

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

ΛΥΣΕΙΣ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Αδύνατο (άρτια – περιττά).
2. **A)** $3 + 9 + 12 + 15 = 39$,
B) $5 + 6 + 12 + 15 = 38$,
Γ) $6 + 6 + 9 + 15 = 36$,
Δ) $10 + 6 + 9 + 12 = 37$.
3. Διαγραφή πρώτης σειράς (1 σφαιρίδιο), του μεσαίου της τρίτης σειράς και των δύο μεσαίων της τέταρτης σειράς.

4. Έστω

$$\Gamma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99}$$

Τότε

$$A = \Gamma/99,$$

$$B = \Gamma/100 + 1/10000$$

και

$$A - B = (\Gamma - 1)/9900 + 1/990000 > 0.$$



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. $\frac{42}{2\nu+1} \in \mathbb{Z}$ με $\nu \in \mathbb{N} \Rightarrow 2\nu+1 \in \Delta_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$.

Επειδή ο $2\nu+1$ είναι περιττός έπεται ότι:

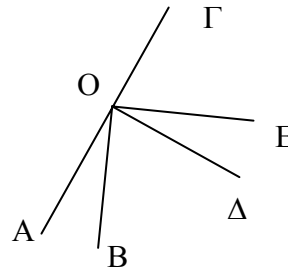
$$2\nu+1=1 \text{ ή } 2\nu+1=3 \text{ ή } 2\nu+1=7 \text{ ή } 2\nu+1=21$$

$$\Leftrightarrow \nu=0 \text{ ή } \nu=1 \text{ ή } \nu=3 \text{ ή } \nu=10.$$

2. Αν θέσουμε $\widehat{AOB} = \omega$, τότε από την υπόθεση του προβλήματος έχουμε:

$$4\omega + 90^\circ + \omega = 180^\circ \Leftrightarrow 5\omega = 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow \omega = 18^\circ$$



3. Από τις υποθέσεις έχουμε

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} + \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta} + \frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} - \frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta} - \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$$

$$\Rightarrow \frac{2\beta}{\gamma+\delta} = \frac{2\beta}{\gamma-\delta} \Rightarrow 2\beta(\gamma-\delta-\gamma-\delta) = 0$$

$$\Rightarrow -2\beta\delta = 0 \Rightarrow \beta\delta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \text{ ή } \delta = 0.$$

4. Έχουμε ότι

$$N = \overline{xyzxyz} = 100000x + 10000y + 1000z + 100x + 10y + z$$

$$= 100100x + 10010y + 1001z$$

$$= 1001 \cdot (100x + 10y + z)$$

$$= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{xyz}.$$

Άρα οι αριθμοί 7, 11 και 13 διαιρούν τον αριθμό N.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2008
ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $8x + 10y = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = 2008 - 4(4x + 5y) - 48x - 60y.$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

$$\begin{aligned} A &= 2008 - 4(4x + 5y) - 48x - 60y \\ &= 2008 - 2 \cdot 2 \cdot (4x + 5y) - 6 \cdot (8x + 10y) \\ &= 2008 - 2 \cdot (8x + 10y) - 6 \cdot (8x + 10y) = 2008 - 2 \cdot 1 - 6 \cdot 1 = 2000. \end{aligned}$$

(2^{ος} τρόπος)

$$\begin{aligned} A &= 2008 - 4(4x + 5y) - 48x - 60y \\ &= 2008 - 16x - 20y - 48x - 60y \\ &= 2008 - 64x - 80y = 2008 - 8(8x + 10y) = 2008 - 8 \cdot 1 = 2000. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Σε μία ατελή διαίρεση ενός τριγώνφιου φυσικού αριθμού a με τον αριθμό 5, το πηλίκο είναι μεγαλύτερο κατά 5 του εξαπλάσιου του υπολοίπου. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του αριθμού a ;

Λύση

Αν π είναι το πηλίκο και ν είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης, τότε σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος έχουμε $\pi = 6\nu + 5$ και

$$a = 5(6\nu + 5) + \nu, \nu \in \{1, 2, 3, 4\} \Leftrightarrow a = 31\nu + 25, \nu \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Η τιμή $\nu = 0$ αποκλείεται γιατί η διαίρεση είναι ατελής.

