \cdot \sin\alpha\end{aligned}$$

- ✓ Επίσης, αν $\sin\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$ και $\sin(\alpha + \beta) \neq 0$, δηλαδή $\alpha \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\beta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

για κάθε ακέραιο κ , ώστε να ορίζονται οι αριθμοί $\epsilon\phi\alpha$, $\epsilon\phi\beta$ και $\epsilon\phi(\alpha + \beta)$, τότε ισχύει

$$\epsilon\phi(\alpha + \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}$$

- ✓ Με τους αντιστοίχους περιορισμούς, ώστε να ορίζονται οι $\epsilon\phi\alpha$, $\epsilon\phi\beta$, $\epsilon\phi(\alpha - \beta)$, ισχύει και η ισότητα

$$\epsilon\phi(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta}{1 + \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}$$

- ✓ Τέλος, αν

$\eta\mu\alpha \neq 0$, $\eta\mu\beta \neq 0$ και $\eta\mu(\alpha + \beta) \neq 0$, δηλαδή $\alpha \neq \kappa\pi$ και $\alpha + \beta \neq \kappa\pi$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}$

τότε :

$$\sigma\phi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\beta + \sigma\phi\alpha}$$

- ✓ Με τους αντιστοίχους περιορισμούς ισχύει και η ισότητα

$$\sigma\phi(\alpha - \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta + 1}{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

1. Να αντιστοιχίσετε στους παρακάτω πίνακες κάθε παράσταση της στήλης Α με την ίση της στη στήλη Β, με την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι περιορισμοί για τις γωνίες, όπου χρειάζεται.

i.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\sin(\alpha + \beta)$	1. $\sin\alpha \cos\beta + \eta\mu\alpha \eta\mu\beta$
Β. $\eta\mu\alpha \sin\beta - \sin\alpha \eta\mu\beta$	2. $\sin\alpha \cos\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta$
Γ. $\sin(\alpha - \beta)$	3. $\eta\mu(\alpha + \beta)$
Δ. $\eta\mu\alpha \sin\beta + \sin\alpha \eta\mu\beta$	4. $\eta\mu(\beta - \alpha)$
	5. $\eta\mu(\alpha - \beta)$

ii.

Στήλη Α	Στήλη Β
A. $\frac{\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta}{1 + \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}$	1. $\frac{\sigma\phi\alpha - \sigma\phi\beta}{1 + \sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta}$
B. $\sigma\phi(\alpha - \beta)$	2. $\frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta + 1}{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha}$
Γ. $\sigma\phi(\alpha + \beta)$	3. $\frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\beta + \sigma\phi\alpha}$
Δ. $\frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}$	4. $\epsilon\phi(\alpha + \beta)$
	5. $\epsilon\phi(\alpha - \beta)$

iii.

Στήλη Α	Στήλη Β
A. $\eta\mu(\alpha + \beta) - \eta\mu(\alpha - \beta)$	1. 2συναημβ
B. $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$	2. -2ημβσυνα
Γ. $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$	3. 2συνασυνβ
Δ. $\eta\mu(\alpha - \beta) - \eta\mu(\alpha + \beta)$	4. 2ημασυνβ
	5. -2ημαημβ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις :

- i) $\sigma\upsilon\nu 140 \sigma\upsilon\nu 40 - \eta\mu 140 \eta\mu 40$
- ii) $\sigma\upsilon\nu 130 \sigma\upsilon\nu 10 + \eta\mu 130 \eta\mu 10$
- iii) $\eta\mu(\pi/12) \sigma\upsilon\nu(\pi/4) - \sigma\upsilon\nu(\pi/12) \eta\mu(\pi/4)$
- iv) $\eta\mu 50 \sigma\upsilon\nu 40 + \sigma\upsilon\nu 50 \eta\mu 40$
- v) $\eta\mu 2\chi \sigma\upsilon\nu \chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi \eta\mu \chi$

3. Να δείξετε ότι : $\eta\mu(\alpha - \beta) \sigma\upsilon\nu \beta + \eta\mu \beta \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \eta\mu \alpha$

4. Αν σε ένα τρίγωνο ισχύει ότι : $\epsilon\phi A = 1/2$ και $\epsilon\phi B = 1/3$, να δείξετε ότι η γωνία Γ είναι $3\pi/4$.

5. Να δείξετε ότι:

- i. $\frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\eta\mu \alpha \eta\mu \beta} = \sigma\phi \beta - \sigma\phi \alpha$
- ii. $\frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\eta\mu \alpha \eta\mu \beta} + \frac{\eta\mu(\beta - \gamma)}{\eta\mu \beta \eta\mu \gamma} + \frac{\eta\mu(\gamma - \alpha)}{\eta\mu \gamma \eta\mu \alpha} = 0$

6. Αν $\epsilon\phi \alpha = -3$, να λύσετε την εξίσωση $\epsilon\phi(2\chi - \alpha) = -2$

3.7 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ 2α

- ♦ Αν στους τύπους των $\eta\mu(\alpha + \beta)$, $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$, $\epsilon\phi(\alpha + \beta)$ και $\sigma\phi(\alpha + \beta)$ θέσουμε όπου β το α , προκύπτουν:

$$\triangleright \eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\begin{aligned} \triangleright \sigma\upsilon\nu 2\alpha &= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \\ &= 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\eta\mu^2\alpha \end{aligned}$$

$$\triangleright \epsilon\phi 2\alpha = \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi^2\alpha}$$

$$\triangleright \sigma\phi 2\alpha = \frac{\sigma\phi^2\alpha - 1}{2\sigma\phi\alpha}$$

- ♦ Από τους τύπους του $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ προκύπτει ότι (τύποι αποτετραγωνισμού)

$$\triangleright \eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\triangleright \epsilon\phi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}, \quad \sigma\phi^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

1. Να συμπληρώσετε τα κενά στους παρακάτω πίνακες, ώστε να ισχύουν οι ταυτότητες στους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α .

ι.

$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$
$\eta\mu 4\alpha = \dots\dots\dots$
$\eta\mu 3\alpha = \dots\dots\dots$
$\eta\mu\alpha = \dots\dots\dots$
$\eta\mu \frac{\alpha}{2} = \dots\dots\dots$

$\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{2}\eta\mu 2\alpha$
$\eta\mu \frac{\beta}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\beta}{2} = \dots\dots\dots$
$\eta\mu 2\gamma \sigma\upsilon\nu 2\gamma = \dots\dots\dots$
$\eta\mu \frac{x+y}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x+y}{2} = \dots\dots\dots$
$\eta\mu \frac{x}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{x}{4} = \dots\dots\dots$

ii.

$\sin^2 \alpha - \eta \mu^2 \alpha = \sin 2\alpha$
$\sin^2 2x - \eta \mu^2 2x = \dots\dots\dots$
$\sin^2 \frac{x}{2} - \eta \mu^2 \frac{x}{2} = \dots\dots\dots$

$1 + \sin 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$
$1 + \sin \alpha = \dots\dots\dots$
$1 + \sin \frac{a}{2} = \dots\dots\dots$

iii.

$\eta \mu^2 \alpha = \frac{1 - \sin 2\alpha}{2}$
$\eta \mu^2 2x = \dots\dots\dots$
$\eta \mu^2 \frac{x}{8} = \dots\dots\dots$
$\eta \mu^2 \frac{\alpha + \beta}{2} = \dots\dots\dots$

iv.

$\epsilon \varphi 2\alpha = \frac{2\epsilon \varphi \alpha}{1 - \epsilon \varphi^2 \alpha}$
$\epsilon \varphi \alpha = \dots\dots\dots$
$\epsilon \varphi 10\alpha = \dots\dots\dots$

2. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με το ίσο του της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\sin^2 \alpha$	1. $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$
Β. $\epsilon \varphi^2 \alpha$	2. $\frac{1 + \sin 2\alpha}{2}$
Γ. $\eta \mu^2 \alpha$	3. $\frac{1 - \sin 2\alpha}{2}$
	4. $\frac{\sin 2\alpha - 1}{2}$

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\eta \mu \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$	1. $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$
Β. $\sin^2 \frac{x}{2} - \eta \mu^2 \frac{x}{2}$	2. $\frac{1 + \sin x}{2}$
Γ. $\epsilon \varphi^2 \frac{x}{2}$	3. $\frac{1 - \sin x}{2}$
Δ. $\sin^2 \frac{x}{2}$	4. $\frac{\eta \mu x}{2}$
Ε. $\epsilon \varphi x$	5. $\sin x$
	6. $\frac{2\epsilon \varphi \frac{x}{2}}{1 - \epsilon \varphi^2 \frac{x}{2}}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1. Να δείξετε ότι : $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu^3\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha \eta\mu\alpha$.
2. Να δείξετε ότι : $2\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu 2\alpha \epsilon\phi\alpha = 2$.
3. Να δείξετε ότι : $(1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha)\epsilon\phi\alpha = \eta\mu 2\alpha$.
4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει : $2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu 2\alpha$. Να αποδείξετε ότι είναι ισοσκελές.
5. Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha = -4/5$ και $\alpha \in (\pi, 3\pi/2)$, να υπολογίσετε τα : $\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$, $\epsilon\phi 2\alpha$, $\sigma\phi 2\alpha$.
6. Αν $\eta\mu\alpha = 3/5$ και $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, να υπολογίσετε τα : $\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$, $\epsilon\phi 2\alpha$, $\sigma\phi 2\alpha$.
7. Να δείξετε ότι: $\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} \cdot \frac{1+\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}} = \sigma\phi\frac{\alpha}{4}$
8. Να δείξετε ότι: i. $\frac{2\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 4\alpha}{2\eta\mu 2\alpha - \eta\mu 4\alpha} = \sigma\phi^2\alpha$ ii. $\frac{1+\eta\mu 10 + \sigma\upsilon\nu 10}{1+\eta\mu 10 - \sigma\upsilon\nu 10} = \sigma\phi 5^\circ$
9. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu^2\frac{x}{2} = 0$

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΟ 3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ****ΘΕΜΑ 2^ο****ΘΕΜΑ 2 – 17663** §3.1- § 3.2

Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $(2\sigma\upsilon\nu x + 1) \cdot (5\sigma\upsilon\nu x - 4) = 0$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}$. (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x . (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4ο**ΘΕΜΑ 4 – 17844**

§1.2- §3.1- §3.2

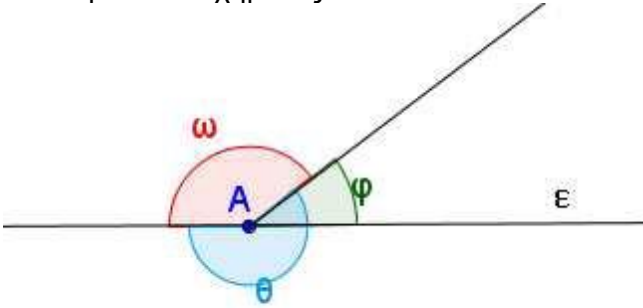
- α) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$. (Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω με $0 \leq \omega \leq 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega = -1$, και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2 – 17699 §3.1

Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο Α της ευθείας (ε) του παρακάτω σχήματος.



- α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ . (Μονάδες 10)
 β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών θ και ω του σχήματος. (Μονάδες 15)

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2 – 17656 §3.4- §3.5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της f ; (Μονάδες 9)
 β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου. (Μονάδες 10)
 γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 1. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2 – 17704 §3.4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f . (Μονάδες 12)
 β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$\sigma\upsilon\nu 2x$					
$f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$					

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 17725 §3.4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu(3x)$ (Μονάδες 10)
 β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 4 – 17841 §3.4

Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα Παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(t) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right) \text{ και } 0 \leq t \leq 180.$$

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας. (Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec. (Μονάδες 4+2=6)

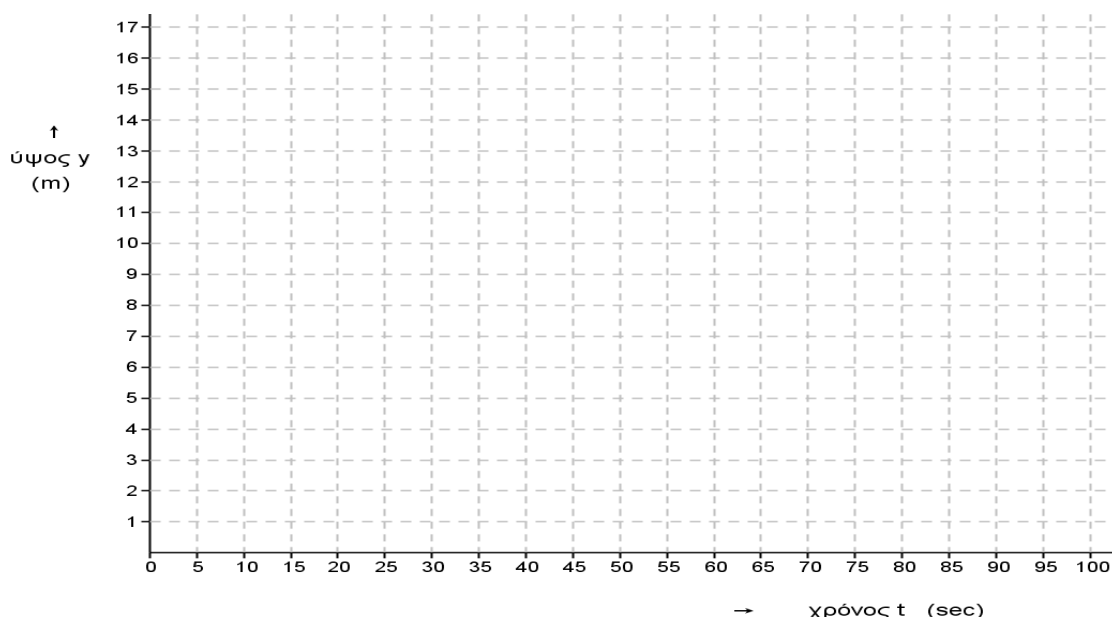
δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$.

(Μονάδες 3)

ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \leq t \leq 90$. (Μονάδες 5)

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)							



ΘΕΜΑ 4 – 17855 §3.4

Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε cm), δίνεται από την συνάρτηση: $f(t) = 12\eta\mu\frac{\pi t}{4} + 13$, όπου t ο χρόνος σε ώρες.

α) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης. (Μονάδες 7)

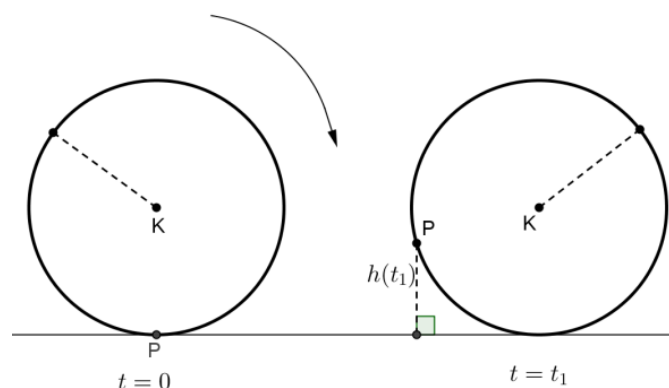
β) Να βρείτε την απόσταση του σώματος από το έδαφος τις χρονικές στιγμές $t = 5$ και $t = 8$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε κατά το χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = 8$, ποιά χρονική στιγμή η απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι ελάχιστη. Ποια είναι η απόσταση αυτή; (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 – 20339

Μια ρόδα ποδηλάτου περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της. Σημειώνουμε ένα σημείο P της ρόδας (όπως φαίνεται στο σχήμα), το οποίο τη χρονική στιγμή $t = 0$, είναι το σημείο επαφής της ρόδας με μια επιφάνεια. Η συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση h (σε m) του σημείου P από την επιφάνεια, t sec μετά την αρχή της κίνησης δίνεται από τη σχέση:



$h(t) = -0,2\sigma\upsilon\nu(\omega t) + 0,2$, με ω θετική πραγματική σταθερά. Υποθέτουμε ότι το σημείο P κάνει ένα πλήρη κύκλο σε 4sec.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = \frac{\pi}{2}$. (Μονάδες 5)

β) Να προσδιορίσετε την απόσταση του P

από την επιφάνεια τις στιγμές: $t_1 = 1\text{sec}$, $t_2 = 2\text{sec}$ και $t_3 = 7\text{sec}$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της h .

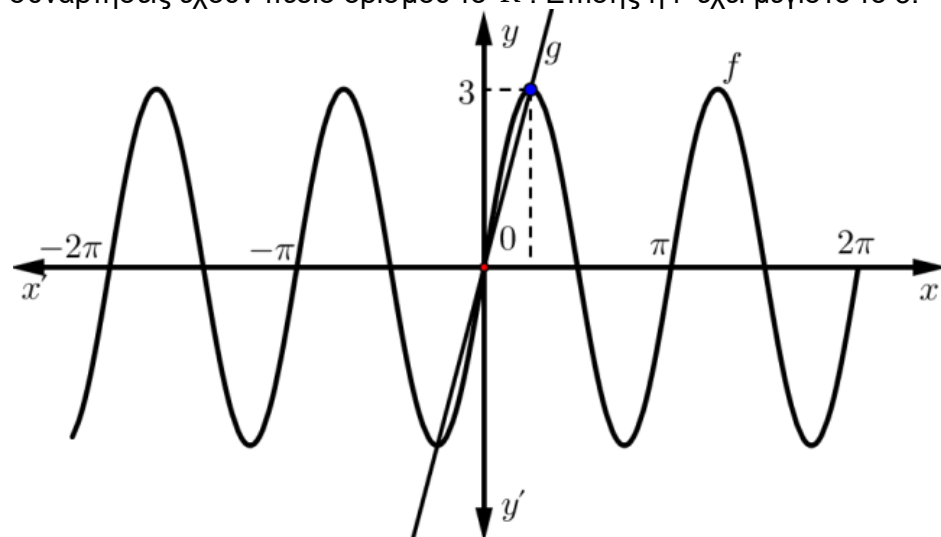
(Μονάδες 5)

δ) Να προσδιορίσετε την ακτίνα της ρόδας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 – 20921

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί και της συνάρτησης $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$, όπου $\omega > 0$ και $\rho > 0$. Και οι δύο συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Επίσης η f έχει μέγιστο το 3.



α) Να αποδείξετε ότι $\rho = 3$ και $\omega = 2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα α, β .

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε, γραφικά, το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $3 \cdot \eta\mu(2x) - \frac{12x}{\pi} = 0$ στο διάστημα $[0, \pi]$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 – 20922

Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = -2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 2$ με $t \in [0, 4]$.

α) Να βρείτε την περίοδο της f .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της, καθώς και τις τιμές του t για τις οποίες η f παίρνει τις τιμές αυτές.

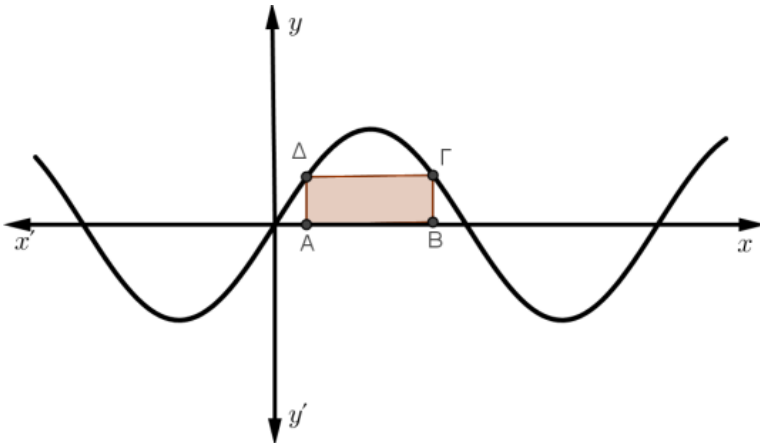
(Μονάδες 12)

γ) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 – 22691

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi x}{4}\right)$.



α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f . (Μονάδες 5)

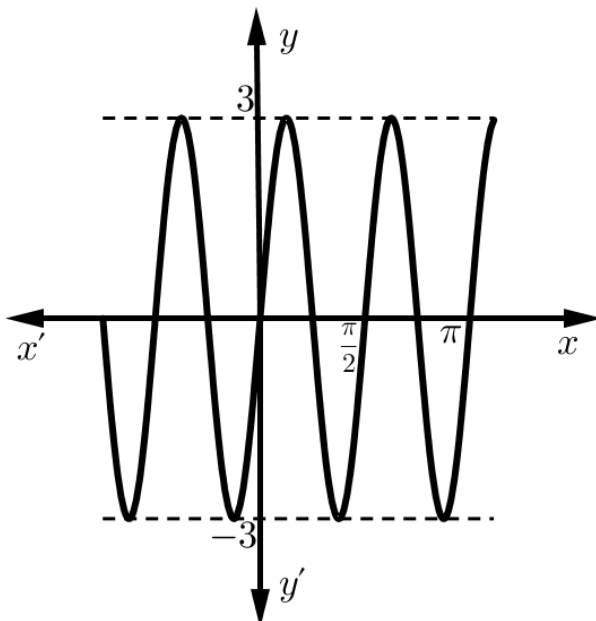
β) Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $A\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Να βρείτε:

i. τις συντεταγμένες του σημείου Δ . (Μονάδες 10)

ii. τις συντεταγμένες των σημείων B και Γ . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 – 22693

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu(\omega x)$ με παραμέτρους $\alpha, \omega > 0$. Να βρείτε:



α) την περίοδο της συνάρτησης f . (Μονάδες 9)

β) τους αριθμούς α και ω . (Μονάδες 8)

γ) τους αριθμούς $k \in \mathbb{R}$ για τους οποίους η εξίσωση $f(x) = k$ έχει μοναδική λύση στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

και στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση. (Μονάδες 8)

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2 – 16968 §3.4- §3.5

α) Είναι η τιμή $x = \frac{\pi}{4}$ λύση της εξίσωσης $3\sin 4x + 3 = 0$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sin 4x$ με την ευθεία $y = -1$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 – 17652 §3.2- §3.5

Δίνεται γωνία ω που ικανοποιεί τη σχέση: $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι είτε $\eta\mu\omega = 0$ είτε $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας ω .

