Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
«Ο Αρχιμήδης»
Θέματα Μικρών Τάξεων 1999-2009

Επιμέλεια: Αλέξανδρος Συγκελάκης
(Για το www.mathematica.gr)

1999-2000

Θέμα 1ο.

Δίνονται τρία μη συνευθειακά σημεία στο επίπεδο.

Βρείτε ευθεία του επιπέδου από την οποία τα τρία σημεία να απέχουν ίσες αποστάσεις.

Πόσες τέτοιες ευθείες του επιπέδου υπάρχουν;

Θέμα 2ο.

Για τον τριψήφιο αριθμό $\overline{αβγ} = 100α + 10β + γ$, ξέρουμε ότι:

i) το ψηφίο των εκατοντάδων ισούται με το άθροισμα των ψηφίων των δεκάδων και των μονάδων

ii) $β(γ + 1) = 52 - 4α$

Να βρεθεί ο αριθμός.

Θέμα 3ο.

Σε προηγούμενη Μαθηματική Ολυμπιάδα για ένα από τα προβλήματα που τέθηκαν, στο οποίο η μέγιστη βαθμολογία ήταν 5, είχαμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

Ο μέσος όρος των βαθμών των αγοριών ήταν 4, ο μέσος όρος των βαθμών κοριτσιών ήταν 3,25 και ο μέσος όρος των βαθμών του συνόλου των μαθητών ήταν 3,6.

Να βρείτε πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια πήραν μέρος, αν ο αριθμός των μαθητών ήταν μεταξύ 30 και 50.

Θέμα 4ο.

Τέσσερις μαθητές αποφάσισαν να αγοράσουν βιβλία Μαθηματικών, έτσι ώστε:

i) καθένας θα αγοράσει 3 βιβλία διαφορετικά μεταξύ τους,

ii) κάθε δύο από τους τέσσερις μαθητές θα αγοράσουν ένα μόνο ίδιο βιβλίο.

Να βρείτε το μέγιστο και τον ελάχιστο αριθμό διαφορετικών βιβλίων που μπορούν να αγοράσουν συνολικά οι τέσσερις μαθητές.

2000-2001

Θέμα 1ο.

Αν α, β, x, y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε α + β = 1, να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}} \leq \alpha x + \beta y.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Θέμα 2ο.

Οι αριθμοί m, n είναι ακέραιοι.

(α) Να βρεθούν τα ζεύγη (m, n) που επαληθεύουν την εξίσωση

$$m^3 - 4mn^2 = 8n^3 - 2m^2 n.$$

(β) Από τα ζεύγη που θα βρείτε να προσδιορίσετε εκείνα που ικανοποιούν την εξίσωση

$$m + n^2 = 3$$

Θέμα 3ο.

Έχουμε 8 σώματα διαφορετικού βάρους και μια ζυγαριά χωρίς σταθμά, δηλαδή με αυτήν μπορούμε μόνο να συγκρίνουμε τα βάρη δύο σωμάτων.

(α) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ζυγίσεων που πρέπει να κάνουμε για να προσδιορίσουμε το βαρύτερο σώμα;

(β) Πόσες επιπλέον ζυγίσεις θα χρειαστούμε για να προσδιορίσουμε το δεύτερο σε βάρος σώμα;

Θέμα 4ο.

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε το ύψος ΑΔ και τις διχοτόμους ΑΕ, ΒΖ που τέμνονται στο Ι. Από το Ι φέρουμε την ΙΘ κάθετη προς την ΑΓ. Επιπλέον φέρουμε την ευθεία χ΄Αχ κάθετη προς ΑΓ. Αν η προέκταση της ΕΘ τέμνει την χ΄Αχ στο σημείο Κ να αποδείξετε ότι ΑΔ=ΑΚ.

2001-2002

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Προς το εξωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς α κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με $\Gamma\hat{A}\Delta = 90^\circ$.
Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΑ και ΓΒ προεκτεινόμενα τέμνονται στο σημείο Ε.

(ι) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma$.
(ιι) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ συναρτήσει της πλευράς α.
(ιιι) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθ. τμήματος ΒΔ συναρτήσει του α.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στον διαγωνισμό ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ της Ε.Μ.Ε. συμμετέχουν αγόρια και κορίτσια που χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, στους "μικρούς" (με ηλικία που την 1η Ιανουαρίου δε ξεπερνά τα 15 χρόνια) και τους "μεγάλους".