- Για $\nu = 1$, λαμβάνουμε $a = 31 \cdot 1 + 25 = 56$.
- Για $\nu = 2$, λαμβάνουμε $a = 31 \cdot 2 + 25 = 87$.
- Για $\nu = 3$, λαμβάνουμε $a = 31 \cdot 3 + 25 = 118$
- Για $\nu = 4$, λαμβάνουμε $a = 31 \cdot 4 + 25 = 149$.

Άρα οι δυνατές τιμές του τριγώνφιου αριθμού a είναι : $a = 118$ ή $a = 149$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται το τρίγωνο ABC και η ευθεία ε που περνάει από το C και είναι παράλληλη προς την πλευρά AB . Επιπλέον δίνεται ότι

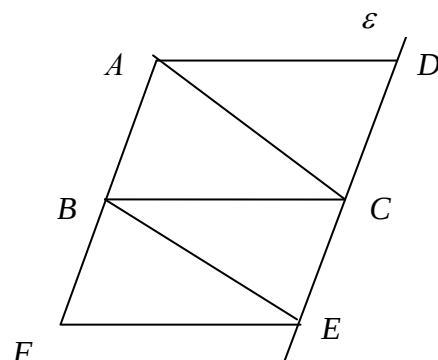
$$CD = CE = AB.$$

Στην προέκταση της AB προς το B παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $BF = AB$.

α) Να βρεθούν τα τρίγωνα που υπάρχουν στο σχήμα και έχουν ίσο εμβαδόν.

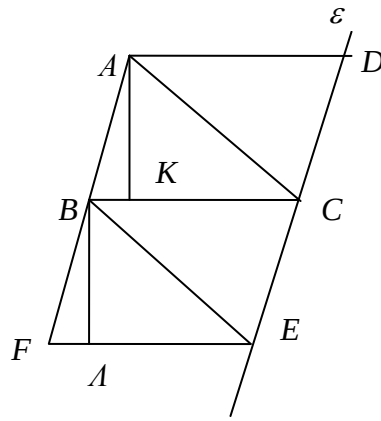
Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

β) Τι μέρος του εμβαδού του σχήματος $AFED$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου



Λύση

α) Τα τετράπλευρα $ABCD$ και $BFEC$ έχουν τις απέναντι πλευρές τους παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμα. Άρα θα έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες, δηλαδή είναι $AD = BC = FE$. Έτσι τα τρίγωνα ABC , BFE , BEC και ACD έχουν ίσες βάσεις.



Τα τρίγωνα ABC και ACD έχουν προς τις ίσες βάσεις τους ύψη ίσα προς το ύψος του παραλληλογράμμου $ABCD$ ως προς τη βάση BC . Ομοίως τα ύψη των τριγώνων BFE , BEC προς τις ίσες βάσεις τους είναι ίσα. Επιπλέον, αν $AK \perp BC$ και $BA \perp FE$, τότε τα τρίγωνα ABK και BFL είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια που έχουν ίσες υποτείνουσες και $\hat{ABK} = \hat{BFL}$ (εντός εναλλάξ στις παράλληλες BC, EF με τέμνουσα τη BF). Άρα θα έχουν και $AK = BL$. Επομένως τα τρίγωνα ABC, BFE, BEC και ACD έχουν ίσα ύψη προς τις ίσες βάσεις τους, οπότε θα έχουν και ίσα εμβαδά.

(β) Επειδή $E_{AFED} = E_{ABC} + E_{ACD} + E_{BFE} + E_{BEC} = 4E_{ABC}$ έπεται ότι

$$\frac{E_{ABC}}{E_{AFED}} = \frac{E_{ABC}}{4E_{ABC}} = \frac{1}{4}.$$

Πρόβλημα 4

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος θετικός ακέραιος της μορφής $A = ababab$, όπου a, b ψηφία, διαιρείται με το 3.

(β) Να προσδιορίσετε τους εξαψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής $A = ababab$, όπου a, b ψηφία, οι οποίοι διαιρούνται με το 5 και το 9.

Λύση

(α) Το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού A είναι ο αριθμός

$$\Sigma(A) = a + b + a + b + a + b = 3 \cdot a + 3 \cdot b = 3 \cdot (a + b),$$

που είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε ο αριθμός A διαιρείται με το 3.