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 – 17681 §3.4- §3.5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του $x \in [0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 – 17692 §3.5-3.6

α) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in [0, 2\pi)$ για τις οποίες ισχύει $\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 – 17693 §3.4

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}$, $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}$, $\sigma\upsilon\nu \frac{17\pi}{10}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 17736 §3.2- §3.5

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$, $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 1 + \sigma\upsilon\nu x$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 17739 §3.5- §3.6

Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ και $\eta\mu(\pi - x) - \eta\mu(\pi + x) = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την γωνία x .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 17741 §3.2- §3.5

α) Να αποδείξετε ότι : $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$ όπου $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 4 – 17837 §3.4-§ 3.5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |\alpha + 1| \cdot \eta\mu(\beta\pi x)$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta > 0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή 3 και περίοδο 4.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$ ή $\alpha = -4$ και $\beta = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 7)

β) Για $\alpha = 2$ και $\beta = \frac{1}{2}$.

i. να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 3$. (Μονάδες 10)

ii. να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 8]$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 – 17840 §1.1- §3.5

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

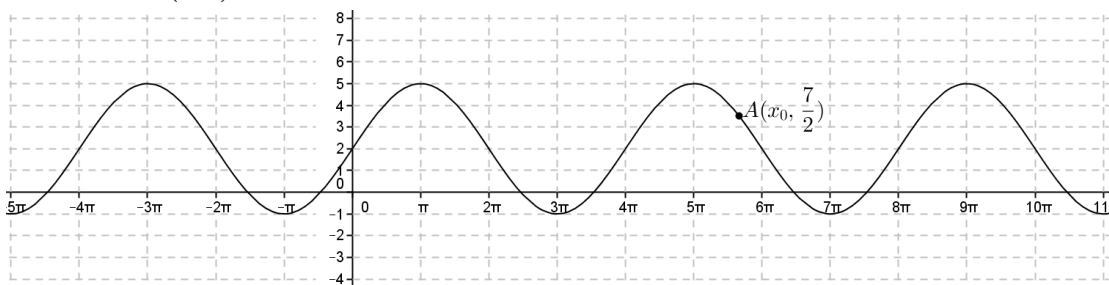
α) Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Αν $\lambda = -1$ και (x_0, y_0) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να βρείτε γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ τέτοια ώστε $x_0 = \sigma\upsilon\nu\theta$ και $y_0 = \eta\mu\theta$. (Μονάδες 7)

γ) Αν $\lambda = 1$ και (x_1, y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω , τέτοια ώστε $x_1 = \sigma\upsilon\nu\omega$ και $y_1 = \eta\mu\omega$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 – 17843 §3.4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x) + k$, ρ, ω, k πραγματικές σταθερές.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f (Μονάδες 3)

ii. την περίοδο T της συνάρτησης f (Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, ω, k . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι $\rho = 3$, $\omega = \frac{1}{2}$, $k = 2$ να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0 του σημείου A της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 – 17846 §3.4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sin x$ και $g(x) = \sin 2x$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων f και g . Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$, για $x \in [0, 2\pi]$. (Μονάδες 8)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
f(x)									
g(x)									

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\sin 2x = \sin x$ (1) στο διάστημα $[0, 2\pi]$. (Μονάδες 4)

γ) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση (1) στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να σημειώσετε πάνω στο σχήμα του ερωτήματος (α) τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4 – 17852 §3.4

Ένα παιχνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι. Το ύψος του από το πάτωμα σε cm συναρτήσει του χρόνου t (sec) δίνεται από τη σχέση: $h(t) = \alpha \cdot \sin(\omega t) + \beta$ όπου α , ω , β πραγματικές σταθερές. Όταν το ελατήριο ταλαντώνεται, το ελάχιστο ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα είναι 20 cm και το μέγιστο 100 cm. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το ύψος παίρνει την ελάχιστη τιμή του και ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης (θέσεις: ελάχιστο-ηρεμία-μέγιστο-ηρεμία-ελάχιστο) είναι 6 sec.

α) Να δείξετε $\omega = \frac{\pi}{3}$. (Μονάδες 5)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των α , β αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα 14sec μετά την έναρξη της ταλάντωσης. (Μονάδες 8)

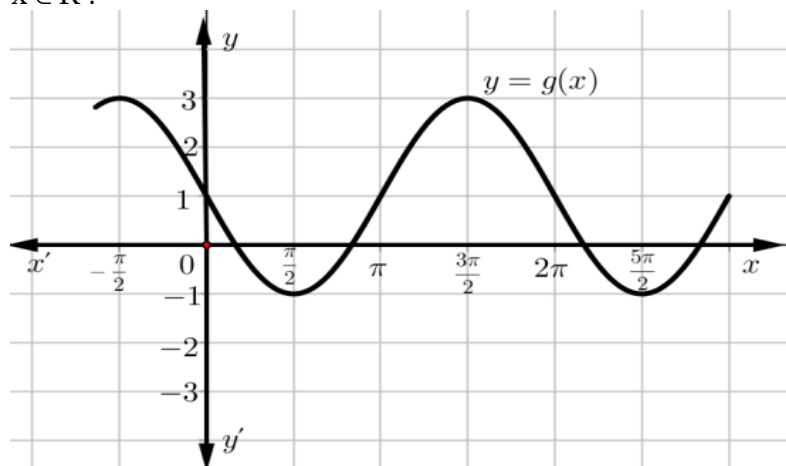
δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(t)$, για $0 \leq t \leq 12$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 – 20923

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot \eta\mu(3x) + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο T και τη μέγιστη τιμή της f . (Μονάδες 5)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \alpha \cdot \eta\mu(\beta x) + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$.



i. Να προσδιορίσετε τα α , β , γ . (Μονάδες 12)

ii. Για $\alpha = -2$, $\beta = 1$ και $\gamma = 1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $[0, \pi]$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 – 22690

Δίνεται η εξίσωση $1 - \eta\mu x = \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x$ (Α).

α) Να αποδείξετε ότι, αν το x_0 είναι μία λύση της εξίσωσης (Α), τότε $\sigma\upsilon\nu(x_0) > 0$. (Μονάδες 5)

β) Θεωρούμε την εξίσωση $(1 - \eta\mu x)^2 = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$ (Β) η οποία προκύπτει υψώνοντας στο τετράγωνο τα δύο μέλη της εξίσωσης (Α). Να λύσετε την εξίσωση (Β). (Μονάδες 12)

γ) Να λύσετε την εξίσωση (Α). (Μονάδες 8)

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ 2α

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2 – 17664 §3.3- §3.6

Δίνονται οι γωνίες ω, θ για τις οποίες ισχύει: $\omega + \theta = 135^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\epsilon\varphi(\omega + \theta) = -1$. (Μονάδες 10)

β) $\epsilon\varphi\omega + \epsilon\varphi\theta + 1 = \epsilon\varphi\omega \cdot \epsilon\varphi\theta$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 – 22639

α) Να δείξετε ότι: $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \eta\mu x$. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε με την βοήθεια του ερωτήματος α) την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 4 – 17838 §3.2- §3.7

Για τη γωνία ω ισχύει ότι $5\sigma\upsilon\nu 2\omega + 28\sigma\upsilon\nu\omega + 21 = 0$.

α) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$. (Μονάδες 10)

β) Αν για τη γωνία ω επιπλέον ισχύει $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, τότε:

i. να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 2\omega = \frac{7}{25}$ και $\eta\mu 2\omega = -\frac{24}{25}$. (Μονάδες 8)

ii. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{13 \cdot [\eta\mu^2 2\omega + \sigma\upsilon\nu^2 2\omega] + 12}{18 \cdot \epsilon\varphi 2\omega \cdot \sigma\varphi 2\omega + 25 \cdot [\eta\mu 2\omega + \sigma\upsilon\nu 2\omega]}$

(Μονάδες 7)

4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

- Καλούμε **μονώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής αx^n , όπου α είναι πραγματικός αριθμός και n ένας θετικός ακέραιος. Μονώνυμο του x καλούμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.
- Καλούμε **πολυώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής :

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$
 όπου n είναι ένας φυσικός αριθμός και $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί.
 - Τα μονώνυμα $\alpha_n x^n, \alpha_{n-1} x^{n-1}, \dots, \alpha_1 x, \alpha_0$ λέγονται **όροι** του πολυωνύμου.
 - Οι αριθμοί $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ λέγονται **συντελεστές** του πολυωνύμου.
 - Ειδικότερα ο αριθμός α_0 λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου.
- **Βαθμό** ενός πολυωνύμου $P(x)$ ονομάζουμε τον μεγαλύτερο εκθέτη του x που εμφανίζεται στο πολυώνυμο, με την προϋπόθεση ότι ο συντελεστής του είναι διάφορος του μηδενός. (Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός)
- Δυο πολυώνυμα $P(x) = \alpha_\mu x^\mu + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $Q(x) = \beta_\nu x^\nu + \dots + \beta_1 x + \beta_0$ με $\mu \geq \nu$ θα λέμε ότι είναι **ισα** όταν ισχύουν συγχρόνως :
 $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \alpha_\nu = \beta_\nu$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} = \dots = \alpha_\mu = 0$.
- Στο πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ αν αντικαταστήσουμε το x με μια τιμή $\rho \in \mathbb{R}$, τότε ο αριθμός που προκύπτει : $P(\rho) = \kappa \in \mathbb{R}$, λέγεται **αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$** . Ειδικότερα αν ισχύει $P(\rho) = 0$, τότε ο αριθμός ρ λέγεται **ρίζα του πολυωνύμου**.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 3 σελ. 131 Α' ομάδας)

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, το πολυώνυμο

$$P(x) = (4\mu^3 - \mu)x^3 + 4\left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right)x - 2\mu + 1 \text{ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.}$$

Λύση : Το $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, όταν ισχύουν συγχρόνως :

$$\begin{aligned} & \bullet \quad 4\mu^3 - \mu = 0 \Leftrightarrow \mu(4\mu^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \text{ή} \\ 4\mu^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \mu = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \\ & \bullet \quad \mu^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \mu = \pm \frac{1}{2} \\ & \bullet \quad -2\mu + 1 = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{2}. \text{ Η κοινή λύση των παραπάνω εξισώσεων είναι } \mu = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. (Άσκηση 4 σελ. 131 Α' ομάδας)

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha^2 - 3\alpha)x^3 + x^2 + \alpha$ και $Q(x) = -2x^3 + \alpha^2 x^2 + (\alpha^3 - 1)x + 1$ είναι ισα.

Λύση: Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ισα, όταν ισχύουν συγχρόνως :

- $\alpha^2 - 3\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ ή $\alpha = 2$
- $1 = \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$
- $0 = \alpha^3 - 1 \Leftrightarrow \alpha^3 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$
- $\alpha = 1$

Η κοινή λύση των παραπάνω εξισώσεων είναι $\alpha = 1$.

3. (Άσκηση 3 σελ. 132 Β' ομάδας)

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ , για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 + \mu x + 6$ έχει ρίζα το 1 και ισχύει $P(-2) = -12$.

Λύση:

Το 1 είναι ρίζα του $P(x) \Leftrightarrow P(1) = 0 \Leftrightarrow 2 + \lambda + \mu + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda + \mu = -8$ (1)

Επίσης : $P(-2) = -12 \Leftrightarrow 2(-2)^3 + \lambda(-2)^2 + \mu(-2) + 6 = -12 \Leftrightarrow -16 + 4\lambda - 2\mu + 6 = -12 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4\lambda - 2\mu = -2 \Leftrightarrow 2\lambda - \mu = -1$ (2)

Από (1) και (2) έχω : $\begin{cases} \lambda + \mu = -8 \\ 2\lambda - \mu = -1 \end{cases}$ προσθέτοντας κατά μέλη έχω : $3\lambda = -9 \Leftrightarrow \lambda = -3$ και
 από (1) : $-3 + \mu = -8 \Leftrightarrow \mu = -5$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

- i. Η παράσταση $P(x) = x^0$ είναι πολυώνυμο.
- ii. Ένα σταθερό πολυώνυμο έχει βαθμό 0.
- iii. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ και ισχύει $P(\rho) \neq 0$, τότε ο αριθμός ρ δεν είναι ρίζα του $P(x)$.
- iv. Αν τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι μη μηδενικά και έχουν βαθμούς μ και ν αντίστοιχα, τότε το πολυώνυμο $P(x)Q(x)$ έχει βαθμό $\mu + \nu$.

5. Αν οι βαθμοί των πολυωνύμων $P(x)$ και $Q(x)$ είναι μ και ν αντίστοιχα, να αντιστοιχίσετε στον παρακάτω πίνακα τα πολυώνυμα που βρίσκονται στη στήλη Α με τους βαθμούς τους στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $P(x) \cdot Q(x)$	1. ν^2
Β. $[P(x)]^2$	2. 2μ
Γ. $Q(Q(x))$	3. $\mu + \nu$
Δ. $P(Q(x))$	4. $\mu\nu$

6. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

- i. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.
 - α. Αν $a_0 = 0$, τότε ο αριθμόςείναι ρίζα του $P(x)$
 - β. Αν $a_n \neq 0$, τότε ο βαθμός του $P(x)$ είναι
 - γ. Αν το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$ είναι 0, τότε ο αριθμός είναι ρίζα του $P(x)$
 - δ. Αν ο βαθμός του $P(x)$ είναι ν , τότε ο βαθμός του $P^2(x)$ είναι

- ε. Αν ο βαθμός του $P(x)$ είναι n , τότε ο βαθμός του $P(P(x))$ είναι.....
 ii. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι μηδενικού βαθμού ή το μηδενικό πολυώνυμο, τότε η μορφή του είναι
 iii. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι βαθμού 1, τότε έχει τη μορφή

7. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

- i. Αν ο σταθερός όρος ενός πολυωνύμου είναι 0, τότε το πολυώνυμο έχει ρίζα τον αριθμό:
 A. 1 B. 0 Γ. -1 Δ. 2
 ii. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $3^{\text{ου}}$ βαθμού, το $\Pi(x)$ είναι $2^{\text{ου}}$ βαθμού και ισχύει η ισότητα $P(x)=\delta(x) \Pi(x)$, τότε το $\delta(x)$ έχει βαθμό:
 A. 2 B. 1 Γ. 0
 iii. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$, ισχύει $x^4+3x=P(x)(2x+1)$, τότε ο βαθμός του $P(x)$ είναι:
 A. 3 B. 2 Γ. 1 Δ. 4
 iv. Το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου $P(x)=(2x-1)^{30}+x$ είναι:
 A. 1 B. 2 Γ. 3 Δ. 4

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Για ποιο λόγο οι παρακάτω παραστάσεις δεν είναι πολυώνυμα του x ;

- i. $5+2\sqrt{x}$ ii. $\eta\mu x+7$ iii. $6\cdot\frac{1}{x}+4$ iv. $5x^3+3|x|-7$

9. Να εξετάσετε ποιες από τις ακόλουθες παραστάσεις είναι μονώνυμα και ποιες πολυώνυμα :

- i. $P(x)=\frac{5}{3}x^4$ ii. $Q(x)=-2\sqrt[4]{x^7}$ iii. $A(x)=4x^{-7}$ iv. $E(x)=11x^4-3x^3$ v. $H(x)=12x^7-3x^{\frac{1}{3}}$

10. Δίνονται τα πολυώνυμα : $P(x)=4x^3+5x^2-6x+7$ και $Q(x)=x^2+2$. Να βρείτε τα πολυώνυμα:

- i. $P(x)+Q(x)$ ii. $P(x)-5Q(x)$ iii. $P(x)\cdot Q(x)$ iv. $(Q(x))^2-P(x)$

11. Να βρεθούν οι τιμές τις παραμέτρου λ για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^3-4\lambda)x^4+(\lambda^2+2\lambda)x+\lambda+2$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

12. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2-2\lambda)x^3+(\lambda^2-5\lambda+6)x+\frac{\lambda}{2}-1=0$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

13. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε να είναι ισα τα πολυώνυμα $P(x)=(\lambda^2-4)x^3+(\lambda^2+2\lambda)x^2-\lambda^2x+3\lambda-8$ και $Q(x)=(3\lambda+2)x^2-2\lambda x+\lambda-\lambda^2$.

14. Να βρεθούν οι τιμές των κ, λ, μ ώστε να είναι ισα τα πολυώνυμα $P(x)=(2\kappa-2\lambda)x^2+(\kappa+\lambda)x+(2\mu-2)$ και $Q(x)=(\mu+\lambda+1)x^2+\mu x+2\lambda$

15. Να βρείτε τα α, β, γ έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x)=4x^2-2x+1$ να παίρνει τη μορφή $P(x)=\alpha x(x-3)+(\beta+2)x+\gamma-1$

16. Να προσδιοριστεί ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)=(\lambda^2+5\lambda+9)x^2+(\lambda-3)x+(\lambda^2-1)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

17. Να προσδιοριστεί, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ο βαθμός του πολυώνυμου :
 $P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x^2 + (\lambda^2 + 1)x + 2$
18. Δίνεται το πολυώνυμο : $P(x) = (\lambda^3 - \lambda)x^2 + (\lambda^2 + \lambda)x + \lambda^2 - 2\lambda - 3$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το $P(x)$ είναι :
 i. είναι σταθερό πολυώνυμο, ii. είναι μηδενικό πολυώνυμο, iii. έχει βαθμό μηδέν.
19. Έστω τα πολυώνυμα $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 8$ και $Q(x) = \alpha x^3 - \beta x^2 + \gamma x - \delta$. Να βρείτε τι πρέπει να ισχύει για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ώστε το πολυώνυμο $P(x) - Q(x)$ να είναι :
 i. 3^{ου} βαθμού ii. το πολύ 2^{ου} βαθμού iii. Μηδενικό πολυώνυμο.
20. Να βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η αριθμητική τιμή του πολυώνυμου $P(x) = (\lambda^2 + 4\lambda)x^3 - (1 + \lambda)x^2 + (3\lambda + 2)x + 3$ για $x = -2$ να είναι 5.
21. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 4, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(1 - 3x)$ έχει ρίζα τον αριθμό -1.
22. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί -3 και 2 είναι ρίζες του πολυώνυμου $P(x) = -3x^2 + 5x + 2$
23. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \kappa x^2 + (\lambda - 2)x + 6$ έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 2.
24. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο $P(x) = (2\lambda^2 - 3)x^3 + 4\lambda x^2 - (\lambda - 5)x + 2005$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.
25. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$ έχει ρίζα τον αριθμό 2 και το άθροισμα των συντελεστών του είναι 8. (Υπόδειξη : Για να βρούμε το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$, υπολογίζουμε το $P(1)$)
26. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x - 1)^{2017} - x^{2018}$. Να βρείτε :
 i. τον σταθερό όρο του $P(x)$ ii. το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$.
27. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa - 1)x^3 + \kappa x^2 - (3\kappa - \lambda)x + 3\lambda$. Να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$ να έχει ρίζα το 2 και η αριθμητική τιμή του για $x = -1$ να είναι 6.
28. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει : $(3x - 1) \cdot P(x) = 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3$.
29. Έστω το πολυώνυμο $P(x)$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι :
 $P(2x + 1) = 3P(x) + 2$ για κάθε και $P(0) = 0$. Να δείξετε ότι $P(15) = 80$.

4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

➤ **ΘΕΩΡΗΜΑ (ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ)**

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δυο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\nu(x)$, τέτοια ώστε : $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \nu(x)$ όπου το $\nu(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

Το $\Delta(x)$ λέγεται διαιρετέος, το $\delta(x)$ διαιρέτης, το $\pi(x)$ πηλίκο και το $\nu(x)$ υπόλοιπο της διαίρεσης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

A. ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

1. Να κάνετε τη διαίρεση : $(x^3 - 5x^2 + 2x - 1) : (x - 3)$ και στη συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Λύση :

Στη διαίρεση της εκφώνησης, το πολυώνυμο $\Delta(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 1$ ονομάζεται διαιρετέος ενώ το πολυώνυμο $\delta(x) = x - 3$ ονομάζεται διαιρέτης. Για να εκτελέσουμε τη διαίρεση ακολουθούμε τα εξής βήματα :

Βήμα 1 : Κάνουμε το σχήμα της διαίρεσης και γράφουμε τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x . Αν λείπει κάποια δύναμη την συμπληρώνουμε με συντελεστή μηδέν.

$$x^3 - 5x^2 + 2x - 1 \Big| \begin{array}{l} x - 3 \\ \hline \end{array}$$

Βήμα 2 : Διαιρούμε τον πρώτο όρο του διαιρετέου x^3 με τον πρώτο όρο του διαιρέτη x . Έτσι : $x^3 : x = x^2$

$$x^3 - 5x^2 + 2x - 1 \Big| \begin{array}{l} x - 3 \\ x^2 \\ \hline \end{array}$$

Βήμα 3 : Πολλαπλασιάζουμε τον πρώτο όρο του πηλίκου x^2 με τον διαιρέτη : $x^2(x - 3) = x^3 - 3x^2$ και το γινόμενο αυτό το αφαιρούμε από τον διαιρετέο.

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 2x - 1 \\ -x^3 + 3x^2 \\ \hline -2x^2 + 2x - 1 \end{array} \Big| \begin{array}{l} x - 3 \\ x^2 \\ \hline \end{array}$$

Βήμα 4 : Το πολυώνυμο $-2x^2 + 2x - 1$ είναι το πρώτο μερικό υπόλοιπο. Θεωρώντας αυτό ως νέο διαιρετέο, επαναλαμβάνουμε τα δυο προηγούμενα βήματα.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 5x^2 + 2x - 1 & x - 3 \\ -x^3 + 3x^2 & \\ \hline -2x^2 + 2x - 1 & \\ 2x^2 - 6x & \\ \hline -4x - 1 & \end{array}$$

Βήμα 5 : Το πολυώνυμο $-4x - 1$ είναι το δεύτερο μερικό υπόλοιπο. Θεωρώντας αυτό ως νέο διαιρετέο, επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα βήματα. **Όταν το μερικό υπόλοιπο που θα προκύψει έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του διαιρέτη, τότε η διαίρεση σταματά.** Δηλαδή το τελικό υπόλοιπο της διαίρεσης είναι -13 και το πηλίκο $x^2 - 2x - 4$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 5x^2 + 2x - 1 & x - 3 \\ -x^3 + 3x^2 & \\ \hline -2x^2 + 2x - 1 & \\ 2x^2 - 6x & \\ \hline -4x - 1 & \\ 4x - 12 & \\ \hline -13 & \end{array}$$

Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτει η ταυτότητα της διαίρεσης :

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x) \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 2x - 1 = (x - 3) \cdot (x^2 - 2x - 4) + (-13)$$

(Διαιρετέος)=(διαιρέτης)(πηλίκο)+(υπόλοιπο)

2. Να κάνετε τη διαίρεση : $(2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2) : (x^2 + x)$ και στη συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Λύση :

Γράφουμε το γνωστό σχήμα της διαίρεσης

Διαιρούμε το μεγιστοβάθμιο όρο του Διαιρετέου με το μεγιστοβάθμιο όρο του διαιρέτη. Έτσι υπολογίζουμε τον πρώτο όρο του πηλίκου. Άρα :

$$\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2.$$

$2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2$	$x^2 + x$
	$2x^2$

Πολλαπλασιάζουμε τον όρο που βρήκαμε στο πηλίκο με κάθε όρο του διαιρέτη (κάνουμε δηλαδή επιμεριστική ιδιότητα).

$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2 \\ - 2x^4 - 2x^3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} x^2 + x \\ \hline 2x^2 \end{array}$
--	---

Τοποθετούμε το αποτέλεσμα κάτω απ' το Διαιρετέο, αλλά **με αντίθετα πρόσημα** (επειδή εννοείται ότι αφαιρούμε το αποτέλεσμα από το Διαιρετέο). Προσέχουμε κάθε όρος να βρίσκεται ακριβώς κάτω από τον αντίστοιχο (ομοιοβάθμιο) όρο του Διαιρετέου.

$\begin{array}{r} \cancel{2x^4} + 3x^3 - x^2 + 5x - 2 \\ - \cancel{2x^4} - 2x^3 \\ \hline x^3 - x^2 + 5x - 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} x^2 + x \\ \hline 2x^2 \end{array}$
---	---

Εκτελούμε την πρόσθεση. Οι αντίθετοι όροι διαγράφονται. Έπειτα «κατεβάζουμε» και τους υπόλοιπους όρους του Διαιρετέου.