Τα αγόρια που λαμβάνουν μέρος στον φετινό ΑΡΧΙΜΗΔΗ αποτελούν το 55% αυτών που συμμετέχουν. Ο λόγος του πλήθους των "μικρών αγοριών" προς το πλήθος των "μεγάλων αγοριών" ισούται με το λόγο του πλήθους των "μικρών" προς το πλήθος των "μεγάλων".

Να βρεθεί ο λόγος του πλήθους των "μικρών αγοριών" προς το πλήθος των "μικρών κοριτσιών".

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Να προσδιορίσετε τους μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς x, y, z, με $x \le y \le z$ για τους οποίους ισχύει ότι:

$$xy + yz + zx - xyz = 2$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να αποδείξετε ότι:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2002 < \left(\frac{2003}{2}\right)^{2002}$$

2002-2003

1. Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου ν για τις οποίες ο αριθμός
$$A = \nu^3 - \nu^2 + \nu - 1$$
είναι πρώτος.

2. Να προσδιορίσετε τετραψήφιο αριθμό $\overline{xyzw}$, ο οποίος έχει την ιδιότητα: Αν του προσθέσουμε το άθροισμα των ψηφίων του, προκύπτει ο αριθμός 2003.

3 Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Το ύψος του ΑΗ και η μεσοκάθετος ε της πλευράς ΑΒ τέμνονται στο σημείο Μ. Η κάθετη προς την ευθεία ε στο σημείο Μ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ. Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΜΔ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Σ, να αποδείξετε ότι:
(ι) ΒΣ || ΑΜ .
(ιι) το τετράπλευρο ΑΜΒΣ είναι ρόμβος.

4 Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους οι οποίοι μπορούν να παρασταθούν ως κλάσματα της μορφής
$$\frac{\mu\nu+1}{\mu+\nu},$$
όπου μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι.

2003-2004

1. Οι αριθμοί 203 και 298 διαιρούμενοι με το θετικό ακέραιο x δίνουν και οι δύο υπόλοιπο 13. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x ;

2. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε τα μέσα Κ και Λ των πλευρών ΒΓ και ΑΔ, αντίστοιχα. Η κάθετη από το Β προς την ΑΚ τέμνει την ΑΚ στο Ε και την ΓΛ στο Ζ.

   (ι) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΖΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

   (ιι) Να αποδείξετε ότι : $(ABKZ)=\frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$

   (ιιι) Αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς α, να υπολογίσετε το εμβαδόν του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΚΖΛ ως συνάρτηση της πλευράς ΒΓ=α.

3. Αν οι x, y, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

   $$x^2+y^2+z^2=25$$

   να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή της παράστασης

   $$A=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}.$$

4. Να προσδιορίσετε τον ρητό αριθμό $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β θετικοί ακέραιοι, με τον ελάχιστο παρανομαστή, που είναι τέτοιος ώστε

   $$\frac{52}{303}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{16}{91}\quad .$$

<u>2004-2005</u>

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB=\alpha$, $\Gamma\Delta=2\alpha$ και $\Delta B \perp B\Gamma$.

Έστω M το μέσον της $\Gamma\Delta$, O το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου $ABM\Delta$, K το σημείο τομής των ευθειών ΔA, ΓB και Λ το σημείο τομής των ευθειών ΚΟ και ΑΒ. Να αποδείξετε ότι :

(i) το τετράπλευρο $ABM\Delta$ είναι ρόμβος,

(ii) το τρίγωνο $\Gamma\Delta K$ είναι ισοσκελές και

(iii) η ευθεία $\Delta\Lambda$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα KB στο μέσον του.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Αν σε τριψήφιο θετικό ακέραιο A προσθέσουμε το πενταπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων του, προκύπτει ο αριθμός 840.

Να βρεθεί ο αριθμός Α.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(\nu)=\frac{2\nu+1+\sqrt{\nu(\nu+1)}}{\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu}},$$

όπου ο ν είναι θετικός ακέραιος.

(ι) Να αποδείξετε ότι $f(1)=2\sqrt{2}-1$.

(ii) Να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος
$\Sigma = f(1) + f(2) + \ldots + f(100)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4
Δίνεται κύκλος C κέντρου O και ακτίνας R καθώς και σημείο Α εκτός αυτού με $\mathrm{AO} = d$. Να προσδιορίσετε σημεία Β , Γ και Δ πάνω στο κύκλο C έτσι ώστε να σχηματίζεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν.