(β) Για να διαιρείται ο αριθμός A με το 5, πρέπει και αρκεί το τελευταίο ψηφίο του b να είναι 0 ή 5. Έτσι διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $b = 0$, τότε $\Sigma(A) = 3 \cdot (a + 0) = 3 \cdot a$. Επομένως ο αριθμός A διαιρείται με το 9, όταν ο $3 \cdot a$ είναι πολλαπλάσιο του 9. Επειδή ο a είναι ψηφίο μεγαλύτερο του 0, αυτό συμβαίνει όταν $a \in \{3, 6, 9\}$, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί $A = 303030$ ή $A = 606060$ ή 909090 .
- Αν $b = 5$, τότε το άθροισμα των ψηφίων του A είναι $\Sigma(A) = 3 \cdot (a + 5)$ και είναι πολλαπλάσιο του 9, όταν $a + 5 \in \{3, 6, 9, 12\}$, οπότε αφού $1 \leq a \leq 9$ έπεται ότι $a \in \{1, 4, 7\}$. Έτσι προκύπτουν οι αριθμοί $A = 151515$ ή $A = 454545$ ή $A = 757575$.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1.

Αν ισχύει ότι $4x - 5y = 10$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (4x + 5y) - 36x + 35y + (8 : 4 - 2)^2.$$

Λύση

Η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned} A &= (4x + 5y) - 36x + 35y + (8 : 4 - 2)^2 \\ &= 4x + 5y - 36x + 35y + (2 - 2)^2 \\ &= -32x + 40y + 0^2 = -8(4x - 5y) + 0 = -8 \cdot 10 = -80. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές $AB = 3x - 2$, $BΓ = x + 12$ και $ΓΑ = 2x + 8$, $x \geq 2$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Υπάρχει τιμή του x για την οποία το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο;

Λύση

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, αν ισχύει:

$$\begin{aligned} AB &= BΓ \text{ ή } AB = ΑΓ \text{ ή } ΑΓ = BΓ \\ \Leftrightarrow 3x - 2 &= x + 12 \text{ ή } 3x - 2 = 2x + 8 \text{ ή } 2x + 8 = x + 12 \\ \Leftrightarrow 2x &= 14 \text{ ή } x = 10 \text{ ή } x = 4 \Leftrightarrow x = 7 \text{ ή } x = 10 \text{ ή } x = 4. \end{aligned}$$

Από τη λύση των παραπάνω εξισώσεων διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει τιμή του x που να επαληθεύει την ισότητα $AB = BΓ = ΑΓ$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ δεν μπορεί να είναι ισόπλευρο.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $AB = ΓΔ$ και $ΑΔ = BΓ$ μήκους α και β , αντίστοιχα. Αν αυξήσουμε το μήκος α κατά 20% και το μήκος β κατά 30%, να βρεθεί πόσο επί τοις εκατό θα αυξηθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Λύση

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $E = \alpha\beta$. Μετά την αύξηση του μήκους των πλευρών του τα μήκη των πλευρών του νέου ορθογωνίου είναι:

$$\alpha' = \alpha + \frac{20\alpha}{100} = \alpha + \frac{2\alpha}{10} = \frac{12\alpha}{10} \text{ και } \beta' = \beta + \frac{30\beta}{100} = \beta + \frac{3\beta}{10} = \frac{13\beta}{10}.$$

Έτσι το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου θα είναι:

$$\begin{aligned} E' &= \frac{12\alpha}{10} \cdot \frac{13\beta}{10} = \frac{156\alpha\beta}{100} = \alpha\beta + \frac{56\alpha\beta}{100} = E + \frac{56\alpha\beta}{100} \\ \Rightarrow E' - E &= \frac{56E}{100} \Rightarrow \frac{E' - E}{E} = \frac{56}{100}. \end{aligned}$$

Άρα η αύξηση της τιμής του εμβαδού είναι 56% πάνω στην αρχική τιμή του.