$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2 \\ - 2x^4 - 2x^3 \\ \hline x^3 - x^2 + 5x - 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} x^2 + x \\ \hline 2x^2 + x \end{array}$
---	---

Συνεχίζουμε κατά τον ίδιο τρόπο, έως ότου ο βαθμός του υπολοίπου γίνει μικρότερος από εκείνον του διαιρέτη. Τότε η διαίρεση σταματάει.

$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2 \\ - 2x^4 - 2x^3 \\ \hline x^3 - x^2 + 5x - 2 \\ - x^3 - x^2 \\ \hline - 2x^2 + 5x - 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} x^2 + x \\ \hline 2x^2 + x \end{array}$
--	---

Άρα, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης θα γράφεται:

$$\underbrace{2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2}_{\Delta(x)} = \underbrace{(x^2 + x)}_{\delta(x)} \cdot \underbrace{(2x^2 + x - 2)}_{\pi(x)} + \underbrace{7x - 2}_{\upsilon(x)}$$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ $P(x)$ ΜΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $x-\rho$ (ΣΧΗΜΑ HORNER)

ΘΕΩΡΗΜΑ Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυώνυμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυώνυμου για $x=\rho$. Είναι δηλαδή $v=P(\rho)$.

Έτσι η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται : $P(x)=(x-\rho)\pi(x)+P(\rho)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x-\rho$ είναι : $P(x)=(x-\rho)\pi(x)+v(x)$. Επειδή ο διαιρέτης $x-\rho$ είναι 1^{ου} βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι σταθερό πολυώνυμο v . Έτσι έχουμε : $P(x)=(x-\rho)\pi(x)+v$ και, αν θέσουμε $x=\rho$, παίρνουμε $P(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)+v=0+v=v$.

Επομένως : $P(x)=(x-\rho)\pi(x)+P(\rho)$

ΘΕΩΡΗΜΑ Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho)=0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

Έστω ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Τότε $P(x)=(x-\rho)\pi(x)$. Από την ισότητα αυτή για $x=\rho$ παίρνουμε $P(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)=0$, που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

Αντιστρόφως :

Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή ισχύει $P(\rho)=0$. Τότε από τη σχέση $P(x)=(x-\rho)\pi(x)+P(\rho)$ παίρνουμε $P(x)=(x-\rho)\pi(x)$, που σημαίνει ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ΣΧΗΜΑ HORNER

Όταν έχω να εκτελέσω μια διαίρεση ενός πολυώνυμου $P(x)$ με ένα παράγοντα της μορφής $x-\rho$, τότε χρησιμοποιώ το σχήμα Horner, ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία.

ΠΡΟΣΟΧΗ : Για ένα πολυώνυμο $P(x)$, οι ακόλουθες εκφράσεις είναι ισοδύναμες :

- «το $x-\rho$ διαιρεί το $P(x)$ »,
- «η διαίρεση του $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι τέλεια»,
- «το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$ »
- «το ρ είναι ρίζα του $P(x)$ »
- «το $P(x)$ διαιρείται με το $x-\rho$ »
- «το $x-\rho$ είναι διαιρέτης του $P(x)$ »
- «το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-\rho)$ είναι ίσο με μηδέν»

Σε κάθε περίπτωση ισχύει : $P(\rho)=0$.

Αυτό σημαίνει ότι αν δοθεί μια από τις παραπάνω εκφράσεις, τότε θα ισχύουν συγχρόνως όλες μαζί και άμεσα συμπεραίνουμε ότι $P(\rho)=0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. (Άσκηση 4 σελ.139 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκια και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων :

i. $(-x^3 + 75x - 250) : (x + 10)$ ii. $(2x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 5x - 2) : (x - 3)$

Λύση :

i.

Βήμα 1 : Κάνουμε τον πίνακα του σχήματος Horner και στην πρώτη γραμμή γράφουμε τους συντελεστές του διαιρετέου. Αν λείπει κάποια δύναμη του x , τη συμπληρώνουμε με συντελεστή μηδέν. Στο τέλος της πρώτης γραμμής, γράφουμε το ρ

-1	0	75	-250	-10

Βήμα 2 : Κατεβάζουμε τον πρώτο συντελεστή στην 1^η θέση της 3^{ης} γραμμής.

-1	0	75	-250	-10
↓				
-1				

Βήμα 3 : Πολλαπλασιάζουμε με ρ τον πρώτο αριθμό της 3^{ης} γραμμής και γράφουμε το γινόμενο στη 2^η θέση της 2^{ης} γραμμής. Στη συνέχεια προσθέτουμε τους αριθμούς της 2^{ης} στήλης και γράφουμε το άθροισμα στη 2^η θέση της 3^{ης} γραμμής.

-1	0	75	-250	-10
↓				
-1	10			
	10			

Βήμα 4 : Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για τον αριθμό που βρίσκεται στη 2^η θέση της 3^{ης} γραμμής και συνεχίζουμε μέχρι να τελειώσουν οι συντελεστές του διαιρετέου στην πρώτη γραμμή.

-1	0	75	-250	-10
↓	10	-100	250	
-1	10	-25	0	

Συντελεστές - πηλίκου υπόλοιπο

Προσοχή :

- Στη διαίρεση $P(x) : (x - \rho)$ ο βαθμός του πηλίκου είναι κατά 1 μικρότερος από τον βαθμό του $P(x)$. Επίσης αφού ο διαιρέτης $x - \rho$ είναι 1^{ου} βαθμού, το υπόλοιπο είναι ένας πραγματικός αριθμός.
- Οι αριθμοί που βρίσκονται στην 3^η γραμμή (εκτός από τον τελευταίο) παριστάνουν του συντελεστές του πηλίκου της διαίρεσης.
- Ο τελευταίος αριθμός της 3^{ης} γραμμής παριστάνει το υπόλοιπο της διαίρεσης.

Με αυτά στο μυαλό μας στη διαίρεση : $(-x^3 + 75x - 250) : (x+10)$ ο διαιρετέος είναι 3^{ου} βαθμού, άρα το πηλίκο θα είναι 2^{ου} βαθμού με συντελεστές όπως προκύπτουν από το Horner -1, 10, -25 άρα το πηλίκο έχει τη μορφή : $\pi(x) = -x^2 + 10x - 25$ και το υπόλοιπο $\nu = 0$. Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι :

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \nu(x) \Leftrightarrow -x^3 + 75x - 250 = (x+10)(-x^2 + 10x - 25) + 0$$

ii.

Εδώ γράφουμε τους συντελεστές του Διαιρετέου

Εδώ γράφουμε το ρ

Κατεβάζουμε

2	- 3	- 10	5	- 2	3
2	6				

Προσθέτουμε

2	- 3	- 10	5	- 2	3
2	3	9			

Πολλαπλασιάζουμε με το ρ

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε στο εξής σχήμα :

2	- 3	- 10	5	- 2	3
2	6	9	- 3	6	
2	3	- 1	2	4	

π(x)
υ(x)

Το τελευταίο άθροισμα που βρήκαμε (στο πλαίσιο) είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης, δηλαδή $\nu = 4$. Τα υπόλοιπα επί μέρους αθροίσματα (2, 3, -1, 2) αποτελούν τους συντελεστές του πηλίκου. Προφανώς, αφού διαιρέσαμε με το $x - 3$ που είναι πρώτου βαθμού, το πηλίκο θα είναι ένα πολυώνυμο κατά ένα βαθμό μικρότερο από το Διαιρετέο. Άρα ο πρώτος όρος θα είναι ο x^3 , ο δεύτερος ο x^2 κτλ. δηλαδή θα έχουμε :

$$\pi(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2.$$

Γράφουμε τελικά:

$$\underbrace{2x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 5x - 2}_{\Delta(x)} = \underbrace{(x - 3)}_{\delta(x)} \cdot \underbrace{(x^3 + 3x^2 - x + 2)}_{\pi(x)} + \underbrace{4}_{\nu(x)}$$

Γ. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ – ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**

4. (Άσκηση 6 σελ.139 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα της μορφής $x - \rho$ που δίνονται σε κάθε περίπτωση, είναι παράγοντες του $P(x)$.

i. $P(x) = x^4 - 25x^2 + 144 \quad x + 3$

Λύση :

i. 1^{ος} τρόπος : Το $x + 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$ αν και μόνο αν $P(-3) = 0$.

Πράγματι $P(-3) = (-3)^4 - 25(-3)^2 + 144 = 81 - 225 + 144 = 0$.

2^{ος} τρόπος : Το $x + 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$ αν και μόνο αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) : (x + 3)$ είναι 0 δηλαδή με το σχήμα Horner :

1	0	-25	0	144	-3
↓	-3	9	48	-144	
1	-3	-16	48	0	

Όπως φαίνεται και από το σχήμα Horner το $x + 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

5. (Άσκηση 3 σελ.139 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τις τιμές του κ , για τις οποίες το $x - 1$ είναι παράγοντας του $g(x) = \kappa^2 x^4 + 3\kappa x^2 - 4$.

Λύση :

Το $x - 1$ είναι παράγοντας του $g(x)$ αν και μόνο αν $g(1) = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 + 3\kappa - 4 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1 \text{ ή } \kappa = -4$.

Δ. ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ $P(x)$ ΕΧΕΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ (Ή ΔΙΑΙΡΕΙΤΑΙ) ΜΕ ΤΟ $(x - \alpha)(x - \beta)$ Ή ΜΕ ΤΟ $(x - \alpha)^2$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6. (Άσκηση 3 σελ.140 β' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2$ διαιρείται με το $(x - 1)(x - 2)$ και να βρείτε το πηλίκο.

Λύση :

Για το $P(x)$ και για $\rho = 1$ έχουμε :

2	-6	5	-3	2	1
↓	2	-4	1	-2	
2	-4	1	-2	0	

Άρα είναι : $P(x) = (x - 1)(2x^3 - 4x^2 + x - 2)$

Για το $\pi(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 2$ και για $\rho = 2$ έχουμε :

2	-4	1	-2	2
↓	4	0	2	
2	0	1	0	

Άρα είναι : $\pi(x) = (x-2)(2x^2+1)$. Οπότε τελικά $P(x) = (x-1)(x-2)(2x^2+1)$.

Αυτό σημαίνει ότι το $P(x)$ διαιρείται με το $(x-1)(x-2)$ και το πηλίκο της διαίρεσης είναι το $\pi'(x) = 2x^2+1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

- Στην ταυτότητα της διαίρεσης πολυωνύμων το υπόλοιπο έχει βαθμό ο οποίος είναι μικρότερος από τον βαθμό του διαιρέτη.
- Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-r$ έχει βαθμό 0.
- Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $P(r) \neq 0$, τότε το $P(x)$ δεν έχει παράγοντα το $x-r$.
- Αν η διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-r$ είναι τέλεια, τότε ο αριθμός r είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

- Αν ο διαιρέτης σε μια διαίρεση πολυωνύμων είναι δευτέρου βαθμού, τότε το υπόλοιπο έχει βαθμό το πολύ 1.
- Αν ο διαιρέτης σε μια διαίρεση πολυωνύμων είναι δευτέρου βαθμού, τότε το υπόλοιπο έχει τη μορφή $ax+b$.
- Αν το πηλίκο μιας διαίρεσης πολυωνύμων είναι το μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο διαιρετέος είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
- Αν ο διαιρετέος είναι 3^{ου} βαθμού και ο διαιρέτης 2^{ου} βαθμού, τότε το πηλίκο έχει μορφή $ax+b$ με $a \neq 0$.
- Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το x^2-4 , τότε $P(2)=0=P(-2)$.
- Για να έχει το $P(x)$ παράγοντα το $(x-2)(x+2)$, πρέπει $P(2)=0$ και $P(-2)=0$, όπου $\pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με $x-2$.
- Αν το $x-2$ δεν είναι παράγοντας του $P(x)$, τότε $P(2) \neq 0$.
- Αν $P(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε το $P(x)$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $x-r$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

A. ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

6. Να γίνουν οι ακόλουθες διαιρέσεις :

- $(2x^3 + 5x^2 - 6x - 1) : (x - 1)$
- $(10x^4 + 7x^2 - 3x + 5) : (2x^2 - 1)$
- $(8x^4 + x^3 + 5x^2 + 3x + 2) : (x^2 + x + 2)$

7. Ομοίως :

- $(5x^2 - 12x - 32) : (x - 4)$
- $(7x^3 - 2x^2 + 9) : (x^2 + 2)$
- $(11x^5 + 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1) : (x^2 - 3x + 5)$

Β. ΣΧΗΜΑ HORNER

8. Να βρεθεί με τη βοήθεια του σχήματος Horner, το πηλίκο, το υπόλοιπο και η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυώνυμου $\Delta(x) = 7x^4 - 5x^2 - x - 1$ με τα πολυώνυμα :
- i. $x-1$ ii. $x+2$
9. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρεθούν τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων :
- i. $(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6x - 8) : (x - 2)$ ii. $(5x^2 - 2ax - 3a^2) : (x - a)$
10. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = 3x^4 - 6x^2 + 7x + 62$. Να βρεθεί το $P(2)$ με τη βοήθεια του σχήματος Horner.

Γ. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ – ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

11. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\Delta(x) = 5x^3 - 4x^2 - x + 3$ με τα πολυώνυμα :
- i. $x-2$ ii. $x+1$ iii. $2x-3$
12. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης : $(x^{2017} + 4x^{1982} - x^{1999} + 2004x + 1) : (x - 1)$
13. Να αποδείξετε ότι το $(x-2)$ είναι παράγοντας του πολυώνυμου $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 6$
14. Να βρείτε τα $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x) = (a-2)x^3 + ax^2 + 3x - 6$ να διαιρείται με το $(x+2)$.
15. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda x^3 + (2\mu - 1)x^2 + (\lambda - \mu)x + 1$. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x-1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ να είναι 4.
16. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 3x^2 + 10$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $(x-p)$.

Δ. ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ $P(x)$ ΕΧΕΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ (Ή ΔΙΑΙΡΕΙΤΑΙ) ΜΕ ΤΟ $(x - \alpha)(x - \beta)$ Ή ΜΕ ΤΟ $(x - \alpha)^2$.

17. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9$, διαιρείται με το $(x-1)(x-3)$ και να βρείτε το αντίστοιχο πηλίκο.
18. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12$, διαιρείται με το $x^2 - 4$ και να βρείτε το αντίστοιχο πηλίκο.
19. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τα οποία το $P(x) = x^3 - (\alpha + 1)x^2 + \beta x + 1$ έχει παράγοντα το $x^2 - 3x + 2$.

20. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24$ έχει παράγοντα το $(x-2)^2$.
21. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 + (\mu-2)x + 3$. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x^2 + x - 2$.
22. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \lambda x^2 + \mu$. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $(x-2)^2$.
23. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + (\alpha - \beta)x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + x - 6$ να έχει ρίζες τις $x = 2, x = -3$. Στη συνέχεια, για τις τιμές των α, β που βρήκατε να υπολογίσετε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x-2)(x+3)$.

Ε. Η ΔΙΑΙΡΕΣΗ $P(x) : (\alpha x + \beta), \alpha \neq 0$

24. Να αποδείξετε ότι το $2x-3$ είναι παράγοντας του $P(x) = 2x^3 + x^2 - 12x + 9$.
25. Να αποδείξετε ότι το $3x+1$ είναι παράγοντας του $P(x) = (3x+2)^{2016} + (3x)^5 - 12x - 4$.
26. Το πολυώνυμο $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + \alpha x + \beta$ έχει παράγοντα το $3x-2$, ενώ το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (2x-1)$ είναι 3. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ΣΤ. ΣΥΝΘΕΤΕΣ – ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

27. Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του $P(x)$ με τα $x-2$ και $x+3$ είναι 4 και -1 αντίστοιχα, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 + x - 6)$.
28. Αν το $(x+4)$ είναι παράγοντας του $P(x)$, να αποδείξετε ότι το $(x-3)$ είναι παράγοντας του $P(11-5x)$.
29. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - x - 6$ είναι $-4x+1$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-3$ καθώς και το υπόλοιπο με το $x+2$.
30. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης : $(x^{100} - 3x^{47} + 5x^{13} - 4x + 1) : (x^2 - 1)$.
31. Ένα πολυώνυμο $\Delta(x)$, όταν διαιρεθεί με το $\delta(x) = x^2 - 2x$ δίνει πηλίκο $\pi(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.
- Να βρεθεί ο βαθμός του $\Delta(x)$.
 - Αν επιπλέον το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης είναι $\nu(x) = -3x + 5$, να βρείτε το $\Delta(x)$.

4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Για να λύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 3, μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1^ο μέλος και κάνουμε παραγοντοποίηση. Στη συνέχεια εκμεταλλευόμαστε την ιδιότητα : $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \beta = 0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 146 Α' Ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

iii. $3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2$

Λύση :

Έχω : $3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2 \Leftrightarrow 3x^5 + 5x^4 - 3x^3 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^5 - 3x^3 + 5x^4 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^3(x^2 - 1) + 5x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(3x^3 + 5x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1)(3x + 5) = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (διπλή)}$

ή

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

ή

$3x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΡΙΖΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω η πολυωνυμική εξίσωση : $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ με ακεραίους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 .

Παρατηρήσεις – Σχόλια :

➤ Μια πολυωνυμική εξίσωση ν-οστού βαθμού έχει το πολύ ν πραγματικές ρίζες. Δηλαδή, μια εξίσωση 3^{ου} βαθμού έχει το πολύ 3 ρίζες.

➤ **Μεθοδολογία :** Για να λύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση (3^{ου} βαθμού και πάνω), χρησιμοποιούμε το θεώρημα ακεραίων ριζών. Με τη βοήθεια του σχήματος **Horner** και τους κλασικούς τρόπους **παραγοντοποίησης**, φέρνουμε την εξίσωση σε μορφή $P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \dots \cdot P_v(x) = 0$ οπότε $P_1(x) = 0$ ή $P_2(x) = 0$ ή ... ή $P_v(x) = 0$ (Στο σχήμα Horner όλες οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι διαιρέτες του σταθερού όρου.)

(Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι όλα τα πολυώνυμα $P_1(x), P_2(x), \dots, P_v(x)$ να είναι το πολύ 2^{ου} βαθμού)

➤ **Μεθοδολογία :** Σε πιο σύνθετες μορφές κάνουμε αντικατάσταση μιας ποσότητας, ώστε να προκύψει πιο εύκολη εξίσωση.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

2. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

ii. $2x^3 + 15x^2 + 19x + 6 = 0$

Λύση :

i. Οι διαιρέτες του σταθερού όρου είναι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Παρατηρώ όμως ότι το άθροισμα των συντελεστών της εξίσωσης είναι 0, άρα η ρίζα είναι το 1.

1	-2	-5	6	1
	1	-1	-6	
1	-1	-6	0	

$$\text{Άρα : } x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - 6) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=-2$$

ii. Οι διαιρέτες του σταθερού όρου είναι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Όταν όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης είναι ομόσημοι (είτε θετικοί, είτε αρνητικοί), τότε η εξίσωση δεν μπορεί να έχει θετικές ρίζες. Έτσι δοκιμάζω με όλες τις αρνητικές. Τελικά :

2	15	19	6	-1
	-2	-13	-6	
2	13	6	0	

$$\text{Άρα : } 2x^3 + 15x^2 + 19x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2 + 13x + 6) = 0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } 2x^2 + 13x + 6 = 0 \Leftrightarrow x=-6 \text{ ή } x=-\frac{1}{2}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

3. i. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές. Να βρείτε, ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι ψευδής.

- A. Αν ο ακέραιος $p \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο p είναι διαιρέτης του a_0 .
 B. Αν ο ακέραιος p δεν είναι διαιρέτης του a_0 , τότε ο p δεν είναι ρίζα της εξίσωσης.
 Γ. Πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του a_0 .
 Δ. Αν ο p είναι διαιρέτης του a_0 , τότε ο p είναι ρίζα της εξίσωσης.

ii. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές. Να βρείτε, ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι ψευδής.

- A. Αν οι αριθμοί $a_0, a_1, \dots, a_n$ είναι θετικοί, τότε η εξίσωση δεν έχει θετική ρίζα.
 B. Αν οι αριθμοί $a_0, a_1, \dots, a_n$ είναι αρνητικοί, τότε η εξίσωση δεν έχει αρνητική ρίζα.
 Γ. Αν οι όροι της εξίσωσης με τις περιττές δυνάμεις του x έχουν συντελεστές αρνητικούς αριθμούς και με τις άρτιες δυνάμεις του x έχουν συντελεστές θετικούς, τότε η εξίσωση δεν έχει αρνητική ρίζα.
 Δ. Αν $a_0 \neq 0$, τότε η εξίσωση έχει ρίζα το 0.
 E. Αν $a_0 + a_1 + \dots + a_n = 0$, τότε η εξίσωση έχει ρίζα το 1.

iii. Έστω η εξίσωση $x^5 - 3x^2 - \alpha x + 12 = 0$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Να εξετάσετε, ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι ψευδής.

A. Αποκλείεται το 5 να είναι ρίζα της εξίσωσης.

B. Αν ο ακέραιος ρ είναι ρίζα της εξίσωσης και $\rho > 7$, τότε $\rho = 12$.

Γ. Έστω $\rho \in \mathbb{Z}$ και $\rho > 4$. Αν $\rho \neq 6$ και $\rho \neq 12$, τότε ο ρ δεν είναι ρίζα της εξίσωσης.

Δ. Αν $\rho \in \mathbb{Z}$ και ο ρ είναι διαιρέτης του 12, τότε ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4. Να βρεθούν οι ακέραιες ρίζες της εξίσωσης : $x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6 = 0$.

5. Ομοίως οι εξισώσεις :

i. $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

ii. $x^3 + x^2 - 12 = 0$

iii. $2x^3 - 5x^2 = 5 - 2x$

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 5x^3 + x - 2 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

7. Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{Z}$ για τις οποίες η εξίσωση $x^3 - \kappa x^2 + 6x + 2 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

8. Να λυθεί η εξίσωση : $(x^2 + x - 1)^2 - 3(x^2 + x + 3) + 14 = 0$

9. Να λυθεί η εξίσωση : $x^6 - 3x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

10. Να λυθεί η εξίσωση : $(x^2 + 2x - 2)^3 - 4(x^2 + 2x - 3)^2 - 23(x^2 + 2x - 4) - 24 = 0$

11. Ομοίως : i. $\frac{1}{20}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{10}x - \frac{4}{10} = 0$ ii. $x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 2x + 1 = 0$ (Αντίστροφη εξίσωση)

12. Το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 - 20x + \mu$ έχει παράγοντα το $x + 2$, ενώ διαιρούμενο με το $x - 1$ δίνει υπόλοιπο -15 .

i. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

13. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης τη συνάρτησης : $f(x) = 5x^3 + 9x^2 - 3x - 2$ με τον άξονα $x'x$.