2005-2006

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1
Έστω P εσωτερικό σημείο ενός ισοπλεύρου τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι κατασκευάζεται τρίγωνο με πλευρές τις PA, PB, PC.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2
Να βρεθούν όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (x,y) που είναι τέτοια ώστε $2x^y - y = 2005$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3
Να αποδειχθεί ότι μεταξύ 27 διακεκριμένων θετικών ακεραίων μικρότερων του 100 υπάρχουν πάντοτε δύο οι οποίοι δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4
Εάν οι πραγματικοί αριθμοί x,y ικανοποιούν την $x^2 + xy + y^2 = 1$, να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της παράστασης $K = x^3y + xy^3$.

2006-2007

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Έστω Ι το σημείο τομής των διχοτόμων του. Η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο C του τριγώνου ΒΙΓ στο σημείο Ν με $\mathrm{N} \neq \mathrm{I}$. Να προσδιορίσετε:

- **(i)** τις γωνίες του τριγώνου ΒΓΝ συναρτήσει των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ,
- **(ii)** το κέντρο του κύκλου C .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2
Αν ο αριθμός $4\nu + 3$, όπου ν ακέραιος, είναι πολλαπλάσιο του 11, να βρείτε:

- **(i)** τη μορφή του ακέραιου αριθμού ν ,
- **(ii)** το υπόλοιπο της διαίρεσης του ν^4 με το 11.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3
Να προσδιορίσετε τις τιμές του ακέραιου αριθμού n που είναι τέτοιες ώστε η διαφορά $\mathrm{A} - \mathrm{B}$, όπου $\mathrm{A} = \sqrt{n^2 + 24}$ και $\mathrm{B} = \sqrt{n^2 - 9}$, είναι ακέραιος αριθμός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4
Καθένας από τους 50 μαθητές μιας τάξης έστειλε τα Χριστούγεννα κάρτες σε 25 ακριβώς συμμαθητές του. Να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τους 50 μαθητές της τάξης πήραν ο ένας την κάρτα του άλλου.

2007-2008

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω p,q διακεκριμένοι πρώτοι αριθμοί και k,l θετικοί ακέραιοι. Να βρεθούν όλοι οι θετικοί διαιρέτες των αριθμών:

α) $A=p^k$,

β) $B=p^k q^l$

γ) $\Gamma=1944$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Εάν οι x,y,z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x^2+y^2+z^2=3$, να αποδείξετε ότι $\frac{3}{2}<\frac{1+y^2}{x+2}+\frac{1+z^2}{y+2}+\frac{1+x^2}{z+2}<3$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Να βρεθεί ο μέγιστος θετικός ακέραιος x για τον οποίο ο αριθμός $A=2^{182}+4^x+8^{700}$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Έστω ABCD ένα τραπέζιο με AD=a, AB=2a, BC=3a και $\angle A=\angle B=90^\circ$. Έστω E και Z τα μέσα των AB, CD αντίστοιχα και I το ίχνος της καθέτου από το σημείο Z πάνω στην BC. Να αποδείξετε ότι

α) το τρίγωνο BDC είναι ισοσκελές

β) το μέσο O της EZ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου BDZ.

γ) οι ευθείες AZ και DI τέμνονται επί της ευθείας BO.

2008-2009

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Αν ο αριθμός

$$K=\frac{9n^2+31}{n^2+7}$$

είναι ακέραιος, να προσδιορίσετε τις τιμές του ακέραιου n.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Από την κορυφή Α ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ημιευθεία Ax που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ. Πάνω στην Ax παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\text{BA} = \text{BE}$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\text{A}\hat{\text{E}}\Gamma$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Θεωρούμε τους αριθμούς

$$\text{A} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{595}{598}\cdot\frac{597}{600} \quad \text{και} \quad \text{B} = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{596}{599}\cdot\frac{598}{601}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $\text{A} < \text{B}$, **(β)** $\text{A} < \dfrac{1}{5990}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Το διπλανό σχεδιάγραμμα παρουσιάζει τους δρόμους που συνδέουν τη πλατεία μιας πόλης (σημείο Π) με το σχολείο (σημείο Σ). Στη πλατεία βρίσκονται k μαθητές και ξεκινούν με προορισμό το σχολείο έχοντας τη δυνατότητα να κινούνται (στο σχεδιάγραμμα) μόνο προς τα δεξιά και προς τα άνω. Αν οι μαθητές είναι ελεύθεροι να επιλέξουν οποιαδήποτε διαδρομή (με σκοπό να φτάσουν στο σχολείο), να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του k έτσι, ώστε οπωσδήποτε δύο τουλάχιστον μαθητές να ακολουθήσουν την ίδια διαδρομή.