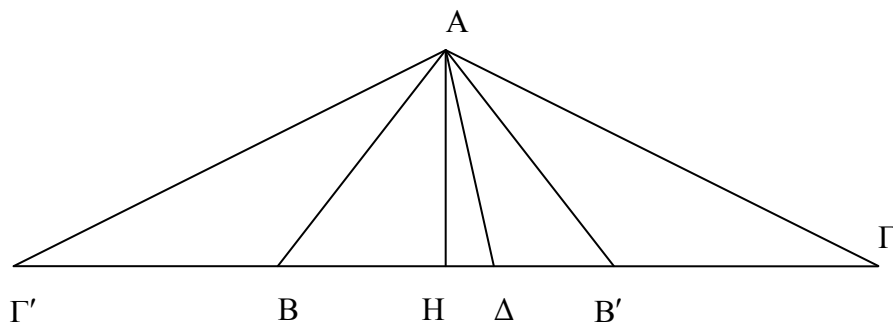
Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A\Gamma > AB$) με τη γωνία $\hat{A}$ διπλάσια της γωνίας $\hat{B}$ και τη γωνία $\hat{B}$ μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{\Gamma}$ κατά είκοσι μοίρες. Δίνονται ακόμα το ύψος του AH και η διχοτόμος του $A\Delta$.

(α) Αν A', B', Γ' είναι τα συμμετρικά των κορυφών A, B, Γ του τριγώνου $AB\Gamma$, ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία του ύψους AH , να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABB' και $A\Gamma\Gamma'$ είναι ισοσκελή και να βρείτε τις γωνίες τους.

(β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζεται από το ύψος AH και τη διχοτόμο $A\Delta$.

Λύση



(α) Από την υπόθεση έχουμε $\hat{A} = 2\hat{B}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{B} - 20^\circ$, οπότε από τη γνωστή ισότητα $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ λαμβάνουμε $2\hat{B} + \hat{B} + \hat{B} - 20^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 4\hat{B} = 200^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 50^\circ$.

Άρα έχουμε και $\hat{A} = 100^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Λόγω συμμετρίας ως προς τον άξονα AH , τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB'\Gamma'$ είναι ίσα ($A' \equiv A$, αφού το σημείο A ανήκει στον άξονα συμμετρίας), οπότε θα έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, δηλαδή $AB = AB'$ και $A\Gamma = A\Gamma'$. Άρα τα τρίγωνα ABB' και $A\Gamma\Gamma'$ είναι ισοσκελή.

Επιπλέον έχουμε

$$\hat{B}' = \hat{B} = 50^\circ, \quad \hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma} = 30^\circ,$$

$$\hat{B}\hat{A}\hat{B}' = 180^\circ - 2 \cdot 50^\circ = 80^\circ \text{ και } \hat{\Gamma}'\hat{A}\hat{\Gamma} = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ.$$

(β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο $AH\Delta$ έχουμε την ισότητα:

$$\hat{H}\hat{A}\hat{\Delta} = 90^\circ - \hat{A}\hat{\Delta}\hat{H} \quad (1)$$

Όμως από το τρίγωνο $AB\Delta$ λαμβάνουμε την ισότητα:

$$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{H} = \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{\Delta}\hat{A}\hat{B} = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\hat{H}\hat{A}\hat{\Delta} = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ.$$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008.$$

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$B = \frac{3}{8} \cdot \left(2^2 - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) \quad \text{και} \quad \Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9} \right)$$

Λύση

(α) Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} A &= 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008 = 2010 + 2008 \cdot (2010 - 2009) \\ &= 2010 + 2008 \cdot 1 = 2010 + 2008 = 4018. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{8} \cdot \left(2^2 - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left(4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left(4 - \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{48 - 9 - 8}{12} \right) = \frac{3 \cdot 31}{8 \cdot 12} = \frac{31}{32} \\ \Gamma &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9} \right) = \frac{9}{22} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{20}{9} \right) = \frac{9}{22} \cdot \frac{21}{9} = \frac{21}{22}. \end{aligned}$$

Επειδή ισχύει ότι:

$$B - \Gamma = \frac{31}{32} - \frac{21}{22} = \frac{31 \cdot 22 - 32 \cdot 21}{32 \cdot 22} = \frac{682 - 672}{32 \cdot 22} = \frac{10}{32 \cdot 22} > 0,$$

έπεται ότι είναι $B > \Gamma$.