(Υπόδειξη : για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$)

14. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων : $f(x) = x^4 + 5x$ και $g(x) = 5x^3 + 1$

(Υπόδειξη : για να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων δυο συναρτήσεων f, g λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$)

15. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 11x - 2\alpha$ διέρχεται από το σημείο $M(-1, 6)$. Να βρείτε :

i. το $\alpha \in \mathbb{R}$. ii. τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

16. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x^3 + \alpha x^2 - 5x - \alpha - 2$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 6. Να βρείτε :
- i. το $\alpha \in \mathbb{R}$. ii. τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.
17. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$ και $g(x) = x^3 - \beta x^2 + \alpha x + 10$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $f(x)$ με το $x-1$ είναι -12 και το πολυώνυμο $g(x)$ έχει παράγοντα το $x+2$. Να βρείτε :
- i. τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ii. τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f, g .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσουμε μια πολυωνυμική ανίσωση 3^{ου} ή μεγαλύτερου βαθμού,

Βήμα 1 : μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1^ο μέλος

Βήμα 2 : κάνουμε παραγοντοποίηση (αν χρειαστεί με τη βοήθεια του σχήματος Horner), ώστε να φέρουμε την ανίσωση στη μορφή : $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0$ ή $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) < 0$ (όπου οι παράγοντες $A(x), B(x), \dots, \Phi(x)$ είναι είτε 1^{ου} είτε 2^{ου} βαθμού)

Βήμα 3 : βρίσκουμε τις ρίζες (αν υπάρχουν) των παραγόντων $A(x), B(x), \dots, \Phi(x)$

Βήμα 4 : διατάσσουμε τις ρίζες σε έναν άξονα (από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη)

Βήμα 5 : κάτω από τον άξονα σχηματίζουμε πίνακα με τα πρόσημα των παραγόντων, στα διαστήματα που χωρίζεται ο άξονας από τις ρίζες.

Βήμα 6 : στην τελευταία γραμμή του πίνακα βρίσκουμε το πρόσημο του γινομένου εφαρμόζοντας τους κανόνες προσήμου :

- $(+) \cdot (+) = (+)$ $(-) \cdot (-) = (+)$
- $(+) \cdot (-) = (-)$ $(-) \cdot (+) = (-)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

18. Να λυθεί η ανίσωση : $x^3 - 3x + 2 < 0$

Λύση: Έχω $x^3 - 3x + 2 = 0$

1	0	-3	2	1
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

Άρα : $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-2$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x-1$	-		-	0	+
$x^2 + x - 2$	+	0	-	0	+
Γινόμενο	-	0	+	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^3 - 3x + 2 < 0$ τότε $x \in (-\infty, -2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

19. Να λυθούν οι ανισώσεις :

- i. $x^3 + 5x^2 - x - 5 > 0$
- ii. $x^3(x+1) - 2 > x(x-1)$
- iii. $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 < 0$

20. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση τη συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. Πότε βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$;

(Υπόδειξη : Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται **πάνω από τον** $x'x$ λύνουμε την ανίσωση $f(x) > 0$. Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται **κάτω από τον** $x'x$ λύνουμε την ανίσωση $f(x) < 0$.)

21. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση τη συνάρτησης $P(x) = 4x^5 + 12x^4 + x^3 - 18x^2 - 5x + 6$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

22. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση τη συνάρτησης $f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$ δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

23. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^3 + 4x^2 + 4$.

(Υπόδειξη : Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται **πάνω από τη** C_g λύνουμε την ανίσωση $f(x) > g(x)$. Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται **κάτω από τη** C_g λύνουμε την ανίσωση $f(x) < g(x)$.)

24. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 - 2}$
- ii. $f(x) = \sqrt[4]{x^3 + 5x^2 + 2x - 8}$
- iii. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}}{x^3 - 6x^2 + 5x + 12}$

25. Δίνονται τα πολυώνυμα : $P(x) = x^3 + x^2 + \alpha x - 3\beta - 1$ και $Q(x) = x^3 + \beta x^2 + (\alpha - 3)x + 15$. Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$, ενώ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $x + 1$ είναι 24.

- i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -10$ και $\beta = -3$.
- ii. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $P(x) \geq 0$ και $Q(x) \leq 0$.

26. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 17x + 4\alpha$ διέρχεται από το σημείο $M(3, -36)$.

- i. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.
- ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

- iii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^3 - 7x - 36$.

27. Το πολυώνυμο : $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + \alpha$ διαιρούμενο με το $2x - 1$ αφήνει υπόλοιπο 5.

- Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$
- Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $2x - 1$.
- Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 5$.

28. Το πολυώνυμο : $P(x) = 12x^3 - 8x^2 - 10x + \alpha$ έχει παράγοντα το $3x + 1$.

- Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$
- Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 3x + 1$.

29. Το πολυώνυμο : $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 - 20x + \mu$ έχει παράγοντα το $x + 2$, ενώ διαιρούμενο με το $x - 1$ αφήνει υπόλοιπο -15 .

- Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
- Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΡΙΖΑΣ ΜΕ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Για να βρούμε μια ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης $P(x)=0$ με προσέγγιση δεκάτου, ενεργούμε ως εξής :

- Βρίσκουμε ένα διάστημα $(\alpha, \alpha+1)$, έτσι ώστε $P(\alpha)P(\alpha+1) < 0$ (ο α ακέραιος)
- Θεωρούμε τις τιμές $\alpha+0,1$, $\alpha+0,2$, ..., $\alpha+0,8$, $\alpha+0,9$ και εξετάζουμε για ποιο γειτονικό ζευγάρι το γινόμενο των τιμών τους είναι αρνητικό.
- Συνεχίζουμε με την ίδια διαδικασία για το ζευγάρι που βρήκαμε, στο οποίο προσθέτουμε 0,01, κι έτσι προκύπτουν 9 ενδιάμεσοι αριθμοί. Βρίσκουμε τα γειτονικά ζευγάρι που έχει αρνητικό γινόμενο τιμών, το οποίο θα έχει κοινά τα ψηφία των μονάδων και των δεκάτων. Ο αριθμός αυτός είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x)=0$ με προσέγγιση δέκατου.

Με παρόμοιο τρόπο ενεργούμε για να βρούμε μια ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης $P(x)=0$ με προσέγγιση εκατοστού, χιλιοστού κτλ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

30. Αφού αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 5x^2 - 3 = 0$ έχει μια ρίζα τουλάχιστον στο διάστημα $(0,1)$, να βρείτε μια λύση της στο $(0,1)$ με προσέγγιση :

- δέκατου
- εκατοστού

4.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσω μια κλασματική εξίσωση, δηλ. μια εξίσωση που έχει άγνωστο στον παρονομαστή,

Βήμα 1 : παραγοντοποιώ τους παρονομαστές και βρίσκω το ΕΚΠ τους,

Βήμα 2 : παίρνω περιορισμούς, δηλαδή $\text{Ε.Κ.Π} \neq 0$

Βήμα 3 : πολλαπλασιάζω κάθε όρο με το ΕΚΠ ώστε να γίνει απαλοιφή παρονομαστών και λύνω την εξίσωση που προκύπτει,

Βήμα 4 : ελέγχω αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τους περιορισμούς.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 153 Α' Ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

ii. $\frac{x^2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$

Λύση :

Έχω : $\frac{x^2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{(x-1)(x+1)}$, ΕΚΠ = $(x-1)(x+1)$

Πρέπει $(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \& x \neq -1$

Έπειτα κάνω απαλοιφή παρονομαστών :

$$(x-1)(x+1) \frac{x^2}{x-1} - (x-1)(x+1) \frac{2}{x+1} = (x-1)(x+1) \frac{4}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+1) - 2(x-1) = 4 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x + 2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$$

1	1	-2	-2	-1
	-1	0	2	
1	0	-2	0	

$$\text{Άρα : } x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \Leftrightarrow x=-1, \text{ Απορ.} \\ \text{ή} \\ x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}, \text{ Δεκτές} \end{cases}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΑΡΡΗΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Είναι οι εξισώσεις που περιέχουν 1 τουλάχιστον ρίζα. Για να τις λύσουμε :

Βήμα 1 : παίρνουμε τους περιορισμούς (υπόρριξη ποσότητα ≥ 0),

Βήμα 2 : βάζουμε το ένα ριζικό στο 1^ο μέλος και πηγαίνουμε όλους τους υπόλοιπους όρους στο 2^ο,

Βήμα 3 : αν στο 2^ο μέλος έχει άγνωστο τότε παίρνουμε περιορισμό και για το 2^ο μέλος ≥ 0

Βήμα 4 : υψώνουμε και τα δυο μέλη σε δύναμη ίση με την τάξη του ριζικού του 1^{ου} μέλους

Βήμα 5 : τέλος λύνουμε την εξίσωση και εξετάζουμε ποιες από τις λύσεις είναι δεκτές και ποιες απορρίπτονται.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

2. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\sqrt{4-2x}=1$

ii. $\sqrt{x+3}-x=1$

iii. $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+4}=1$

Λύση :

i. πρέπει $4-2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2$

$$\sqrt{4-2x}=1 \Leftrightarrow \sqrt{4-2x}^2=1^2 \Leftrightarrow 4-2x=1 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \text{ δεκτή}$$

ii. Έχω : $\sqrt{x+3}-x=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=x+1$

πρέπει $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ (1) και $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ (2). Από (1)&(2) ισχύει $x \geq -1$.

$$(\sqrt{x+3})^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x+3 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ (δεκτή)} \text{ ή } x=-2 \text{ (απορ.)}$$

iii. Έχω : $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+4}=1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+6}=\sqrt{x+4}+1$

πρέπει $2x+6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ (1) και $x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$ (2). Από (1)&(2) ισχύει $x \geq -3$.

$(\sqrt{2x+6})^2 = (\sqrt{x+4}+1)^2 \Leftrightarrow 2x+6 = x+4+2\sqrt{x+4}+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+4} = x+1$ εδώ επίσης πρέπει $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ (3). Άρα από (1), (2)&(3) ισχύει $x \geq -1$. Οπότε :

$$(2\sqrt{x+4})^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow 4(x+4) = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x=5 \text{ (δεκτή)} \text{ ή } x=-3 \text{ (απορ.)}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

➤ Μια κλασματική ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ ή $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ γράφεται ισοδύναμα

$A(x) \cdot B(x) > 0$ ή $A(x) \cdot B(x) < 0$ [όπου $B(x) \neq 0$] και αυτό γιατί το γινόμενο και το πηλίκο δυο αριθμών έχουν το ίδιο πρόσημο.

➤ Μια κλασματική ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > \Gamma(x)$ γράφεται :

$$\frac{A(x)}{B(x)} - \Gamma(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{A(x) - B(x) \cdot \Gamma(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow [A(x) - B(x) \cdot \Gamma(x)] \cdot B(x) > 0$$

και λύνεται όπως η προηγούμενη.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $\frac{x^2+3x}{x^2-5x+4} \leq 0$ ii. $\frac{x^2+3}{x^2-5x+6} < 0$ iii. $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} \geq \frac{8}{x^2-1}$

Λύση :

i. Πρέπει $x^2 - 5x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq 4$

Έχω : $\frac{x^2+3x}{x^2-5x+4} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2-5x+4) \leq 0$

$(x^2+3x)(x^2-5x+4) = 0$

$\Leftrightarrow x^2+3x=0 \Leftrightarrow x(x+3)=0 \Leftrightarrow x=0, \text{ ή } x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

ή $x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=4$

x	$-\infty$	-3		0		1		4	$+\infty$
x^2+3x	+	0	-	0	+		+		+
x^2-5x+4	+		+		+	0	-	0	+
Γινόμενο - Πηλίκο	+	0	-	0	+		-		+

Άρα επειδή θέλω $\frac{x^2+3x}{x^2-5x+4} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2-5x+4) \leq 0$ τότε $x \in [-3,0] \cup (1,4)$.

(Στο (1,4) είναι ανοιχτό λόγω του περιορισμού)

ii. Πρέπει $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και $x \neq 3$

Έχω : $\frac{x^2+3}{x^2-5x+6} < 0 \Leftrightarrow (x^2+3)(x^2-5x+6) < 0$

$(x^2+3)(x^2-5x+6) = 0$

$\Leftrightarrow x^2+3=0 \Leftrightarrow x^2=-3, \text{ Αδύνατη}$

ή $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=3$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
x^2+3	+		+		+
x^2-5x+6	+	0	-	0	+
Γινόμενο - Πηλίκο	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $\frac{x^2+3}{x^2-5x+6} < 0 \Leftrightarrow (x^2+3)(x^2-5x+6) < 0$ τότε $x \in (2,3)$.

(Όταν μια παράσταση είναι πάντα θετική τότε δεν επηρεάζει το πρόσημο στην τελευταία σειρά στο πινακάκι. Οπότε θα μπορούσε να παραληφτεί εντελώς.)

iii. Έχω : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{(x-1)(x+1)} \geq 0$ ΕΚΠ = $(x-1)(x+1)$

Πρέπει $(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq -1$. (Σε αυτό το σημείο όμως δεν κάνω απαλοιφή παρανομαστών όπως στις αντίστοιχες κλασματικές εξισώσεις, αλλά **ομώνυμα κλάσματα**. Αυτό γιατί η απαλοιφή παρανομαστών δεν επιτρέπεται στις ανισώσεις

καθώς η παράσταση με την οποία θα πολλαπλασιάσω κάθε όρο, δεν γνωρίζω αν είναι θετική ή αρνητική)

$$\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1) - 2(x-1) - 8}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2x + 2 - 8}{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 6)(x^2 - 1) \geq 0$$

Έχω : $(x^2 - x - 6)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -2$ ή $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

x	$-\infty$	-2		-1		1		3	$+\infty$
$x^2 - x - 6$	+	0	-		-		-	0	+
$x^2 - 1$	+		+	0	-	0	+		+
Γινόμενο – Πηλίκο	+	0	-		+		-	0	+

Άρα επειδή θέλω $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 6)(x^2 - 1) \geq 0$ τότε
 $x \in (-\infty, -2] \cup (-1, 1) \cup [3, +\infty)$. (Στο $(-1, 1)$ είναι ανοιχτό λόγω του περιορισμού)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΑΡΡΗΤΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Είναι οι ανίσωσης που περιέχουν 1 τουλάχιστον ρίζα. Για να τις λύσουμε :

➤ **ΜΟΡΦΗ** : $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ ή $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$

Βήμα 1 : παίρνουμε τους περιορισμούς (υπόρριζες ποσότητες ≥ 0),

Βήμα 2 : βάζουμε το ένα ριζικό στο 1^ο μέλος και το άλλο στο 2^ο,

Βήμα 3 : υψώνουμε και τα δυο μέλη σε δύναμη ίση με την τάξη του ριζικού

Βήμα 4 : τέλος λύνουμε την ανίσωση και συναληθεύουμε με τους περιορισμούς.

➤ **ΜΟΡΦΗ** : $\sqrt{f(x)} > g(x)$ ή $\sqrt{f(x)} < g(x)$

Βήμα 1 : παίρνουμε τους περιορισμούς (υπόρριξη ποσότητες ≥ 0),

Βήμα 2 : βάζουμε το ένα ριζικό στο 1^ο μέλος και πηγαίνουμε όλους τους υπόλοιπους όρους στο 2^ο,

Βήμα 3 : διακρίνουμε τις περιπτώσεις : $g(x) < 0$ και $g(x) \geq 0$ και εξετάζουμε για ποιες τιμές του x ισχύουν.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

4. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $\sqrt{8-x} > \sqrt{x-2}$ ii. $\sqrt{x-3} + 5 \geq x$ iii. $\sqrt{x+4} - 7 \leq x$

Λύση:

i. Πρέπει : $\begin{cases} 8-x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 8 \text{ ή } x \in [2, 8] \text{ (1)}$

$$\sqrt{8-x} > \sqrt{x-2} \Leftrightarrow (\sqrt{8-x})^2 > (\sqrt{x-2})^2 \Leftrightarrow 8-x > x-2 \Leftrightarrow 10 > 2x \Leftrightarrow 2x < 10 \Leftrightarrow x < 5 \quad (2)$$

Από (1) και (2) ισχύει : $x \in [2,5)$

ii. Έχω : $\sqrt{x-3} + 5 \geq x \Leftrightarrow \sqrt{x-3} \geq x-5 \quad (1)$ πρέπει : $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \quad (2)$

Διακρίνω τις περιπτώσεις :

- $x-5 < 0 \Leftrightarrow x < 5 \quad (3)$ άρα από (2) και (3) $x \in [3,5)$
- $x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$ (καλύπτει τον περιορισμό (2) : $x \geq 3$). Τότε στην ανίσωση (1) και τα δυο μέλη είναι μη αρνητικά ≥ 0 άρα μπορώ να υψώσω στο τετράγωνο, έτσι έχω : $\sqrt{x-3} \geq x-5 \Leftrightarrow (\sqrt{x-3})^2 \geq (x-5)^2 \Leftrightarrow x-3 \geq x^2-10x+25 \Leftrightarrow x^2-11x+28 \leq 0$

Είναι $x^2-11x+28=0 \Leftrightarrow x=7$ ή $x=4$

x	$-\infty$	4		7	$+\infty$
$x^2-11x+28$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2-11x+28 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [4,7]$. Συναληθευοντας τη λύση αυτή με τον περιορισμό $x \geq 5$ προκύπτει ότι $x \in [5,7]$

Άρα τελικά από τις παραπάνω περιπτώσεις προκύπτει ότι η ανίσωση ισχύει αν : $x \in [3,5)$ ή $x \in [5,7]$, δηλαδή τελικά $x \in [3,7]$

iii. Έχω : $\sqrt{x+4} - 7 \leq x \Leftrightarrow \sqrt{x+4} \leq x+7 \quad (1)$ πρέπει : $x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4 \quad (2)$

Διακρίνω τις περιπτώσεις :

- $x+7 < 0 \Leftrightarrow x < -7 \quad (3)$ άρα από (2) και (3) η ανίσωση (1) είναι αδύνατη
- $x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -7$, τότε για $x \in [-7, -4)$ η (1) δεν ορίζεται, ενώ για $x \in [-4, +\infty)$ τα δυο μέλη της ανίσωσης (1) είναι μη αρνητικά ≥ 0 άρα μπορώ να υψώσω στο τετράγωνο, έτσι έχω : $\sqrt{x+4} \leq x+7 \Leftrightarrow (\sqrt{x+4})^2 \leq (x+7)^2 \Leftrightarrow x+4 \leq x^2+14x+49 \Leftrightarrow x^2+13x+45 \geq 0 \quad \Delta = -11$, άρα :

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2+13x+45$	+	

άρα $x^2+13x+45 \geq 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ σε συνδυασμό με τον περιορισμό $x \geq -4$ ισχύει τελικά $x \in [-4, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

5. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+2} = \frac{x}{2}$ ii. $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-4}$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\frac{2x}{3x-6} - \frac{x}{2x-4} = 1 + \frac{5x-12}{12-6x}$ ii. $\frac{1}{2x^2-x} = \frac{2}{2x-1} + x^2$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\sqrt{3x-7} = 2$

ii. $\sqrt{2x+7} = x+2$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\sqrt{x-4} - 14 = 2 - x$

ii. $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x-1} = 2$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\sqrt{2+x} + \sqrt{3x-5} = 7$

ii. $\sqrt{x+32} + \sqrt{x} = 16$

iii. $\sqrt[3]{4x-1} + 4 = x$

iv. $\sqrt[3]{2x-3} = \sqrt{x-6}$

10. Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}} = \frac{4-\sqrt{x}}{2}$

11. Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$.

12. Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = \sqrt{8x+1}$

13. Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 4$

14. Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{9x^2+1} = 3x-\lambda$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

15. Να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu^3 x + 4\sigma\nu^2 x + \eta\mu x + 2 = 0$

16. Να λυθεί η εξίσωση : $2\eta\mu^4 x + 5\eta\mu^3 x + 8\sigma\nu^2 x - 17\eta\mu x - 14 = 0$

17. Να λυθεί η εξίσωση : $(x^2 - 3x - 2)^2 + (x^2 - 3x - 4)^2 - 8 = 0$

18. Να λυθεί η εξίσωση : $x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} - 6 = 0$

19. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i. $\frac{x^3 - 4x + 15}{x^2 - 9} < -3$

ii. $\frac{x^3 + 3x - 8}{x - 3} \leq 2$

iii. $\frac{3x^2 - 1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - x} > \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$

iv. $\frac{x^2}{x+1} + \frac{4}{x-1} \geq \frac{16}{x^2 - 1}$

20. Να λυθούν οι ανισώσεις :

- i. $\sqrt{x+1} < 3$
- ii. $\sqrt{3x-5} \leq 0$
- iii. $\sqrt{x-2} \geq \sqrt{2x+1}$

21. Να λυθούν οι ανισώσεις :

- i. $\sqrt{x+3} < x-2$
- ii. $\sqrt{x^2-8x+15} > \sqrt{x^2+x-2}-4$

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΟ 4^Ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2 – 22649

α) Να βρείτε το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3 - 6x^2 + 11x - 2) : (x - 3)$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + \lambda$ να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η διαίρεση $P(x) : (x - 3)$ να έχει υπόλοιπο 0. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 – 22680

Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = -2x^3 + \lambda^2(x^2 - 1) + \lambda(x^3 - 1) + \lambda + 9$

και $Q(x) = (\lambda + 12)x^2 + (\lambda - 2)x^3 + (\lambda^2 - 9)x$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι και τα δύο πολυώνυμα είναι 3ου βαθμού. Συμφωνείτε με την άποψη αυτή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 4 – 22762

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^4 - 12x^3 + 8x^2 + \alpha x + \beta$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $(x + 1)$ αφήνει υπόλοιπο $16 + P(1)$ και διαιρούμενο με $(x - 1)$ αφήνει υπόλοιπο $16 - P(-1)$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $P(1) = 0$ και $P(-1) = 16$. (Μονάδες 8)

β) να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = -3$. (Μονάδες 9)

γ) να αποδείξετε ότι: $P(4) \cdot P(5) \cdot P(6) \cdot P(7) \neq 0$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 – 22764

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο $x^2 + 2x$ και είναι τέτοιο, ώστε $P(1) = 0$ και $P(2) = 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $P(x) = x^3 + x^2 - 2x$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 8$. (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 2$. (Μονάδες 9)

ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ
ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2 – 22640

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 12$.

- α) Να δικαιολογήσετε γιατί το διώνυμο $x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$. (Μονάδες 13)
β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 – 22641

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 11x + 30$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα το 5.

- α) Να υπολογίσετε την τιμή του α . (Μονάδες 12)
β) Για $\alpha = -4$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22642

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 11x + 30$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι η τιμή του για $x = 1$ είναι 16.

- α) Να υπολογίσετε την τιμή του α . (Μονάδες 12)
β) Αν $\alpha = -4$ και το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x) = 0$, να προσδιορίσετε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22643

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς 0, 1 και 3.

- α) Να δείξετε ότι $\beta = -4$, $\gamma = 3$ και $\delta = 0$. (Μονάδες 15)
β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2 – 22644

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^2 x^3 - 4\lambda x + 3$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x - 1$. (Μονάδες 10)
β) Αν $\lambda = 3$ να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 – 22645

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^4 - x^3 + \alpha x^2 - 5x + 6$ διέρχεται από το σημείο $M(-2, 0)$,

- α) να αποδείξετε ότι $\alpha = -14$. (Μονάδες 12)
β) να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22646

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$.