Πρόβλημα 2

Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $x = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, $\alpha \neq 0$, έχει άθροισμα ψηφίων 10. Αν εναλλάξουμε το ψηφίο των εκατοντάδων με το ψηφίο των μονάδων του, τότε προκύπτει ακέραιος μικρότερος από τον x κατά 297. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x ;

Λύση

Ο ακέραιος που προκύπτει μετά την εναλλαγή των ψηφίων των εκατοντάδων και μονάδων είναι ο $y = 100\gamma + 10\beta + \alpha$ και, σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} x - y &= 297 \Leftrightarrow (100\alpha + 10\beta + \gamma) - (100\gamma + 10\beta + \alpha) = 297 \\ &\Leftrightarrow 99(\alpha - \gamma) = 297 \Leftrightarrow \alpha - \gamma = 3. \end{aligned}$$

Άρα οι δυνατές τιμές για τα ψηφία α και γ είναι:

$$\alpha = 3, \gamma = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha = 4, \gamma = 1 \quad \text{ή} \quad \alpha = 5, \gamma = 2 \quad \text{ή} \quad \alpha = 6, \gamma = 3 \quad \text{ή} \quad \alpha = 7, \gamma = 4 \quad \text{ή} \quad \alpha = 8, \gamma = 5 \quad \text{ή} \quad \alpha = 9, \gamma = 6.$$

Επειδή από την υπόθεση δίνεται ότι $\alpha + \beta + \gamma = 10$, οι ζητούμενοι ακέραιοι $x = \overline{\alpha\beta\gamma}$ είναι οι:

$$370, 451, 532, 613.$$

Πρόβλημα 3

Ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει πλάτος $AB = x$ μέτρα και μήκος $ΒΓ = y$ μέτρα, το οποίο είναι διπλάσιο του πλάτους του. Αν αυξήσουμε το πλάτος του κατά 25%, να βρείτε πόσο επί τα εκατό πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του, ώστε το εμβαδόν του να μείνει αμετάβλητο.

Λύση

Μετά την αύξηση κατά 25% το πλάτος του ορθογωνίου γίνεται $x_1 = x + \frac{25x}{100} = \frac{125x}{100} = \frac{5x}{4}$.

Έστω ότι πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του ορθογωνίου κατά $\alpha\%$, έτσι ώστε να μείνει το εμβαδό του αμετάβλητο. Τότε το μήκος του θα γίνει:

$$y_1 = y - \frac{\alpha y}{100} = \frac{(100 - \alpha)y}{100} = \frac{(100 - \alpha) \cdot 2x}{100},$$

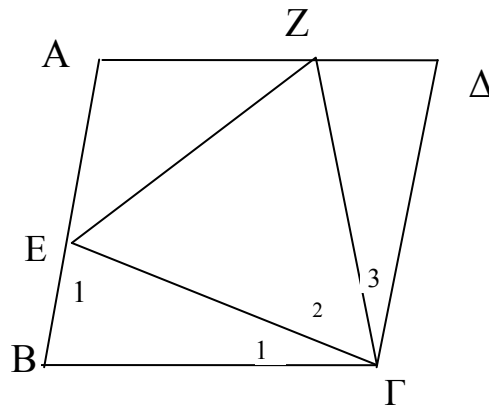
ενώ θα ισχύει η ισότητα

$$\begin{aligned} xy = x_1 y_1 &\Leftrightarrow x \cdot 2x = \frac{5x}{4} \cdot \frac{(100 - \alpha) \cdot 2x}{100} \Leftrightarrow 2x^2 = \frac{100 - \alpha}{80} \cdot 2x^2 \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{100 - \alpha}{80}\right) \cdot 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{100 - \alpha}{80} = 0 \quad (\text{αφού } x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow 80 - 100 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 20. \end{aligned}$$

Άρα πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του ορθογωνίου κατά 20%.

Πρόβλημα 4.

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ABΓΔ είναι ρόμβος πλευράς α και το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ισόπλευρο πλευράς α . Τα σημεία Ε και Ζ βρίσκονται πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΔ, αντίστοιχα. Να βρείτε τις γωνίες του ρόμβου ΑΒΓΔ.



Σχήμα 1

Λύση

Επειδή είναι $BΓ = ΓΕ = \alpha$, το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές και έχει:

$$\hat{B} = \hat{E}_1 \quad (1)$$

Επειδή είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ και η ΕΓ είναι τέμνουσα των ΑΒ και ΓΔ έχουμε ότι:

$$\hat{E}_1 = E\hat{G}\Delta = \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3 = 60^\circ + \hat{\Gamma}_3, \quad (2)$$

αφού κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60° .

Επίσης από τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΓΕ και ΓΖΔ με ίσες πλευρές $BΓ = ΓΖ = \alpha$, $ΓΕ = ΓΔ = \alpha$, προκύπτει ότι:

$$\hat{\Gamma}_1 = 180^\circ - 2\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_3, \quad (3)$$

αφού οι απέναντι γωνίες ρόμβου είναι ίσες,

Από την παραλληλία των πλευρών ΑΒ και ΓΔ έχουμε

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{E}_1 + \hat{\Gamma}_1 + E\hat{G}\Delta = 180^\circ \quad (\text{λόγω της (1)})$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 + 2 \cdot (60^\circ + \hat{\Gamma}_1) = 180^\circ \quad (\text{λόγω της (2)})$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \hat{\Gamma}_1 + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 20^\circ.$$

Άρα είναι:

$$\hat{B} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ, \quad \hat{\Delta} = \hat{B} = 80^\circ \quad \text{και} \quad \hat{A} = \hat{\Gamma} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$

Πρόβλημα 1

(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A = \frac{1}{8^2} \cdot \left(2^3 + 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) \text{ και } B = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27} \right) : \left(\frac{10}{3^3} - \frac{2}{9} \right) \cdot \frac{3^2}{2}.$$

(β) Αν ισχύει ότι:

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{4}{\beta} + \frac{\gamma}{6} = \frac{1}{6},$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Gamma = \frac{8-\alpha}{4\alpha} + \frac{12-2\beta}{3\beta} + \frac{2\gamma-3}{12}.$$

Λύση

(α) Έχουμε

$$A = \frac{1}{8^2} \cdot \left(2^3 + 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{64} \cdot \left(8 + 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{64} \cdot \left(9 + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{64} \cdot 9 = \frac{9}{64},$$

$$B = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27} \right) : \left(\frac{10}{3^3} - \frac{2}{9} \right) \cdot \frac{3^2}{2} = \left(\frac{9}{27} - \frac{1}{27} \right) : \left(\frac{10}{27} - \frac{6}{27} \right) \cdot \frac{9}{128} = \frac{8}{27} : \frac{4}{27} \cdot \frac{9}{128} = \frac{8}{27} \cdot \frac{27}{4} \cdot \frac{9}{128} = \frac{9}{64}.$$

Άρα είναι $A = B$.

Σημείωση. Λόγω της μη ύπαρξης παρενθέσεων που να δίνουν προτεραιότητα στις πράξεις διαίρεσης και πολλαπλασιασμού θεωρούμε δεκτή και τη λύση της μορφής

$$B = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27} \right) : \left(\frac{10}{3^3} - \frac{2}{9} \right) \cdot \frac{3^2}{2} = \left(\frac{9}{27} - \frac{1}{27} \right) : \left(\frac{10}{27} - \frac{6}{27} \right) \cdot \frac{9}{128} = \frac{8}{27} : \frac{4}{27} \cdot \frac{9}{128} = \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{96} = \frac{768}{27}.$$

Στην περίπτωση αυτή είναι $A < 1 < B$, δηλαδή $A < B$.

(β) Λόγω της υπόθεσης $\frac{2}{\alpha} + \frac{4}{\beta} + \frac{\gamma}{6} = \frac{1}{6}$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{8-\alpha}{4\alpha} + \frac{12-2\beta}{3\beta} + \frac{2\gamma-3}{12} = \frac{8}{4\alpha} - \frac{\alpha}{4\alpha} + \frac{12}{3\beta} - \frac{2\beta}{3\beta} + \frac{2\gamma}{12} - \frac{3}{12} \\ &= \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{4} + \frac{4}{\beta} - \frac{2}{3} + \frac{\gamma}{6} - \frac{1}{4} = \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{4}{\beta} + \frac{\gamma}{6} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{6} - \frac{7}{6} = -1. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος αυτοκινήτων είχε στο κατάστημά του την αρχή της περυσινής χρονιάς 20 αυτοκίνητα τύπου Α και 60 αυτοκίνητα τύπου Β. Η τιμή πώλησης για κάθε αυτοκίνητο τύπου Α είναι 10000 ευρώ, ενώ για κάθε αυτοκίνητο τύπου Β είναι 12000 ευρώ.