- α) Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $3x^2 - 4x + 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης. (Μονάδες 15)
β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2 – 22647

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$.

- α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2 – 22648

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 5x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x - 2$ είναι ίσο με -4 , να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
(Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha = -2$ και $\beta = 6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 – 22681

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 1$ και $P(2) = 18$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$.
(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$.
(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \leq 0$.
(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2 – 22682

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (k - 6)x^2 - 7x + k$.

α) Να βρείτε για ποια τιμή του $k \in \mathbb{R}$, το 2 είναι ρίζα του $P(x)$.
(Μονάδες 12)

β) Αν $k = 6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22683

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$.

α) Αν γνωρίζετε ότι η τιμή του πολυωνύμου για $x = 1$ είναι ίση με 10 και $P(2) = 10$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
(Μονάδες 12)

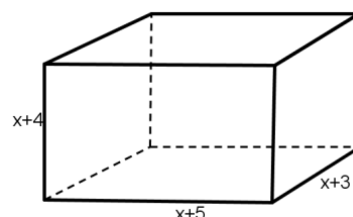
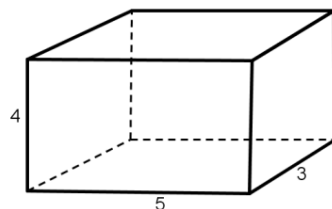
β) Αν $\alpha = -5$ και $\beta = 8$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 10$.
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22684

Μια εταιρεία κατασκευάζει κουτιά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 3cm, 4cm και 5cm. Ένας νέος πελάτης ζήτησε από την εταιρεία να κατασκευάσει κουτιά με όγκο 120 cm^3 , δηλαδή διπλάσιο από εκείνον που κατασκευάζει.

Η εταιρεία αποφάσισε να κατασκευάσει τα κουτιά που ζήτησε ο πελάτης της, αυξάνοντας τις διαστάσεις του αρχικού κουτιού κατά σταθερό ακέραιο μήκος x .

α) Να αποδείξετε ότι το x θα είναι λύση της εξίσωσης $x^3 + 12x^2 + 47x - 60 = 0$.



(Ο όγκος V ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ δίνεται από τον τύπο: $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$).

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο x λύνοντας την εξίσωση που δίνεται στο ερώτημα α).
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22685

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha^3 + 2)x^3 + x^2 + 1$ και $Q(x) = 3\alpha x^3 + x^2 + 1$, όπου α θετικός πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε το α ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.
(Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha = 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.
(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 – 22686

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + \lambda$.

α) Αν $P(-1) = 6$, να δείξετε ότι $\lambda = 1$.

(Μονάδες 11)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 14)

ΘΕΜΑ 2 – 22687

Το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 1)x^4 - 2(\lambda - 1)x^3 + 2\lambda x^2 + \lambda + 1$ είναι 3ου βαθμού.

α) Να δείξετε ότι $\lambda = -1$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το $P(x)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις ρίζες του $P(x)$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 – 22688

Το πολυώνυμο $P(x)$ αν διαιρεθεί με το $(x - 2)$ δίνει πηλίκο και υπόλοιπο τον πραγματικό αριθμό u .

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

β) Αν $P(1) = 10$, να βρείτε το u .

(Μονάδες 9)

γ) Αν $u = 10$, να βρείτε το $P(x)$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4°

ΘΕΜΑ 4 – 22734

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E = 30 \text{ cm}^2$ του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 1 cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y ικανοποιούν τις σχέσεις: $y = \frac{60}{x}$ και $(x+1)^2 = x^2 + y^2$.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση: $2x^3 + x^2 - 3600 = 0$.

(Μονάδες 4)

γ) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 15, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

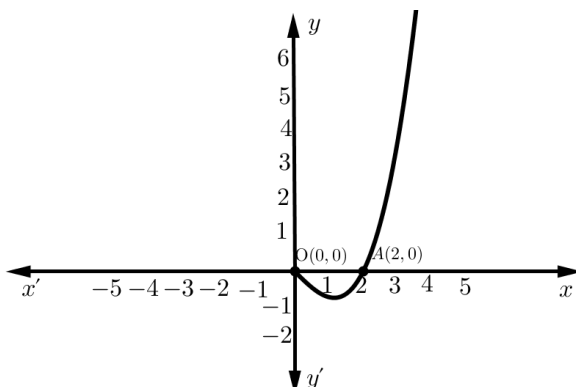
(Μονάδες 12)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο (με διαφορετικά μήκη πλευρών από αυτά που προσδιορίσατε στο ερώτημα γ)) το οποίο ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 – 22759

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης



$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \gamma x + \delta, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } \gamma, \delta \text{ πραγματικές}$$

σταθερές.

α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να αποδείξετε ότι $\gamma = -1$ και $\delta = 0$.

(Μονάδες 5)

β) Θεωρώντας τώρα δεδομένο ότι

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x, \quad x \in \mathbb{R} :$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5)

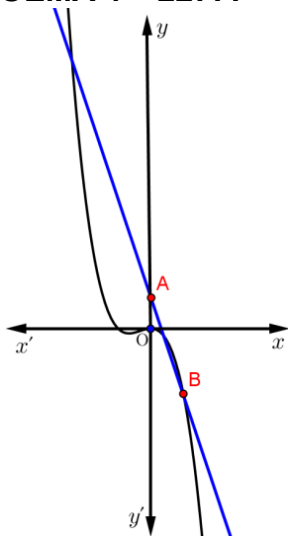
ii. Να μεταφέρετε στην κόλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x < 0$. (Μονάδες 5)

iii. Να επαληθεύσετε ότι $f(1) = -\frac{3}{4}$ και, στη συνέχεια, να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = -\frac{3}{4}$

και $f(x) = \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 – 22777



Στο σχήμα φαίνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^3 - x^2$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(0, 1)$ και $B(1, -2)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.

(Μονάδες 7)

β) Αν η ευθεία έχει εξίσωση $y = -3x + 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $-x^3 - x^2 < -3x + 1$.

(Μονάδες 9)

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 4 – 22766

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa^2 - 1)x^4 + \frac{1}{2}(\kappa + 1)x^3 + (\kappa - 1)x^2 - 3\kappa x + \lambda$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι 3ου βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$ είναι ίσο με -4 .

(Μονάδες 7)

β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 1$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 4 = x^2 - 1$.

(Μονάδες 7)

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{(x-1)^2 \cdot (x+2)} \geq 1$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 – 22769

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x + 1$ είναι ίσο με -6 , να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

β) Αν $\alpha = -5$ και $\beta = 1$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^3\omega + 5\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 3 = 0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 – 22772

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 + \kappa x^2 + x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, όταν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το $x + 2$. (Μονάδες 7)

β) Για $\kappa = -7$ και $\lambda = 6$ να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 9)

γ) Για $\kappa = -7$ και $\lambda = 6$ να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{x-5} \geq 0$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 – 22773

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 7x + \alpha + 5$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x είναι ίσο με 6 και ότι έχει ρίζα το 1.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β . (Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$, να λύσετε:

i. την ανίσωση $P(x) \geq 0$. (Μονάδες 8)

ii. την εξίσωση $\sqrt{P(x)} = x - 1$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 – 22774

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha^3 x^2 - \alpha^2 x - \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x - \alpha)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 7)

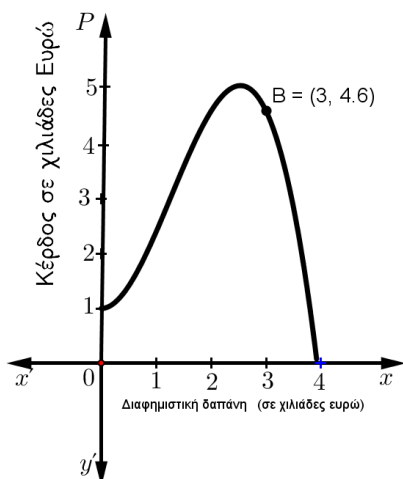
β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το $(x - \alpha)$ διαιρεί το $P(x)$. (Μονάδες 6)

γ) Αν $\alpha = -1$, τότε:

i. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$. (Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε την ανίσωση $(x+1) \cdot P(x) \leq 0$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 – 22775



Μια εταιρεία εκτίμησε ότι το κέρδος της P (σε χιλιάδες ευρώ) από την πώληση ενός συγκεκριμένου προϊόντος ήταν:

$P(x) = -0.5x^3 + 1.9x^2 + 1$, $0 \leq x \leq 4$ όπου x είναι η διαφημιστική δαπάνη (σε χιλιάδες ευρώ). Για αυτό το προϊόν, ξόδεψε για διαφήμιση 3 χιλιάδες ευρώ και το κέρδος της ήταν 4,6 χιλιάδες ευρώ.

α) i. Να χρησιμοποιήσετε την παραπάνω γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ για να εκτιμήσετε ένα άλλο ποσό x που θα μπορούσε να δαπανήσει για διαφήμιση η εταιρεία ώστε να έχει το ίδιο κέρδος. (Μονάδες 5)

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του ερωτήματος i. (Μονάδες 10)

β) Πόσα χρήματα πρέπει να δαπανήσει η εταιρεία για διαφήμιση, ώστε το κέρδος της να είναι μεγαλύτερο από 4,6 χιλιάδες ευρώ; (Μονάδες 10)

5.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

- ✓ Αν α πραγματικός αριθμός και n φυσικός τότε:

$$\boxed{\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{n-\phi\sigma\rho\epsilon\varsigma}}, \quad \boxed{\alpha^1 = \alpha}, \quad \alpha^0 = 1, \quad \alpha \neq 0$$

$$\boxed{\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}}, \quad \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu} \quad \boxed{\text{Π.Χ.1}} \alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha} \quad \boxed{\text{Π.Χ.2}} \alpha^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\alpha^2}$$

- ✓ Αν n περιττός : $\alpha^n = \beta^n \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ενώ αν n άρτιος : $\alpha^n = \beta^n \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$

✓ $\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1+x_2}$, $\frac{\alpha^{x_1}}{\alpha^{x_2}} = \alpha^{x_1-x_2}$, $(\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x$, $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{\alpha^x}{\beta^x}$, $(\alpha^{x_1})^{x_2} = \alpha^{x_1 \cdot x_2}$

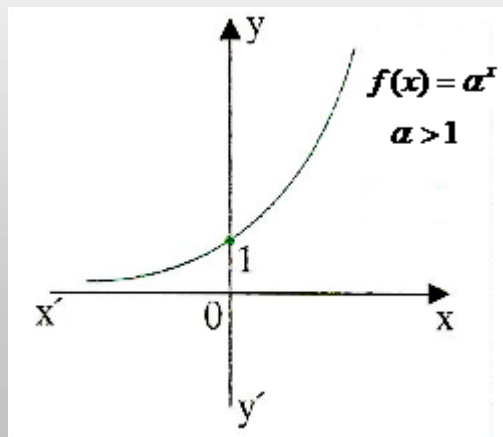
- ✓ Η έννοια της δύναμης επεκτείνεται και στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι άρρητος.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- Η εκθετική συνάρτηση : $f(x) = \alpha^x$, με $\alpha > 1$ έχει τις εξής ιδιότητες :

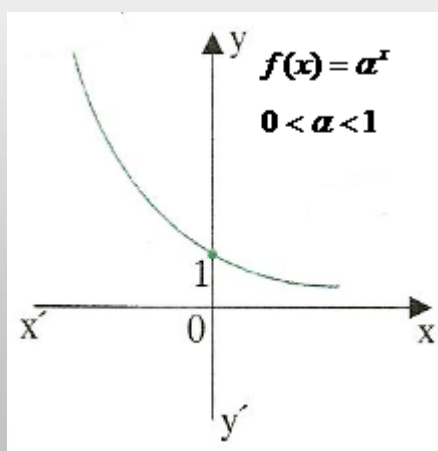
- ✓ Το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}$
- ✓ Το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$ (δηλ. παίρνει μόνο θετικές τιμές)
- ✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, δηλ. για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει :
αν $x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow \alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$
- ✓ Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,1)$ και έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα των x .
- ✓ Καθώς το x τείνει στο $+\infty$ και η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ τείνει στο $+\infty$, ενώ καθώς το x τείνει στο $-\infty$ η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ τείνει στο 0.

Η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha^x$, με $\alpha > 1$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :

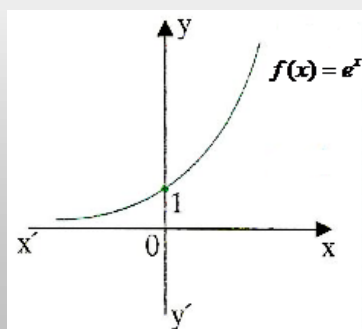


ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- Η εκθετική συνάρτηση : $f(x) = a^x$, με $0 < a < 1$ έχει τις εξής ιδιότητες :
- ✓ Το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}$
 - ✓ Το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$ (δηλ. παίρνει μόνο θετικές τιμές)
 - ✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, δηλ. για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει :
αν $x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$
 - ✓ Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,1)$ και έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημιάξονα των x .
 - ✓ Καθώς το x τείνει στο $+\infty$ και η συνάρτηση $f(x) = a^x$ τείνει στο 0, ενώ καθώς το x τείνει στο $-\infty$ η συνάρτηση $f(x) = a^x$ τείνει στο $+\infty$.
- Η γραφική παράσταση της $f(x) = a^x$, με $0 < a < 1$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :

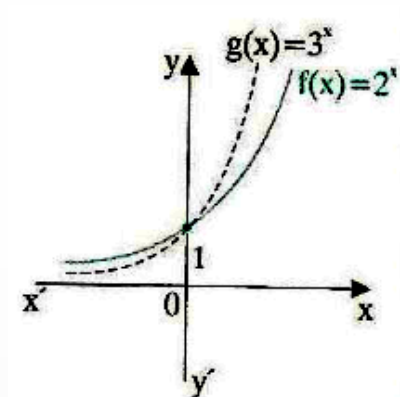
**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΟΡΙΣΜΟΣ e**

Αν θεωρήσουμε την ακολουθία $\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ και δώσουμε πολύ μεγάλες τιμές στο n , τότε οι τιμές της α_n προσεγγίζουν έναν πραγματικό αριθμό. Ο αριθμός αυτός είναι άρρητος και τον συμβολίζουμε με e (από τον Euler) και ισχύει : $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828$. Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι εκθετική συνάρτηση (η πιο συχνά εμφανιζόμενη) και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :

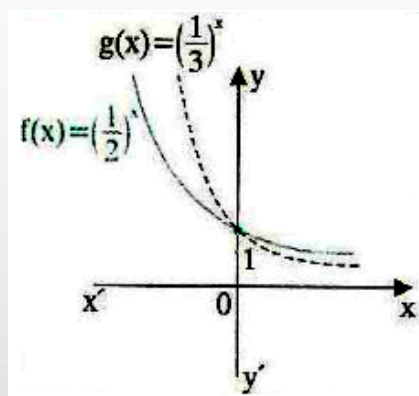


ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

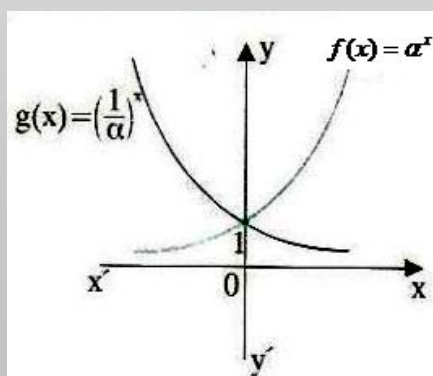
- Για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων της μορφής : $f(x) = \alpha^x$, με $\alpha > 1$, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει το α τόσο η γραφική παράσταση «πλησιάζει» τον άξονα $y'y$ για $x > 0$



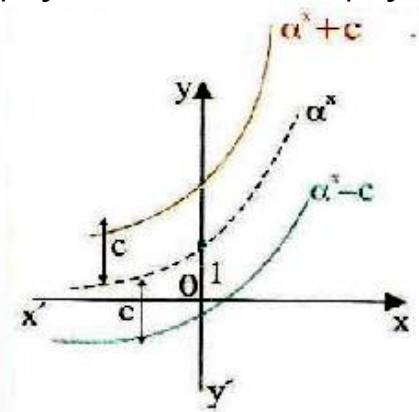
- Για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων της μορφής $f(x) = \alpha^x$, με $0 < \alpha < 1$, παρατηρούμε ότι όσο μικραίνει το α τόσο η γραφική παράσταση «πλησιάζει» τον άξονα $y'y$ για $x < 0$



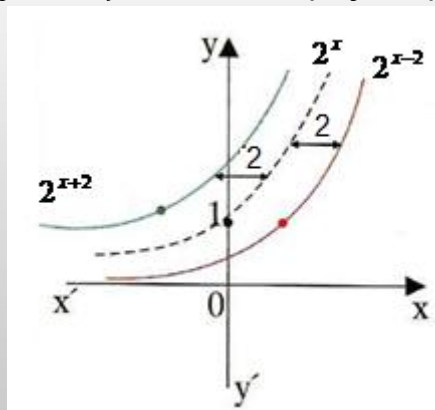
- Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \alpha^x$ και $g(x) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^x$, με $0 < \alpha \neq 1$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$ γιατί : $g(x) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^x = \frac{1}{\alpha^x} = \alpha^{-x} = f(-x)$.



- Η γραφική παράσταση της $f(x) = a^x + c$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της a^x κατά c μονάδες : προς τα πάνω αν $c > 0$, προς τα κάτω αν $c < 0$.



- Η γραφική παράσταση της $f(x) = a^{x+\rho}$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της a^x κατά ρ μονάδες : προς τα δεξιά αν $\rho < 0$, προς τα αριστερά αν $\rho > 0$.



- Η γραφική παράσταση της $f(x) = a^{x+\rho} + c$ προκύπτει από δυο διαδοχικές μετατοπίσεις, μια οριζόντια κατά ρ και μια κατακόρυφη κατά c .

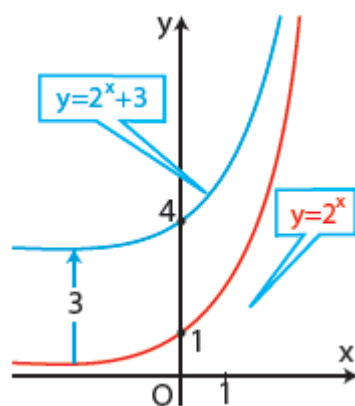
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

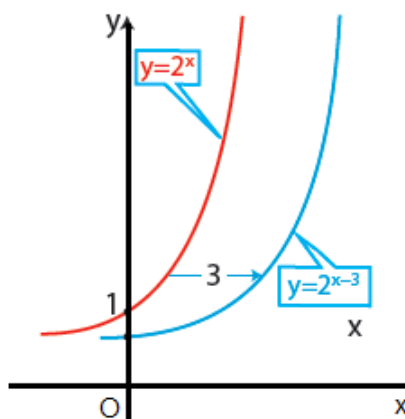
- i. $f(x) = 2^x + 3$ ii. $g(x) = 2^{x-3}$ iii. $h(x) = 2^{x-3} + 2$

Λύση :

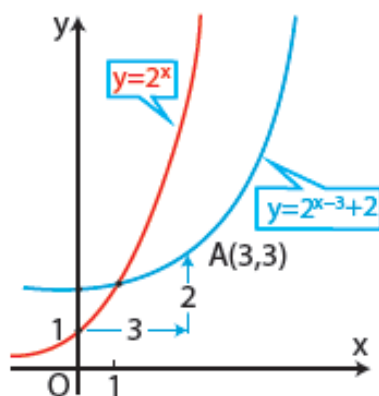
- i. Η γραφική παράσταση της $f(x) = 2^x + 3$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $\phi(x) = 2^x$ κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.



- ii. Η γραφική παράσταση της $g(x) = 2^{x-3}$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $\phi(x) = 2^x$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά.



- iii. Η γραφική παράσταση της $h(x) = 2^{x-3} + 2$ προκύπτει από δυο μετατοπίσεις της $\phi(x) = 2^x$: μιας οριζόντιας κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΒΑΣΗ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ

Η συνάρτηση $f(x) = a^x$

- α) ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$, αν $a > 0$
- β) είναι εκθετική, αν $a > 0$ και $a \neq 1$
- γ) είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αν $a > 1$
- δ) είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αν $0 < a < 1$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

10. (Άσκηση 1 σελ. 171 Β' Ομάδας σχολικό) (Λίγο πιο εμπλουτισμένη)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}\right)^x$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$f(x)$:

- i. έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- ii. είναι εκθετική.
- iii. είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- iv. είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση :

- i. Για να έχει η συνάρτηση f πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, αρκεί η βάση της δύναμης να είναι θετικός αριθμός, δηλαδή όταν : $\frac{2-\alpha}{2\alpha-1} > 0 \Leftrightarrow (2-\alpha)(2\alpha-1) > 0$ με $2\alpha-1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{1}{2}$.

Είναι :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$2-\alpha$	+		+	0	-
$2\alpha-1$	-	0	+		+
$(2-\alpha)(2\alpha-1)$	-		+		-

Τελικά η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ όταν $(2-\alpha)(2\alpha-1) > 0 \Leftrightarrow \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

- ii. Η συνάρτηση f είναι εκθετική όταν :

- $\frac{2-\alpha}{2\alpha-1} > 0 \Leftrightarrow (2-\alpha)(2\alpha-1) > 0 \Leftrightarrow \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ και
- $\frac{2-\alpha}{2\alpha-1} \neq 1 \Leftrightarrow 2-\alpha \neq 2\alpha-1 \Leftrightarrow 3\alpha \neq 3 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$

Τελικά η συνάρτηση f είναι εκθετική όταν : $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2)$

- iii. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα όταν : $0 < \frac{2-\alpha}{2\alpha-1} < 1$

- $\frac{2-\alpha}{2\alpha-1} > 0 \Leftrightarrow \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ (1)

$$\bullet \frac{2-\alpha}{2\alpha-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2-\alpha}{2\alpha-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2-\alpha-2\alpha+1}{2\alpha-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{3-3\alpha}{2\alpha-1} < 0 \Leftrightarrow (3-3\alpha)(2\alpha-1) < 0$$

Είναι :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$3-3\alpha$	+		+	0	-
$2\alpha-1$	-	0	+		+
$(2-\alpha)(2\alpha-1)$	-		+		-

$$\text{Άρα : } \alpha \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty) \quad (2)$$

Τελικά η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα όταν συναληθεύουν οι (1) και (2) δηλαδή όταν : $\alpha \in (1, 2)$.

iv. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα όταν : $\frac{2-\alpha}{2\alpha-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{2-\alpha}{2\alpha-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\alpha-2\alpha+1}{2\alpha-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{3-3\alpha}{2\alpha-1} > 0 \Leftrightarrow (3-3\alpha)(2\alpha-1) > 0 \Leftrightarrow \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Είναι οι εξισώσεις που η μεταβλητή x βρίσκεται στον εκθέτη. Οι μορφές που μπορεί να συναντήσουμε είναι οι εξής :

Μορφή 1 : Αν η εξίσωση έχει τη μορφή $\alpha^{f(x)} = \beta^{g(x)}$ τότε προσπαθούμε να γράψουμε και τα δυο μέλη ως εκθετικά με την ίδια βάση και στη συνέχεια εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι οι εκθετικές συναρτήσεις είναι "1-1". (Αν δεν μπορούμε να γράψουμε και τα δυο μέλη ως εκθετικά με την ίδια βάση, τότε η εξίσωση λύνεται με τη βοήθεια λογαρίθμων όπως θα μάθουμε σε επόμενη ενότητα.)

Μορφή 2 : Εξισώσεις που περιέχουν εκθετικά τα οποία μπορούν όλα να γραφούν με την ίδια βάση a , λύνονται συνήθως θέτοντας $a^x = \omega > 0$.

Μορφή 3 : Σε εξισώσεις που περιέχουν εκθετικά τα οποία δεν μπορούν να γραφούν όλα με την ίδια βάση, αλλά εμφανίζονται δυο διαφορετικές βάσεις, έστω a, b , τότε εργαζόμαστε ως εξής :

- Μεταφέρουμε τις δυνάμεις με τις ίδιες βάσεις σε ξεχωριστά μέλη
- Καταλήγουμε σε μια εξίσωση της μορφής : $\lambda \cdot a^x = \mu \cdot b^x$ η οποία λύνεται ως εξής :

$$\lambda \cdot a^x = \mu \cdot b^x \Leftrightarrow \frac{a^x}{b^x} = \frac{\mu}{\lambda} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{\mu}{\lambda} \text{ και στη συνέχεια εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι οι εκθετικές συναρτήσεις είναι "1-1".}$$

Στις παραπάνω μορφές ιδιαίτερα χρήσιμες είναι οι ιδιότητες :

$$a^{\mu+\nu} = a^{\mu} \cdot a^{\nu}, \quad a^{\mu-\nu} = \frac{a^{\mu}}{a^{\nu}}, \quad (a^{\mu})^{\nu} = a^{\mu\nu}.$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**2. (Μορφή 1)** Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

$$\text{i. } e^{x^2-5x+6} = 1 \quad \text{ii. } \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16} \quad \text{iii. } 32^x = 16^{1-x}$$

Λύση :

$$\text{i. } e^{x^2-5x+6} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2-5x+6} = e^0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2, \text{ ή } x = 3$$

$$\text{ii. } \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3^4}{2^4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \Leftrightarrow x = -4$$

$$\text{iii. } 32^x = 16^{1-x} \Leftrightarrow (2^5)^x = (2^4)^{1-x} \Leftrightarrow 2^{5x} = 2^{4-4x} \Leftrightarrow 5x = 4 - 4x \Leftrightarrow 9x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{9}$$

3. (Μορφή 2) Να λυθεί η εξίσωση : $3^{2x+1} - 26 \cdot 3^x - 9 = 0$

$$\text{Λύση : } 3^{2x+1} - 26 \cdot 3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} \cdot 3 - 26 \cdot 3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 26 \cdot 3^x - 9 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Θέτω } 3^x = y \text{ άρα η (1) γίνεται : } 3y^2 - 26y - 9 = 0 \quad \Delta = (-26)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9) = 784$$

$$y_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{784}}{6} = \frac{26 \pm 28}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 \\ \text{ή} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Για } y = 9 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\bullet \text{ Για } y = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x = -\frac{1}{3} \text{ Αδύνατο.}$$

4. (Μορφή 3) Να λυθεί η εξίσωση : $21 \cdot 3^x + 5^{x+3} = 3^{x+4} + 5^{x+2}$

$$\text{Λύση : } 21 \cdot 3^x + 5^{x+3} = 3^{x+4} + 5^{x+2} \Leftrightarrow 21 \cdot 3^x + 5^x \cdot 5^3 = 3^x \cdot 3^4 + 5^x \cdot 5^2 \Leftrightarrow$$

$$21 \cdot 3^x + 125 \cdot 5^x = 81 \cdot 3^x + 25 \cdot 5^x \Leftrightarrow 125 \cdot 5^x - 25 \cdot 5^x = 81 \cdot 3^x - 21 \cdot 3^x \Leftrightarrow$$

$$100 \cdot 5^x = 60 \cdot 3^x \Leftrightarrow \frac{5^x}{3^x} = \frac{60}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = -1$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ :

Για την επίλυση εκθετικών ανισώσεων εργαζόμαστε όπως στις εκθετικές εξισώσεις. Έτσι σε οποιαδήποτε περίπτωση καταλήγουμε στην επίλυση ανίσωσης της μορφής :

$$\alpha^{f(x)} > \alpha^{g(x)}. \text{ Τότε αν :}$$

$$\text{➤ } \alpha > 1 \text{ έχουμε : } \alpha^{f(x)} > \alpha^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

$$\text{➤ } 0 < \alpha < 1 \text{ έχουμε : } \alpha^{f(x)} > \alpha^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**5.** Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις :

$$\text{i. } e^{2x-x^2} < 1 \quad \text{ii. } 2^{x^2-2x} < 8^{x-2} \quad \text{iii. } \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < 2^{4-2x}$$

Λύση :

i. $e^{2x-x^2} < 1 \Leftrightarrow e^{2x-x^2} < e^0 \stackrel{\text{γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} 2x-x^2 < 0$

Έχω $2x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0 \Leftrightarrow x=0, \text{ ή } x=2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$2x-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $2x-x^2 < 0$ τότε $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

ii. $2^{x^2-2x} < 8^{x-2} \Leftrightarrow 2^{x^2-2x} < (2^3)^{x-2} \Leftrightarrow 2^{x^2-2x} < 2^{3x-6} \stackrel{\text{γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} x^2-2x < 3x-6 \Leftrightarrow x^2-5x+6 < 0$

Έχω $x^2-5x+6 = 0 \Leftrightarrow x=2, \text{ ή } x=3$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
x^2-5x+6	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2-5x+6 < 0$ τότε $x \in (2, 3)$

iii. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < 2^{4-2x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-(4-2x)} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} \stackrel{\text{γν. φθιν.}}{\Leftrightarrow} x+1 > 2x-4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -x > -5 \Leftrightarrow x < 5$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6. (Άσκηση 5 σελ. 170 Α ομάδας σχολικό)

Να λυθούν τα συστήματα :

i. $\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 4^{4y-1} \\ 5 \cdot 5^{x-y} = 5^{2y+1} \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 3^x + 2^y = 11 \\ 3^x - 2^y = 7 \end{cases}$

Λύση :

i. $\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 4^{4y-1} \\ 5 \cdot 5^{x-y} = 5^{2y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^3)^{2x+1} = 2^5 \cdot (2^2)^{4y-1} \\ 5^{x-y+1} = 5^{2y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{6x+3} = 2^5 \cdot 2^{8y-2} \\ 5^{x-y+1} = 5^{2y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{6x+3} = 2^{8y-2+5} \\ 5^{x-y+1} = 5^{2y+1} \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+3 = 8y+3 \\ x-y+1 = 2y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-8y = 0 & (1) \\ x-3y = 0 & (2) \end{cases}$, η (1) γίνεται $x=3y$ έτσι η (2) γίνεται
 $6 \cdot 3y - 8y = 0 \Leftrightarrow y=0$ και $x=3 \cdot 0 \Leftrightarrow x=0$. Τελικά $(x, y) = (0, 0)$.

ii. $\begin{cases} 3^x + 2^y = 11 \\ 3^x - 2^y = 7 \end{cases}$ θέτουμε : $3^x = \alpha > 0$ και $2^y = \beta > 0$, οπότε το σύστημα γίνεται :
 $\begin{cases} 3^x + 2^y = 11 \\ 3^x - 2^y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 11 \\ \alpha - \beta = 7 \end{cases}$ προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $2\alpha = 18 \Leftrightarrow \alpha = 9$ και με

αντικατάσταση στην πρώτη : $9 + \beta = 11 \Leftrightarrow \beta = 2$. Τελικά : $\begin{cases} \alpha = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2 \\ \beta = 2 \Leftrightarrow 2^y = 2 \Leftrightarrow y = 1 \end{cases}$

Τελικά $(x, y) = (2, 1)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

7. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύπτουν αληθείς προτάσεις:

- Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = a^x$ είναι εκθετική με βάση το a , τότε για το a ισχύει
- Η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης με βάση το a τέμνει το άξονα $y'y$ στο σημείο
- Η γραφική παράσταση με βάση το a , όπου $a > 1$ έχει ασύμπτωτη
- Αν $0 < a \neq 1$, η συνάρτηση $f(x) = a^x$ έχει σύνολο τιμών το
- Αν $0 < a < 1$, τότε η συνάρτηση $f(x) = a^x$ ως προς τη μονοτονία είναι
- Νόμος της εκθετικής μεταβολής είναι η συνάρτηση
- Νόμος της εκθετικής απόσβεσης είναι η συνάρτηση με

8. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

- Αν το $a > 0$, $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$, $\nu > 0$, τότε $a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^\mu}$
- Αν $a > 0$, τότε η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = a^x$ λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση a .
- Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ λέγεται εκθετική.
- Αν $a > 1$, η συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι γνησίως φθίνουσα.
- Αν $0 < a < 1$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, τότε $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$
- Αν $0 < a \neq 1$, τότε η συνάρτηση $f(x) = a^x$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a^x$, $a > 1$ έχει ασύμπτωτη το θετικό ημιάξονα Ox
- Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f(x) = a^x$ και $g(x) = a^{-x}$, $0 < a \neq 1$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.
- Αν $0 < a \neq 1$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, τότε $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
- Αν η συνάρτηση $Q(t) = Q_0 e^{ct}$ είναι ο νόμος της εκθετικής μεταβολής, τότε $Q_0 > 0$.
- Αν η συνάρτηση $Q(t) = Q_0 e^{ct}$ είναι ο νόμος της εκθετικής απόσβεσης, τότε $c > 0$.

9. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

- Η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα.
- Η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα.
- Η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{e}\right)^x$ έχει ασύμπτωτη το θετικό ημιάξονα των x .
- $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ v. $3^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$
- $5^x < 25 \Leftrightarrow x < 2$ vii. $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

10. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

- Αν $x > 0$, τότε $e^x > 1$
- Αν $x < 0$, τότε $10^x < 1$
- Οι αριθμοί x και $e^x - 1$ είναι ομόσημοι.
- Για κάθε $x \neq 0$ είναι $\frac{e^x - 1}{x} > 0$
- $3^{x^2} \geq 1$
- $2^{e^x} > 1$ vii. $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} \leq 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**

11. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

i. $f(x) = 3^x$	g(x) = 3^{x+2}	h(x) = $3^{x+2} - 1$
ii. $f(x) = 2^x$	g(x) = 2^{x-2}	h(x) = $2^{x-2} + 3$
iii. $f(x) = e^x$	g(x) = e^{x-1}	h(x) = $e^{x-1} - 2$
iv. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	g(x) = $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$	h(x) = $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 3$
v. $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$	g(x) = $\left(\frac{3}{5}\right)^{x-3}$	h(x) = $\left(\frac{3}{5}\right)^{x-3} + 2$

12. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

- i. $f(x) = 3^{|x|}$
- ii. $f(x) = 3^{-|x|}$
- iii. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$
- iv. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-|x|}$

13. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

- i. $f(x) = 2^{|x|+x}$
- ii. $f(x) = 2^{|x|-x}$
- iii. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|+x}$
- iv. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|-x}$
- v. $f(x) = \sqrt{4 \cdot 4^x + 12 \cdot 2^x + 9}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΒΑΣΗ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ

- 14.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\lambda+4}{2-\lambda}\right)^x$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R} - \{2\}$ η συνάρτηση $f(x)$:
- έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
 - είναι εκθετική
 - είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
 - είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
- 15.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (2\alpha - 5)^x$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)$:
- έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
 - είναι εκθετική
 - είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
 - είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
- 16.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (|\lambda| - 3)^x$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)$:
- έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
 - είναι εκθετική
 - είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
 - είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
- 17.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (3\lambda^2 + 8\lambda + 5)^x$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)$:
- είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
 - είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
- 18.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (6\lambda^3 - 7\lambda^2 + 1)^x$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)$:
- είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
 - είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
- 19.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\lambda^4 + 4\lambda^3 - 7\lambda^2 - 22\lambda + 25)^x$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- 20.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda - 7}{2\lambda - 1}\right)^x$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**21.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $3^{2x} = \frac{1}{81}$

ii. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$

iii. $2^{-x} = 32$

iv. $\frac{1}{2^x} = 16$

v. $4^{3x} = 2^4 \cdot 16^{\frac{x}{2}}$

vi. $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

22. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $e^{x^2-2x} = 1$ ii. $3^{8-|x|} = 9^{|x|-2}$ iii. $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{64}{27}$ iv. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+5} = \sqrt{2}^{x-4}$

23. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$ ii. $2^{2x+1} - 4 \cdot 2^x = 0$

iii. $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$ iv. $3^x - 7 = \frac{63}{3^{x+1}} - 3^{3-2x}$

24. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $3^{2x} + 9^x = 11 \cdot 4^{x-1} + 4^{x+1}$

ii. $3 \cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} = 5^{x-2} - 6 \cdot 5^{x-3}$

iii. $9^{x+1} - 4^{x+2} = 44 \cdot 4^{x-1} + 3^{2x}$

iv. $4^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 9^{x+1} = 0$

25. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $2^{x^2-5x+6} = 1$

i. $2^{4x+10} - 3 \cdot 2^{2x+5} + 2 = 0$

iii. $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

iv. $3^{2x-2} + 3^x = 4$

v. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$

vi. $4^{3x} = 2^4 \cdot 16^{\frac{x}{2}}$

vii. $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$

viii. $2 \cdot 9^x - 3^{x+1} - 135 = 0$

26. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $2^x - 5\sqrt{2^x} + 4 = 0$

ii. $3^{x+1} - 28 + 9 \cdot 3^{-x} = 0$

iii. $2^{x-2} - 3^{x-3} + 3^{x-4} = 0$

iv. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

v. $9^{x-1} + \sqrt{9^{x+1}} - 10 = 0$

vi. $3^{x-1} + \sqrt{3^{x+1}} - 108 = 0$

27. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $(x^2-5x+5)^{x+2} = 1$

ii. $e^{2x} + e = e^x + e^{x+1}$

iii. $(\sqrt{3}+1)^{x+5} = 1$

iv. $3^{(x^2-9)(x-2)} = 1$

v. $(x^2-3x+1)^{3x-5} = 1$

vi. $(x-3)^{2x^2-5x-3} = (x-3)^{x^2-4x+3}$

28. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $5 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 5^{2x} = 0$

ii. $4^{x+1} - 12 \cdot 6^{x-1} - 6 \cdot 9^x = 0$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ**29.** Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $e^{x^2-x} < 1$

ii. $e^{x^2-5x} - e^6 < 0$

iii. $7^{2x-4} > 7^{x+1}$

iv. $3^{2x} + 3 \leq 28 \cdot 3^{x-1}$

v. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} < 5^{1-2x}$

vi. $3^{x^2-7x+9} < \frac{1}{3}$

30. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $3^{12-5x} < 9$

ii. $e^{|2x-1|-5} \geq 1$

iii. $5^{3-4x} \geq -25$

iv. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-2x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x+10}$

v. $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-9} < -1$

vi. $\left(\frac{1}{27}\right)^{x^2-4x} - \left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-3x-4} \geq 0$

31. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $3^{x^2-7x+6} < 1$

ii. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} < \left(\frac{1}{4}\right)^{x+\frac{5}{2}}$

iii. $(0,5)^{5x-x^2-1} < 0,125$

iv. $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

v. $6^x + 6^{x+1} < 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$

vi. $2^{x-1} - 15 \cdot 3^{x-6} \leq 4 \cdot 2^{x-5} + 3^{x-4}$

32. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $4 \cdot 2^{x-3} + \frac{16}{2^{x+2}} > 3$

ii. $16 \cdot 8^{x-1} - 13 \cdot 4^x + 11 \cdot 2^{x+1} - 8 \leq 0$

iii. $6^{x+1} + 4^{x+1} < 10 \cdot 9^x$

iv. $50^x + 10 \cdot 2^{x-1} \leq \frac{3}{5} \cdot 10^{x+1}$

33. Να λύσετε την ανίσωση : $(x^2 - 2x - 3)(e^x - 1)(2^x - 8) \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{4}{9} \right) \geq 0$.**34.** Να λύσετε την ανίσωση : $(x^2 - 3x - 4)(e^x - 1)(2^x - 16) \leq 0$.**35.** Να λύσετε την ανίσωση : $(x-2)^{2x^2-3x-5} > 1$ με $x > 2$.**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ****36.** Να λυθούν τα συστήματα:

i. $\begin{cases} 9^{x+1} = 3^{y+3} \\ 4^{x+y} = 8 \cdot 2^x \end{cases}$

ii. $\begin{cases} 2^{x-1} \cdot 4^y = 1 \\ 3^x \cdot 3^{y-1} = 9 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 5^{3x-1} \cdot 25^{y+1} = 1 \\ 4^{2x+4} \cdot 8^{y-1} = 8 \end{cases}$

37. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{array}{llll} \text{i. } \begin{cases} 8^{x-y} \cdot 4^{2y-1} = 4 \cdot 2^x \\ 1000^{x-2} = 10 \cdot 100^{x+y} \end{cases} & \text{ii. } \begin{cases} 2^{x+1} - 15 \cdot 3^{y-1} = 3 \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 13 \end{cases} & \text{iii. } \begin{cases} 2^x = 3y \\ y \cdot 3^x = 12 \end{cases} & \text{iv. } \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 108 \\ 2^y \cdot 3^x = 72 \end{cases} \end{array}$$

38. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \begin{cases} 2^{x^2-5x+6} = 1 \\ x + y = 8 \end{cases} & \text{ii. } \begin{cases} 4^x 8^y = 256 \\ 64 \cdot 4^x - 8^y = 0 \end{cases} \\ \text{iii. } \begin{cases} 2^{x+y} = 4 \\ 2^{x+1} + 2^{y+1} = 10 \end{cases} & \text{iv. } \begin{cases} 2^{x+1} - 15 \cdot 3^{y-1} = 3 \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 13 \end{cases} \end{array}$$

39. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \begin{cases} 3^x - 5^y = 4 \\ 9 \cdot 3^{-x} + 5^y = 6 \end{cases} & \text{ii. } \begin{cases} 3^x - 5^y = 4 \\ 27^x - 125^y = 604 \end{cases} \\ \text{iii. } \begin{cases} 5^x - 4^{y+1} = 9 \\ 5^{x-1} + 4^{y+2} = 69 \end{cases} & \text{iv. } \begin{cases} \sqrt[x]{x+y} = 2 \\ (x+y) \cdot 3^{x-7} = 2^7 \end{cases} \end{array}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : Ο ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Μια εκθετική συνάρτηση με βάση το e είναι η $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$. Αυτή εκφράζει ένα φυσικό μέγεθος, που μεταβάλλεται με το χρόνο t . Το Q_0 είναι η αρχική τιμή του Q (για $t=0$) και είναι $Q_0 > 0$, ενώ το c είναι μια σταθερά που εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη εφαρμογή. Η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή ως **νόμος της εκθετικής μεταβολής**. Αν $c > 0$ η συνάρτηση Q είναι γνησίως αύξουσα και εκφράζει το νόμο της **εκθετικής αύξησης**, ενώ αν $c < 0$ η Q είναι γνησίως φθίνουσα και εκφράζει το νόμο της **εκθετικής απόσβεσης**.

40. Κατά τη διάρκεια του φθινοπώρου, ο μισός πληθυσμός των μυγών πέθαινε κάθε 3 μέρες. Αν αρχικά ο πληθυσμός τους ήταν 1 εκατομμύριο και η συνάρτηση που περιγράφει τη μείωσή τους είναι η $P(t) = P_0 2^{-ct}$, όπου c σταθερά, να βρεθεί ο αριθμός των επιζώντων μυγών μετά από:

i. 15 μέρες, ii. 3 βδομάδες.

41. Σ' έναν ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία (πυρετός) $\Theta(t)$ του ασθενούς t ώρες μετά τη λήψη του φαρμάκου δίνεται

από τον τύπο $\Theta(t) = 36 + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^t$ σε βαθμούς Κελσίου.

- Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο.
- Να βρείτε σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει φυσιολογική τιμή ($36,5^\circ\text{C}$).
- Αν η επίδραση του αντιπυρετικού διαρκεί 4 ώρες πόση θα είναι η θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η επίδραση του φαρμάκου.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

42. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x) = 4^x + \lambda$ διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{3}{2}, 11\right)$.
- Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$
 - Να λύσετε την εξίσωση : $f\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \eta\mu^2 x + f\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu x = 56(1 - \sigma\upsilon\nu x)$
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
43. Η συνάρτηση : $f(x) = (-3\lambda^2 + 12\lambda - 8)^x$, με $\lambda \in \mathbb{Z}$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{Z}$
 - Να λύσετε την εξίσωση : $f\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \eta\mu \frac{5\pi}{6} \cdot \eta\mu \frac{4\pi}{3} \cdot \eta\mu x = \left[f\left(\frac{5}{2}\right) + f(1) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma\upsilon\nu x$
44. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3^x - 3^{x+\alpha} - 2^{x+2} - 2^{x-1}$ διέρχεται από το σημείο $A(3, -12)$. Να βρείτε:
- Την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$
 - Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.
45. Το πολυώνυμο $f(x) = x^4 + 5^{2\lambda-1}x^3 - 2 \cdot 3^{\lambda+\frac{1}{2}} \cdot x^2 + 25^\lambda \cdot x - 1$ έχει παράγοντα το $x-1$.
- Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$
 - Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
46. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = (\alpha + 2)^x - 5\alpha^{x+1} + 20$ με $\alpha > 0$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(2, -4)$.
- Να βρείτε τον αριθμό α .
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 4$.
 - Να λύσετε το σύστημα :
$$\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = (f(1))^{\frac{3}{2}} \\ 2^x + 2^y = 3(f(3))^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$
47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\frac{4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8}{2^{x-2} + 4}}$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Να λύσετε την εξίσωση $9^{f(x)} - 8 \cdot 3^{f(x)} - 9 = 0$.

48. Δίνετε το σύστημα $\begin{cases} 4^{\alpha-3} \cdot 8^{\beta-2} = 2 \\ 7^{3\alpha-2\beta} = 1 \end{cases}$

i. Να βρείτε τις τιμές των α και β

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x < \frac{8}{27}$

iii. Να λύσετε την εξίσωση $\alpha^{x-1} \cdot \beta^{x+1} = 54$

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{40}{4^{x+\lambda} - 8}$

i. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(3,5)$, να δείξετε ότι $\lambda = -1$.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

iii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = -\frac{160}{31}$. (Απ. $x = 0$)

iv. Να λύσετε την εξίσωση : $9^{y-1} + \sqrt{9^{y+1}} + f(2) = 0$. (Απ. $y = 1$)

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (2^{\lambda-3} - 1)^x$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και για ποιες είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(2,9)$.

iii. Αν $\lambda = 5$, να λύσετε την εξίσωση : $f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$.

iv. Αν $\lambda = 5$, να λύσετε την ανίσωση : $f(-2x) - 4f(-x) + 3 \leq 0$.

v. Αν $\lambda = 5$, να δείξετε ότι : $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

51. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 4^{\frac{\eta\mu x}{2}} \cdot 2^{2\sigma\nu^2 x - 5} + \alpha$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

i. Να δείξετε ότι $\alpha = -\frac{1}{8}$.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{1}{e^4} + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{2}{e}\right)^{|x|} \geq 0$

5.2 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

✓ Ο $\log_a \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον a για να βρούμε το θ .

Δηλ. $\log_a \theta = x \Leftrightarrow a^x = \theta$ π.χ. $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

✓ Από τον ορισμό του λογάριθμου προκύπτει ότι αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\theta > 0$ ισχύει : $\log_a a^x = x$, $a^{\log_a \theta} = \theta$, $\log_a 1 = 0$ και $\log_a a = 1$

✓ Οι ιδιότητες των λογαρίθμων που ισχύουν είναι :

Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύουν :

1. $\log_a (\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$

Απόδειξη :

Έστω ότι είναι : $\log_a \theta_1 = x_1$ και $\log_a \theta_2 = x_2$ (1). Τότε έχουμε :

$$a^{x_1} = \theta_1 \quad \text{και} \quad a^{x_2} = \theta_2 \quad \text{οπότε :}$$

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2 \quad \text{και} \quad a^{x_1+x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2. \text{ Από τον ορισμό του λογάριθμου,}$$

η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την $\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = x_1 + x_2$ από την οποία, λόγω των (1), έχουμε τελικά :

$$\log_a (\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

2. $\log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$

Απόδειξη : Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο.

3. $\log_a \theta^\kappa = \kappa \log_a \theta$

Απόδειξη :

Έστω ότι είναι : $\log_a \theta = x$ (2). Τότε έχουμε $a^x = \theta$ οπότε $a^{\kappa x} = \theta^\kappa$. Από τον ορισμό του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την $\log_a \theta^\kappa = \kappa x$ από την οποία, λόγω της (2), προκύπτει ότι :

$$\log_a \theta^\kappa = \kappa \log_a \theta$$

✓ **Δεκαδικός λογάριθμος** λέγεται ο λογάριθμος που έχει βάση το 10 : $\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$

π.χ. $\log 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$, $\log 1000 = 3 \Leftrightarrow 10^3 = 1000$, $\log 0,1 = -1 \Leftrightarrow 10^{-1} = 0,1$,
 $\log 0,0001 = -4 \Leftrightarrow 10^{-4} = 0,0001$, $\log 1 = 0 \Leftrightarrow 10^0 = 1$

✓ **Νεπεριος ή φυσικός λογάριθμος** λέγεται ο λογάριθμος που έχει βάση το e :

$\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$, όπου $e \approx 2,71$.

✓ Μπορούμε να γράψουμε οποιονδήποτε αριθμό $x \in \mathbb{R}$ ως λογάριθμο με βάση a (όπου $0 < a \neq 1$) καθώς $x = \log_a a^x$, π.χ. $x = \log 10^x$, $x = \ln e^x$, $3 = \log_4 4^3$

✓ **Ο τύπος αλλαγής βάσης** είναι : $\log_\beta \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ

Αν μας ζητούν να υπολογίσουμε ένα λογάριθμο ή μια μεταβλητή μέσα σε αυτόν, τότε χρησιμοποιούμε τον ορισμό : $\log_a \theta = x \Leftrightarrow a^x = \theta$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5. (Άσκηση 1 σελ. 179 Α' Ομάδας)

Να υπολογιστούν, χωρίς τη χρήση υπολογιστή τσέπης, οι λογάριθμοι :

i. $\log_{10} 0,001$

Λύση :

i. $\log_{10} 0,001 = x \Leftrightarrow 10^x = 0,001 \Leftrightarrow 10^x = 10^{-3} \Leftrightarrow x = -3.$

6. (Άσκηση 2 σελ. 179 Α' Ομάδας)

Για ποια τιμή του x ισχύει :

i. $\log_{10} x = 3$

Λύση :

i. $\log_{10} x = 3 \Leftrightarrow 10^3 = x \Leftrightarrow x = 1000$

7. (Άσκηση 3 σελ. 179 Α' Ομάδας)

Για ποια τιμή του α ισχύει :

i. $\log_{\alpha} 16 = 4$

Λύση :

i. $\log_{\alpha} 16 = 4 \Leftrightarrow \alpha^4 = 16 \Leftrightarrow \alpha^4 = 2^4 \Leftrightarrow \alpha = 2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Να υπολογίσετε τους λογάριθμους :

i. $\log_4 256$ ii. $\log_3 243$ iii. $\log \sqrt{1000}$ iv. $\log_{0,4} 0,16$

v. $\log_4 \frac{1}{32}$ vi. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$ vii. $\log_2 16$ viii. $\log_3 9^{15}$

ix. $\log_5 \sqrt{5}$ x. $\log_{13} 1$ xi. $5^{\log_5 3}$

9. Να υπολογίσετε τους λογάριθμους :

i. $\log 10$ ii. $\ln e$ iii. $\log 1$ iv. $\ln 1$ v. $\log 10000$

vi. $\ln \frac{1}{e^2}$ vii. $\log(\ln e^{100})$ viii. $10^{\log 3}$ ix. $e^{\ln 5}$

10. Να υπολογισθεί το x στις παρακάτω ισότητες.

i. $\log_2 x = -3$ ii. $\log x = 5$ iii. $\ln x = 2$ iv. $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$

11. Να υπολογισθεί το x στις παρακάτω ισότητες.

i. $\log_x 27 = \frac{3}{2}$ ii. $\log_x 125 = -3$ iii. $\log_x (2x^2 - 7x + 12) = 2$ iv. $\ln x^4 = 4e$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Για να λύσουμε αποδεικτικές – υπολογιστικές ασκήσεις χρησιμοποιούμε τον ορισμό και τις ιδιότητες των λογαρίθμων.

(Αν οι λογάριθμοι δεν έχουν την ίδια βάση, χρησιμοποιούμε τον τύπο αλλαγής βάσης, για να έχουμε παντού την ίδια βάση, και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον ορισμό και τις ιδιότητες ώστε να καταλήξουμε στη ζητούμενη σχέση.)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

12. (Άσκηση 4 σελ. 179 Α' Ομάδας)

Να αποδείξετε ότι :

i. $\log_2 3 + 2\log_2 4 - \log_2 12 = 2$

Λύση :

i. Έχουμε : $\log_2 3 + 2\log_2 4 - \log_2 12 = 2 \Leftrightarrow \log_2 3 + \log_2 4^2 - \log_2 12 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\log_2 3 + \log_2 16) - \log_2 12 = 2 \Leftrightarrow \log_2 3 \cdot 16 - \log_2 12 = 2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{48}{12} = 2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{48}{12} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 4 = 2 \Leftrightarrow 2^2 = 4$ που ισχύει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

13. Να αποδείξετε ότι :

i. $2\log 8 + 4\log 5 - 3\log 2 = 4 - \log 2$

ii. $3\log_2 6 - 2\log_2 12 - 3\log_2 16 - \log_2 3 = -13$

iii. $\log 20 + \log 50 = 3$

iv. $\ln(e^4 - e^3) - \ln(e - 1) = 3$

v. $2\log 5 + \frac{1}{2}\log 16 = 2$

vi. $\frac{\ln 25 - \log 9}{\ln \sqrt{5} - \log \sqrt{3}} = 4$

vii. $\frac{1 + 4\log 2 - 3\log 4 + \frac{1}{3}\log 8}{\log 75 - 2\log \sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

viii. $\frac{2 - \log 4}{\frac{1}{2} + \log \sqrt{\frac{5}{2}}} = 2$

ix. $2^{\log_2 6 - 2\log_2 \sqrt{3} + 1} = 4$

x. $e^{\frac{1}{2}\ln 9 - \frac{2}{3}\ln 8 + \ln 12} = 9$

14. Να αποδείξετε ότι : $2\log_2 3 + \log_2 6 - \log_2 27 = 1$

15. Να αποδείξετε ότι: i. $\log 4 + \log 20 - 3\log 2 = 1$ ii. $\frac{1}{2}\ln 4 + \frac{2}{3}\ln 27 - \ln 6 = \ln 3$

16. Να αποδείξετε ότι :

- i. $\frac{\log \sqrt{125} + \log \sqrt{27} - \log \sqrt{8}}{\log \sqrt{15} - \log \sqrt{2}} = 3$
- ii. $\frac{\log_3 \sqrt{27} - \frac{1}{12} \log_2 \frac{1}{64}}{\log_{\sqrt{2}} 8 + 2 \log_{\frac{1}{3}} 9} = 1$
- iii. $\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \frac{1}{2} \log(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) = \log 2$

17. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων :

- i. $4^{2 - \frac{3}{2} \log_2 3}$
- ii. $49^{\frac{1}{2} \log_7 20 - 1}$

18. Για τους αριθμούς α , με $0 < \alpha \neq 1$, και $x, y, \omega > 0$ ισχύουν $\log_\alpha x = 5$, $\log_\alpha y = 4$ και $\log_\alpha \omega = 3$. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

- i. $A = \log_\alpha \frac{\alpha^3 \sqrt{x^4 y^3}}{\omega^4}$
- ii. $B = \ln \frac{x\omega}{y^2}$

19. Να βρείτε την τιμή της παράστασης : $A = \frac{\log^2 20 - \log^2 5}{\log \sqrt{2}}$.

20. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ και $0 < \alpha$ ισχύει : $\log_\alpha x = \log_{\alpha^2} x^2$

21. Να αποδείξετε ότι : $\log_\beta \alpha \cdot \log_\alpha \left(\frac{1}{\beta^2} \right) = -2$

22. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων :

- i. $A = \log_2 6 - \log_4 9$
- ii. $B = \frac{\log 45}{\log 3} - \frac{\ln 5}{\ln 3}$

23. Αν $0 < \alpha, \beta, \gamma$ να αποδείξετε ότι : $\alpha^{\log_\beta \gamma} = \gamma^{\log_\beta \alpha}$

24. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha, \beta \neq 1$, να δείχθει ότι $\frac{\log_\alpha \sqrt{\log_\alpha \beta}}{\sqrt{\log_\alpha \beta}} + \frac{\log_\beta \sqrt{\log_\beta \alpha}}{\sqrt{\log_\beta \alpha}} = 0$.

25. Να αποδείξετε ότι $x^{\log y} = y^{\log x}$, με $x, y > 0$.

26. Δίνεται ο αριθμός : $\alpha = \log \left(\ln \underbrace{\sqrt[10]{\sqrt[10]{\dots \sqrt[10]{e}}}}_{8 \text{ ριζικά}} \right)$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -8$

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{\sqrt[3]{e^{2^{-\ln|a|}}} \cdot x^3 + 2x^2 + \alpha x - 6}{x-1} \leq \log 1000^{x^2+x}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Υπόδειξη : Εκμεταλλευόμαστε τα δεδομένα της άσκησης και τα γνωστά από τη θεωρία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

27. Η συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση ενός ραδιενεργού υλικού είναι

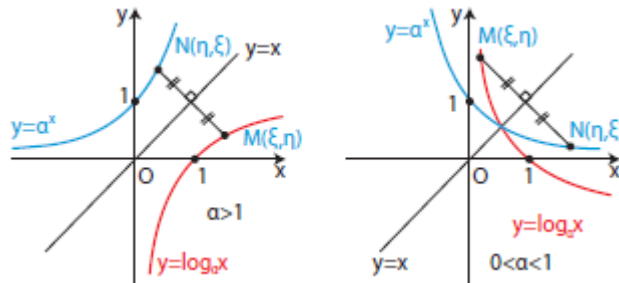
$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{3}}, \text{ όπου } Q(t) \text{ σε γραμμάρια και } t \text{ σε έτη.}$$

- i. Να βρεθεί ο χρόνος ημιζωής του υλικού.
- ii. Να βρεθεί η αρχική ποσότητα, αν σε 6 έτη η ποσότητα του υλικού είναι 500e gr.
- iii. Να βρεθεί τότε το υλικό θα είναι 2.400gr. (δίνεται ότι : $\ln 110,592 = 4,71$)

5.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

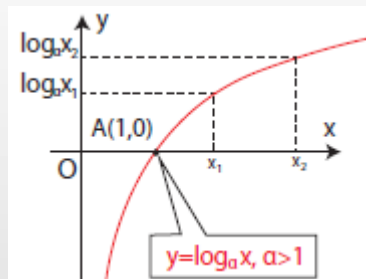
Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \log_a x$ και $y = a^x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.



Με δεδομένη την παραπάνω συμμετρία και όσα γνωρίζουμε για την εκθετική συνάρτηση συμπεραίνουμε ότι :

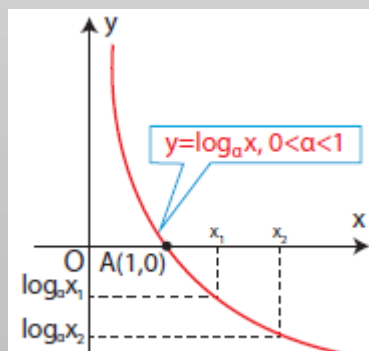
➤ **Η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$ με $a > 1$ έχει τις εξής ιδιότητες :**

- ✓ Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
- ✓ Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$
- ✓ Είναι γνησίως αύξουσα, που σημαίνει ότι αν $x_1 < x_2$ τότε $\log_a x_1 < \log_a x_2$
(από το παραπάνω προκύπτει ότι : $\log_a x < 0$, αν $0 < x < 1$ και $\log_a x > 0$, αν $x > 1$)
- ✓ Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$ και ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy' .



➤ **Η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$ με $0 < a < 1$ έχει τις εξής ιδιότητες :**

- ✓ Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
- ✓ Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$
- ✓ Είναι γνησίως φθίνουσα, που σημαίνει ότι αν $x_1 < x_2$ τότε $\log_a x_1 > \log_a x_2$
(από το παραπάνω προκύπτει ότι : $\log_a x > 0$, αν $0 < x < 1$ και $\log_a x < 0$, αν $x > 1$)
- ✓ Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$ και ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy' .



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.
 - i. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\ln x$ είναι το σύνολο $A=.....$
 - ii. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\log x$ είναι το σύνολο $f(A)=.....$
 - iii. Ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ είναι
 - iv. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\log x$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο
 - v. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\ln x$ έχει ασύμπτωτη
 - vi. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\ln x$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ στο διάστημα του x
 - vii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\log x$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ στο διάστημα του x
2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.
 - i. Η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.
 - ii. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x$ και $g(x)=\ln x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.
 - iii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\log x$ έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα Oy' .
 - iv. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\ln x$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα των x στο διάστημα του $x \in (0, 1)$.
 - v. Αν $x_1, x_2 > 0$ και $\ln x_1 = \ln x_2$, τότε $x_1 = x_2$
 - vi. Αν $x_1, x_2 > 0$, τότε $\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$
3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.
 - i. Αν $0 < x < 1$, τότε $\ln x < 0$
 - ii. Αν $x > 10$, τότε $\log x > \ln e$
 - iii. Αν $0 < x < e$, τότε $\ln x > \log 10$
 - iv. Αν $x > 1$, τότε $\ln x < 0$
 - v. Αν $x > e$, τότε $\ln x < 1$
4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.
 - i. Αν $x > 1$, τότε $\ln x > 0$
 - ii. Αν $0 < x \neq 1$, οι αριθμοί $x-1$ και $\ln x$ είναι ομόσημοι.
 - iii. Για κάθε $x > 1$ είναι $x-1+\ln x > 0$
 - iv. Για κάθε $0 < x \neq 1$ είναι $\frac{\ln x}{x-1} > 0$

5. Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α με τις λύσεις της στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
A. $\ln x = 0$	1. $x = \sqrt{e}$
B. $\ln x = -1$	2. $x = 2$
Γ. $\ln x = 1$	3. $x = e^2$
Δ. $\ln x = 2$	4. $x = 1$
E. $\ln x = \frac{1}{2}$	5. $x = e$
	6. $x = \frac{1}{e}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ – ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ –**ΑΡΤΙΑ – ΠΕΡΙΤΤΗ**

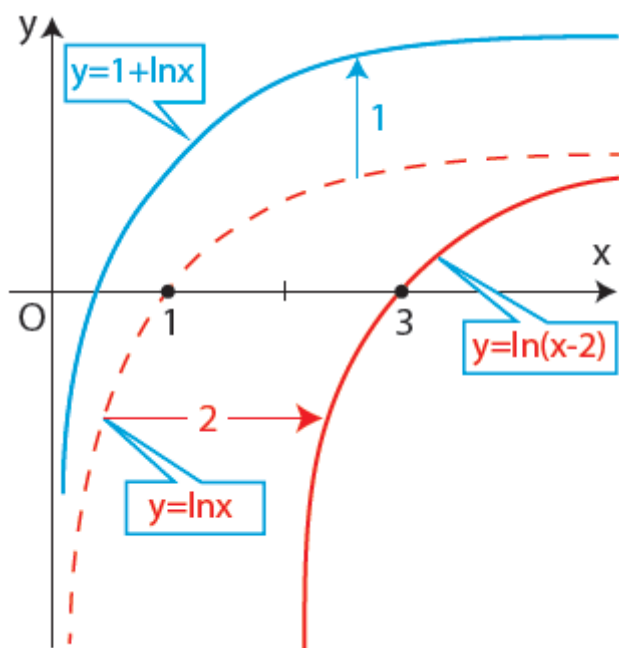
- Για τη μελέτη και τη σχεδίαση της λογαριθμικής συνάρτησης χρησιμοποιούμε τα γνωστά στοιχεία της θεωρίας.
- Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \log_{\alpha} A(x)$ με $0 < \alpha \neq 1$, παίρνουμε τον περιορισμό : $A(x) > 0$
- Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A . Η συνάρτηση f είναι άρτια, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει και $-x \in A$ και επιπλέον $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.
- Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A . Η συνάρτηση f είναι περιττή, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει και $-x \in A$ και επιπλέον $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων : $\phi(x) = \ln x$, $f(x) = \ln x + 1$ και $g(x) = \ln(x - 2)$

Λύση :

Η γραφική παράσταση της $f(x) = \ln x + 1$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\phi(x) = \ln x$ κατά μια μονάδα προς τα πάνω, ενώ της $g(x) = \ln(x - 2)$ από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\phi(x) = \ln x$ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά. Έτσι :



7. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης : $f(x) = \ln(1 - e^x)$

Λύση : Πρέπει : $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$. Άρα $A_f = (-\infty, 0)$.

8. (Άσκηση 2 σελ. 185 Β' Ομάδας)

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές :

i. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ ii. $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

Λύση :

i. Πρέπει : $\sqrt{x^2+1}+x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > -x$ (1)

1^{ος} τρόπος :

- Αν $-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$, τότε :

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}^2 > (-x)^2 \Leftrightarrow x^2+1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0 \text{ που ισχύει.}$$

- Αν $-x < 0 \Leftrightarrow x > 0$, τότε η (1) προφανώς ισχύει.

Οπότε η ανισότητα (1) ισχύει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τελικά $A_f = \mathbb{R}$

2^{ος} τρόπος :

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > -x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}+x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τελικά $A_f = \mathbb{R}$.

Άρα $A_f = \mathbb{R}$ συμμετρικό ως προς το 0, δηλ. για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$. Επίσης :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(\sqrt{(-x)^2+1}-x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) = \ln \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \\ &= \ln \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \ln 1 - \ln(\sqrt{x^2+1}+x) = -\ln(\sqrt{x^2+1}+x) = -f(x) \end{aligned}$$

Άρα η f είναι περιττή.

ii. Πρέπει :

- $1+x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

- $\frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$

*

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $1-x^2 > 0$ τότε $x \in (-1,1)$

Τελικά $A_f = (-1,1)$ συμμετρικό ως προς το 0, δηλ. για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$. Επίσης :

$$f(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-1} = -\ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x). \text{ Άρα η } f \text{ είναι περιττή.}$$

9. Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή η συνάρτηση : $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

Λύση :

Πρέπει :

- $x^2+1 \geq 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- $\sqrt{x^2+1}+x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ καθώς $\sqrt{x^2+1}+x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x} > 0 \Rightarrow (\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x) > 0 \Rightarrow x^2+1-x^2 > 0 \Rightarrow 1 > 0 \text{ που ισχύει για}$$

κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $A_f = \mathbb{R}$ συμμετρικό ως προς το 0, δηλ. για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.

Επίσης :

$$f(-x) = \ln \frac{\sqrt{(-x)^2+1}+x}{\sqrt{(-x)^2+1}-x} = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x} = \ln \left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x} \right)^{-1} = -\ln \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x} = -f(x)$$

Άρα η f είναι περιττή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

10. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

$$\begin{array}{lll} \text{i. } f(x) = \ln(x^2 - 9) & \text{ii. } f(x) = \log(4x + 24) - \ln(35 - 5x) & \text{iii. } f(x) = \ln(5 + 4x - x^2) \\ \text{iv. } f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3) + \ln(5 - |x|) & \text{v. } f(x) = \log(|x+1| - 3) - \ln(17 - |2x+3|) \end{array}$$

11. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

$$\begin{array}{ll} \text{ii. } f(x) = \ln(x^3 - 7x - 6) & \text{ii. } f(x) = \ln \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + x} \\ \text{iii. } f(x) = \ln \left(\left(\frac{1}{9} \right)^{x+2} - \frac{1}{27} \right) & \text{iv. } f(x) = \ln(4^x - 10 \cdot 2^x + 16) \end{array}$$

12. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές :

$$\begin{array}{lll} \text{i. } f(x) = \ln \frac{3-x}{3+x} & \text{ii. } f(x) = x \ln \frac{2-x}{2+x} & \text{iii. } f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x) \end{array}$$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log[(\kappa-1)x^2 - 2(\kappa-3)x + \kappa]$. Να βρείτε το κ , ώστε η συνάρτηση f να έχει πεδίο ορισμού $A_f = \mathbb{R}$.

14. Να παρασταθούν γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων : $\phi(x) = \ln x$, $f(x) = \ln x - 2$ και $g(x) = \ln(x+2)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσουμε μια λογαριθμική εξίσωση, ενεργούμε ως εξής :

1^ο Βήμα : Βάζουμε περιορισμούς (λογαριθμίσιμη ποσότητα > 0)

2^ο Βήμα : Εξετάζουμε αν οι λογάριθμοι έχουν την ίδια βάση. Αν δεν έχουν την ίδια βάση, τους φτιάχνουμε με την ίδια βάση.

3^ο Βήμα : Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες και τον ορισμό του λογάριθμου, προσπαθούμε να φτάσουμε σε εξισώσεις της μορφής :
 $\log_a [f(x)] = \log_a [g(x)] \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

4^ο Βήμα : Ελέγχουμε αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τον αρχικό περιορισμό για την επίλυση της εξίσωσης.

Παρατήρηση 1 : Αν δεν είναι εύκολο να λυθούν οι περιορισμοί, τότε λύνουμε πρώτα την εξίσωση και στη συνέχεια επαληθεύουμε τις λύσεις.

Παρατήρηση 2 : Αν η εξίσωση είναι εκθετική και δεν μπορεί να λυθεί με τις μεθόδους που μελετήσαμε στις εκθετικές εξισώσεις, λογαριθμίζουμε και τα δυο μέλη. Μια βολική λύση είναι να παίρνουμε ως βάση του το γινόμενο των βάσεων των δυνάμεων.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

15. (Άσκηση 5 σελ. 185 Α' ομάδας)

Να λυθούν οι εξισώσεις : i. $\log(x+1) + \log(x-1) = \log 2$

Λύση :

i. Πρέπει : $\begin{cases} x+1 > 0 \\ \text{και} \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \text{και} \\ x > 1 \end{cases}$ άρα τελικά για $x > 1$ με τον περιορισμό αυτό έχουμε :

$$\begin{aligned} \log(x+1) + \log(x-1) &= \log 2 \Leftrightarrow \log[(x+1)(x-1)] = \log 2 \Leftrightarrow \log(x^2 - 1) = \log 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ δεκτή ή } x = -\sqrt{3} \text{ απορ.} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

16. Να λυθούν οι εξισώσεις :

- i. $\log(x-5) = 0$
- ii. $\log(1-x) + \log(x+4) = \log 4$
- iii. $\ln(3e-x) = 1$
- iv. $\ln(x^2-1) - \ln(x-2) = \ln 8$
- v. $\log(x+2) + \log(x-2) = 1 + 5\log 2$
- vi. $\log_3 x^2 = 4$
- vii. $\log x^2 = 5 \cdot (\log x)^2$
- viii. $\log \sqrt{x} = \sqrt[3]{\log x}$

17. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\ln(x+1) + \ln(x-2) = \ln 4$

iii. $\log(x-6) + \log(x-7) = 1 - \log 5$

v. $\log(1+x) = 1 + \log(1-x)$

vii. $\ln \frac{x}{2} = \frac{\ln x}{2}$

ii. $2 \log x - \log(x+6) = \log 3$

iv. $\log(1+x) = \log(1-x)$

vi. $2\log(2x-1) - \log(3x-2x^2) = \log(4x-3) - \log x$

vii. $2 \log x = \log\left(x + \frac{11}{10}\right) + 1$

18. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\log[\log(2x^2 + x - 1)] = 0$

ii. $\frac{1}{2} \log(x+2) + \log \sqrt{x-3} = 1 + \log \sqrt{3}$

iii. $\ln(x^2 - 2e^2) = 1 + \ln(-x)$

iv. $\ln(x-2e) + \ln(x+e) = 2 \ln 2 + 2$

v. $\log(x^2 + 1) + 2 \log(\sqrt{5}x) = 2$

vi. $\ln|x+1| = \ln 2$

vii. $\log(4x-1) = 2 \log 2 + \log(x^2 - 1)$

viii. $\ln x + \ln(1+x) + \ln(x+2) = \ln 24$

19. Να λυθούν οι εξισώσεις : i. $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 = 0$ ii. $2(\log x)^2 + \log x^2 = 4$

20. Να λυθούν οι εξισώσεις : i. $\frac{\log x + 3}{\log x} + \frac{\log x^2 - 3}{\log x - 2} = 5$ ii. $\log^2 x^2 + \log x^4 - 8 = 0$

21. i. Δείξτε ότι $2^{\ln x} = x^{\ln 2}$ ii. Να λυθεί η εξίσωση: $4^{\ln x} - 9x^{\ln 2} + 8 = 0$

22. i. Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log \sqrt{3}}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $3^{2 \log x} - 2 \cdot 3^{\log x} - 100^{\log \sqrt{3}} = 0$.

23. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $x(\log 10 - \log 5) = \log(4^x - 12)$

ii. $x + \log(1 + 2^x) = x \log 5 + \log 6$

iii. $\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$

iv. $\log(2^x + 2 \cdot 3^x) + \log 81 = x \log 3 + \log 178$

24. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $(\log x - 1)(\log^2 x + \log x + 1) = 7$

ii. $x^{\log 16} - 13x^{\log 4} + 36 = 0$

25. i. Να αποδείξετε ότι : $x^{\log 5} = 5^{\log x}$ για κάθε $x > 0$.

ii. Να λυθεί η εξίσωση : $5^{2 \log x} = 5 + 4 \cdot x^{\log 5}$

26. i. Να αποδείξετε ότι : $x^{\log 2} = 2^{\log x}$ για κάθε $x > 0$.

ii. Να λυθεί η εξίσωση : $4^{\log x} = x^{\log 2} + 2$.

27. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $3^{x-2} = 6^{4-x}$

ii. $2^{3+2x} = 5^{x-1}$

iii. $2^{x+4} = 5^{2-x}$

iv. $x^{\log x} = \sqrt{10x}$

28. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\log_4(5 + x^3) = \log_2(x + 3)$

ii. $\log_{x+1}(x^3 - 9x - 8) \cdot \log_{x-1}(x+1) = 3$

29. Να λυθεί η εξίσωση : $2^{x-8} = 5 - \log x$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Για να λύσουμε ένα σύστημα λογαριθμικών εξισώσεων, ενεργούμε ως εξής : θέτουμε τους περιορισμούς και προσπαθούμε να φέρουμε τουλάχιστον μια από τις εξισώσεις στη μορφή $\log_{\alpha}[f(x)] = \log_{\alpha}[g(x)]$, όποτε και θα μπορούμε να τη λύσουμε. Αν υπάρχουν δυο διαφορετικοί λογάριθμοι $\log_{\alpha}[f(x)]$ και $\log_{\beta}[g(x)]$ και στις δυο εξισώσεις, θέτουμε $\kappa = \log_{\alpha}[f(x)]$ και $\lambda = \log_{\beta}[g(x)]$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

30. (Άσκηση 7 σελ. 185 Β' ομάδας) Να λύσετε τα συστήματα :

$$\text{ii. } \begin{cases} xy = 8 \\ \log y = 2 \log x \end{cases}$$

Λύση :

ii. Για να ορίζεται το σύστημα πρέπει : $x, y > 0$, έτσι έχουμε :

$$\begin{cases} xy = 8 \\ \log y = 2 \log x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 8 \\ \log y = \log x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 8 & (1) \\ y = x^2 & (2) \end{cases}$$

Η (1) λόγω της (2) γίνεται : $xy = 8 \Leftrightarrow x \cdot x^2 = 8 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$ δεκτή

Άρα η (2) γίνεται : $y = 2^2 \Leftrightarrow y = 4$ δεκτή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

31. Να λυθούν τα ακόλουθα συστήματα :

$$\text{i. } \begin{cases} xy = 10000 \\ \log x \cdot \log y = 3 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} 3 \ln x - 5 \ln y = 11 \\ \ln x \cdot \ln y = -2 \end{cases} \quad \text{iii. } \begin{cases} \log(20x + 10y) = 2 \\ \log(x + 1) + \log y = 1 \end{cases}$$

32. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ \log x + \log y = \log 6 \end{cases}$$

$$\text{ii. } \begin{cases} 5^x - 2^y = 1 \\ x \log 5 + y \log 2 = \log 20 \end{cases}$$

$$\text{iii. } \begin{cases} 2^{\log x} - 3^{\log y} = 1 \\ 4^{\log x} + 9^{\log y} = 25 \end{cases}$$

$$\text{iv. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$$

$$\text{v. } \begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 3^{x-2} 9^{y-4} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{vi. } \begin{cases} \log^2 x + \log^2 y = 10 \\ \log x - \log y = 2 \end{cases}$$

$$\text{vii. } \begin{cases} \ln(xy) = 4 \\ \ln x \ln y = -12 \end{cases}$$

$$\text{viii. } \begin{cases} x + y = 2 \\ \ln x - \ln y = \ln 3 \end{cases}$$

$$\text{ix. } \begin{cases} x + y = 15 \\ \ln x + \ln y = \ln 36 \end{cases}$$

$$\text{x. } \begin{cases} \ln x + \ln y = 0 \\ e^x e^{x+y} = e^3 \end{cases}$$

$$\text{xi. } \begin{cases} \ln x - \ln 4 = \ln 3 - \ln y \\ e^x = e^{y+1} \end{cases}$$

$$\text{xii. } \begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$$

33. Να λυθούν τα συστήματα:

i.
$$\begin{cases} \log^2 x + \log^2 y = 10 \\ \log x - \log y = 2 \end{cases}$$

ii.
$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x^3 - \log y^4 = 2 \end{cases}$$

34. α) Ναδειχθεί ότι $a^{\log b} = b^{\log a}$.

β) Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} (2x)^{\log y} + y^{\log(2x)} = 8x^2 \\ \frac{y}{4x^2} = y^{\log(2x)} \end{cases}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Για τις ανισώσεις ενεργούμε όπως στις εξισώσεις, με τη διαφορά ότι επιπλέον χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα :

- Αν $0 < a < 1$ τότε ισχύει : $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$
- Αν $a > 1$ τότε ισχύει : $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

35. (Άσκηση 8 σελ. 185 Β' ομάδας) Να λύσετε τις ανισώσεις :

ii. $\log(x^2 - 4) < \log 3x$

Λύση :

ii. Για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει :

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 & (1) \\ \text{και} \\ 3x > 0 \Leftrightarrow x > 0 & (2) \end{cases}$$

Για την ανίσωση (1) έχω $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x^2 - 4$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 4 > 0$ τότε $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Και επειδή από (2) είναι $x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$ άρα τελικά $x \in (2, +\infty)$

Οπότε για $x \in (2, +\infty)$ η ανίσωση γίνεται :

$$\log(x^2 - 4) < \log 3x \Leftrightarrow x^2 - 4 < 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 < 0$$

Είναι : $x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -1$

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
$x^2 - 3x - 4$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 3x - 4 < 0$ τότε $x \in (-1, 4)$. Όμως από περιορισμό $x \in (2, +\infty)$ άρα τελικά $x \in (2, 4)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :**36.** Να συγκριθούν οι ακόλουθοι αριθμοί :

i. $\log_3 4$ και $\log_3 6$

ii. $\log_{0,4} 3$ και $\log_{0,4} 5$

iii. $\ln(2x)$ και $\ln(x^2 + 1)$ $x > 0$

iv. $\log(2xy)$ και $\log(x^2 + y^2)$ με $x, y > 0$

37. Να δείξετε ότι : $\log_2 3 > \log_6 9$ **38.** Να λυθούν οι ανισώσεις :

i. $\ln(2x + 4) < 3 + \ln x$

ii. $\log_{0,2}(x^2 - 2) > \log_{0,2} x$

iii. $\log x^2 > (\log x)^2$

iv. $\log \sqrt{x} > \sqrt{\log x}$

v. $e^{\log x} > 10$

vi. $\ln[\ln(x + 3)] > 1$

39. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i. $\ln(2x - 1)(x + 3) \geq 2 \ln 3$

ii. $\ln(x + e) + \ln(x - e) \leq 2 + \ln 3$

iii. $\log(x + 1) + \log(x + 2) \geq \log 3 + \log\left(\frac{3}{2}x + 1\right)$

40. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i. $\ln(x + 3) + \ln(2 - x) < \ln(5 - x)$

ii. $\log(7 - x) \geq 1 - \log x$

iii. $(\log x)^2 - \log x^2 \geq 3$

iv. $x^{2 - \ln x} \geq \frac{1}{e^{15}}$

v. $\frac{\log x^2}{\log \frac{1}{3}} < 2$

41. Να λυθεί η ανίσωση : $\ln x < \frac{1}{x} - 1$.**42.** Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \log x$.i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.ii. Να λύσετε την ανίσωση : $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+12} < \log \frac{2x^2+3}{x^2+12}$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 5^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - \log(10 - 2x)$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
 - Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$
 - Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
 - Να λύσετε την εξίσωση $8^{\frac{|x|}{3}-1} = f\left(\frac{99}{20}\right)$
44. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \log(\sqrt{x^2 + 100} - x) + \alpha$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$
 - Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
 - Να λύσετε την εξίσωση : $2\sigma\upsilon\nu^3 x + 7\eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x = \left(\frac{1}{100}\right)^{f\left(\frac{15}{2}\right)}$.
45. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y > 0$ ισχύει $x^{\log y} = y^{\log x}$
- Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$
 - Αν ο αριθμός x που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα είναι λύση της εξίσωσης $\log[\log(x^2 + x \log \theta - 110)] = 0$, να βρείτε την τιμή του θ , όπου θ θετικός πραγματικός αριθμός.
46. Οι αριθμοί $\ln(3^\alpha - 1)$, $\ln(3^\alpha + 1)$, $3\ln 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
- Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x + \ln y = \alpha \\ y - e^x + e = \alpha \end{cases}$
47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{16 \cdot 2^x - 8}{4^x + 7 \cdot 2^x}$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq \ln 4 - \ln 3$
48. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 2\ln 2$
 - Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) > 0$

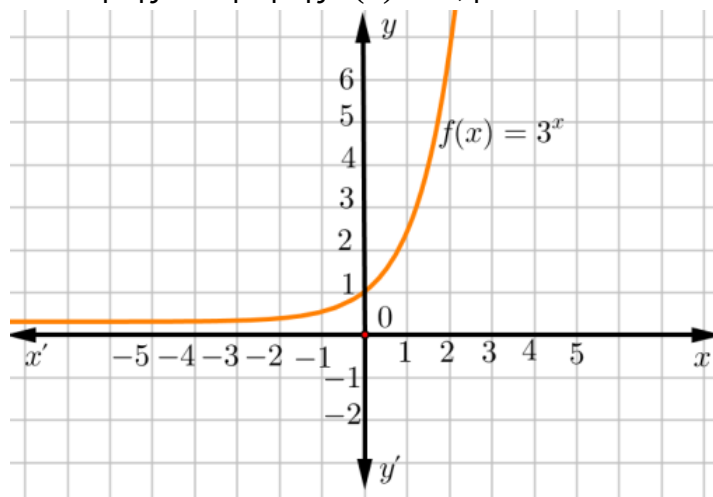
49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{4^x - 2^x}{2^{x+1} + 4}\right)$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2\ln 2$
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$
 - Να δείξετε ότι $f(x) = (x-1)\ln 2 + \ln\left(\frac{2^x - 1}{2^x + 2}\right)$
50. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$.
- Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, g .
 - Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g .
 - Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) > 2g(x)$
51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{2x} - e^2}{e^x - e} - e$
- Να βρείτε πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 - Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$.
 - Να λυθεί η εξίσωση $f(2x) = 2 \cdot f(x) + 3$
52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 - Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = -1$
 - Να βρείτε τα διαστήματα του x στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(2 - e^x) - \ln(e^x + 1)$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού Δ της συνάρτησης.
 - Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα Ox' .
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του Δ , η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $g(x) = \ln 2$.
54. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{17 - 2^{x+1} - 2^{3-x}}$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Να βρείτε τα σημεία της C_f που έχουν τεταγμένη $\sqrt{7}$.
 - Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.
 - Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο.
 - Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο στο 1.
55. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \ln \sqrt{4 \cdot 2^x - 9 \cdot 3^x}$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε οι αριθμοί : $\ln 5, f(2\alpha), \alpha \cdot \ln 6$ με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
 - Για $\alpha = -2$, να λύσετε την ανίσωση : $\log(\log y) + \log(\log y^3 + \alpha) < 0$.

56. Το πολυώνυμο : $P(x) = x^3 - (4^{\lambda-2} + 1)x^2 + 5x + 4^{\lambda-\frac{1}{2}} + 4^{\lambda-1} - 10$ έχει παράγοντα το $x + 2$.
- Να δείξετε ότι $\lambda = 3$.
 - Να λύσετε την εξίσωση : $5 \cdot 6^x - 4^{\frac{x+1}{2}} = \lambda^{2x+1}$.
 - Να λύσετε την εξίσωση : $\lambda^{\eta\mu^2 x} + \lambda^{\sigma\nu^2 x} = 4$.
 - Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} 2^x - \lambda^y = \lambda \\ 2^{2-x} + \lambda^y = 2 \end{cases}$.
57. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση: $f(x) = (10^{\log 2} - 2)x^4 + 2^{\log \theta} x^3 - 4x^2 - x + 2^{2-\log \theta} + 1$ με $\theta > 0$. Να δείξετε ότι:
- Η πολυωνυμική συνάρτηση είναι τρίτου βαθμού.
 - Αν το $x - 1$ είναι παράγοντας της πολυωνυμικής συνάρτησης τότε $\theta = 10$.
 - Για $\theta = 10$, η πολυωνυμική συνάρτηση έχει τη μορφή $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 3$.
 - Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f να μην βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x - 1$.
58. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \ln \frac{9^x - 1}{3^x + 5}$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Να βρείτε το σημείο της C_f που έχει τεταγμένη $2\ln 2$.
 - Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
 - Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f γίνεται : $f(x) = \ln(3^x - 1) + \ln\left(1 - \frac{4}{3^x + 5}\right)$.
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
59. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x + \lambda\right)$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-6, 1 + \log 6)$.
- Να αποδείξετε ότι $\lambda = -4$.
 - Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) < 1$.
 - Να λύσετε την εξίσωση : $2^{\log y} + y^{f(-3)} = 2$
 - Για $\alpha, \beta < -1$ να αποδείξετε ότι : $2f(\alpha + \beta) \geq f(2\alpha) + f(2\beta)$.
60. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \ln(e^{2x} + \alpha) - x$, με $\alpha > 0$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\ln 3, \frac{1 - \log 3}{\log e}\right)$.
- Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.
 - Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = \ln 5 - \ln 2$.
 - Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.
 - Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$.
 - Να λύσετε την ανίσωση : $f\left(\log \frac{1}{99}\right) \cdot \frac{2\log y + 1}{\log y + 1} > f(\log 99)$.

61. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 - Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in A_f$ ισχύει :
 - $\frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \in A_f$
 - $f\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right) = 2f(\alpha)$
 - Θεωρούμε τον αριθμό $\rho = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{e-3}{e+3}\right)$ και το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x^2 + \alpha x + \alpha + 14$ το οποίο έχει παράγοντα το $x - \rho$.
 - Να αποδείξετε ότι ο αριθμός ρ είναι ακέραιος.
 - Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$.
 - Να λύσετε την εξίσωση : $P(x) = 0$.
 - Αν $\lambda = f\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$, να λύσετε την εξίσωση : $8^x - 12 \cdot 4^{x-\lambda} - 3 \cdot 2^{x+\lambda} + 8 = 0$.
62. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + \lambda} - x)$, $\lambda > 0$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.
 - Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
 - Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{\varepsilon\phi x + \sigma\phi x}{2} = \frac{f\left(\sin \frac{\pi}{5}\right)}{f\left(\sin \frac{4\pi}{5}\right)}$.
 - Αν το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη C_f , να αποδείξετε ότι το σημείο $N(\beta, \alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της $g(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2}$.
63. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{6\ln x + \alpha}{\ln^3 x - \ln^4 x}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(e^2, \frac{14}{15}\right)$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Να αποδείξετε ότι $\alpha = -5$.
 - Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 6 - f\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΟ 5^Ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
ΘΕΜΑ 2ο****ΘΕΜΑ 2 – 22630**

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3^x$, με $x \in \mathbb{R}$.



α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = 3^x + 1$ και $h(x) = 3^x - 1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 12)

β) Ποια είναι η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g και ποια της γραφικής παράστασης της h ; (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22633

Δίνεται συνάρτηση $\alpha^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με $\alpha^{38} < \alpha^{24}$, $\alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης f αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση $2^{x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5}$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4 – 22787

Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του να μειώνεται σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t) = q_0 \cdot \alpha^t$, $t \geq 0$ όπου t ο χρόνος (σε ημέρες), η ποσότητα του φαρμάκου (σε mg) και οι αριθμοί α, q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0 < \alpha < 1$. (Μονάδες 6)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f , εκφράζοντας τις τιμές $f(t)$ συναρτήσει της αρχικής τιμής q_0 .

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(t)	q_0	$\frac{q_0}{2}$							

- γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha = \frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4ης ημέρας είναι 25 mg.
- i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής. (Μονάδες 5)
- ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6]$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 – 22790

Σε μια περιοχή της ευρωπαϊκής ένωσης λόγω των μέτρων που πάρθηκαν ο πληθυσμός των αγροτών (σε χιλιάδες) μειώνεται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$. Ο αρχικός πληθυσμός ήταν 8 χιλιάδες αγρότες και μετά από δύο χρόνια έμεινε ο μισός.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που δίνει τον πληθυσμό των αγροτών μετά από t χρόνια

είναι: $Q(t) = 8 \cdot e^{-\frac{t}{2} \ln 2}$. (Μονάδες 10)

β) Ποιος θα είναι ο πληθυσμός των αγροτών ύστερα από τέσσερα χρόνια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

γ) Πόσος χρόνος θα έχει περάσει όταν ο αγροτικός πληθυσμός της περιοχής θα έχει μειωθεί στους χίλιους αγρότες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 – 22791

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 5$ και $\beta = -7$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 4)

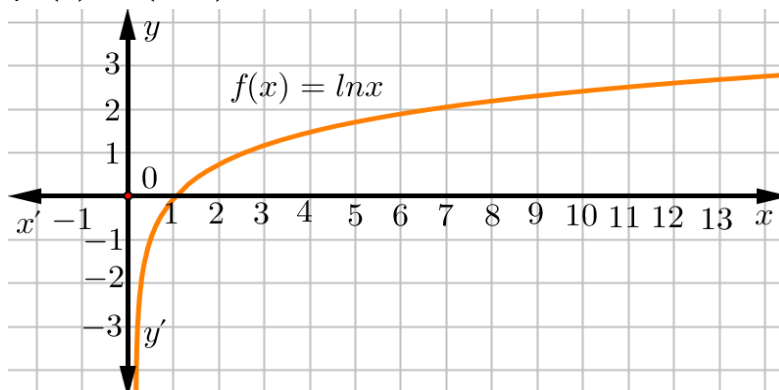
γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(2^x - 31) < 3$. (Μονάδες 7)

**ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ
ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
ΘΕΜΑ 2ο**

ΘΕΜΑ 2 – 22632

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-3)$, $x > 3$.



α) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$. (Μονάδες 8)

β) Σε ποιο σημείο τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Ποια είναι η ασύμπτωτη της C_f ; (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 – 22634

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $A = \ln x + \ln(x+6)$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln x + \ln(x+6) = \frac{1}{2} \cdot \ln 49$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 – 22635

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{2x} - e) - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22636

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2 + 4)$ και $g(x) = \ln x + \ln 4$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22637

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(4 - \sqrt{x+1})$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 – 22638

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 10)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y = \ln x$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4°

ΘΕΜΑ 4 – 22794

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x+1$ και η αριθμητική τιμή του για $x=2$ να είναι ίση με 12. (Μονάδες 7)

β) Για $\alpha = -2$ και $\beta = 3$

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-2$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq -x + 14$.

(Μονάδες 7)

iii. Να λύσετε την ανίσωση $P(\ln x) \leq -\ln x + 14$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 – 22796

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^x - 1)$ και $g(x) = \ln(x^2)$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 4)

β) Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $g(x) < 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 3)$ και $g\left(\frac{2}{e}\right)$ (Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) - f(x) = g(\sqrt{e-1})$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 – 22799

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x-2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log \sqrt{6}}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $4 \cdot 4^{f(x)} - 9 \cdot 2^{f(x)} + 100^{\log \sqrt{6}} - 4 = 0$.

(Μονάδες 13)