Στο τέλος της χρονιάς είχε πουλήσει το 30% των αυτοκινήτων τύπου Α και το 60% του συνόλου των αυτοκινήτων τύπου Α και Β.

Να βρείτε ποιο θα είναι το κέρδος του από την πώληση των αυτοκινήτων, αν γνωρίζετε ότι από καθένα αυτοκίνητο τύπου Α κερδίζει το 5% της τιμής πώλησής του, ενώ από καθένα αυτοκίνητο τύπου Β κερδίζει το 10% της τιμής πώλησής του.

Λύση

Το 30% των αυτοκινήτων τύπου Α είναι $20 \cdot \frac{30}{100} = 6$ αυτοκίνητα, ενώ το 60% του συνόλου

των αυτοκινήτων τύπου Α και Β είναι $(20+60) \cdot \frac{60}{100} = 80 \cdot \frac{60}{100} = 48$ αυτοκίνητα. Επομένως από

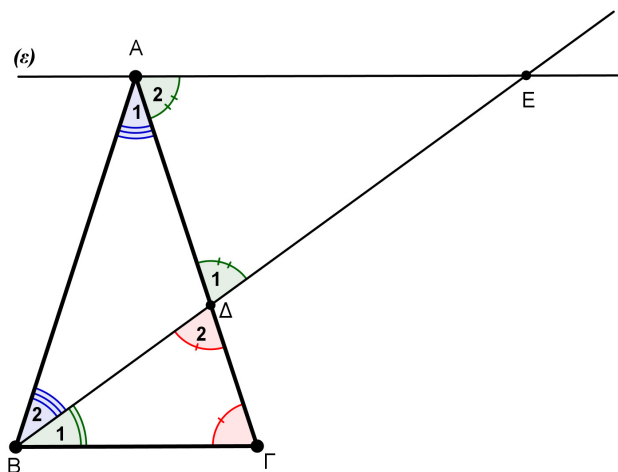
τα αυτοκίνητα τύπου Β πουλήθηκαν $48 - 6 = 42$ αυτοκίνητα.

Από την πώληση καθενός αυτοκινήτου τύπου Α κερδίζει $10000 \cdot \frac{5}{100} = 500$ ευρώ, ενώ από την πώληση καθενός αυτοκινήτου τύπου Β κερδίζει $12000 \cdot \frac{10}{100} = 1200$ ευρώ. Επομένως από την πώληση των αυτοκινήτων ο έμπορος κέρδισε $6 \cdot 500 + 42 \cdot 1200 = 3000 + 50400 = 53400$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 36^\circ$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ και την ευθεία ε στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$, $B\Gamma\Delta$, $A\Delta E$ και ABE είναι ισοσκελή.

Λύση



Σχήμα 1

Το άθροισμα των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 180° . Επειδή όμως ισχύει $\hat{A} = 36^\circ$, θα έχουμε: $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 72^\circ$.

Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, οπότε $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$.

Επειδή τώρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_2 = 36^\circ$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ ισχύει $\hat{B}_1 = 36^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 72^\circ$. Άρα $\hat{\Delta}_2 = 72^\circ$.

Από την ισότητα των γωνιών $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2 = 72^\circ$, προκύπτει ότι το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

Οι γωνίες $\hat{A}_2$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες διότι είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$.

Από την ισότητα τέλος των γωνιών $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 72^\circ$ (ως κατά κορυφή), προκύπτει η ισότητα $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_2 = 72^\circ$. Επομένως το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

Οι γωνίες $\hat{B}_1$ και $\hat{E}$ είναι ίσες διότι είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την BE . Επίσης $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2} = 36^\circ$, οπότε θα είναι και $\hat{B}_2 = \hat{E}$. Επομένως και το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

- (i) $A - B = 27$, όπου $B = \overline{\alpha\gamma\beta} = 100\alpha + 10\gamma + \beta$.
- (ii) Το άθροισμα των ψηφίων β, γ ισούται με το μικρότερο ακέραιο που είναι λύση της ανίσωσης: $3x + 12 < 5x - 1$.
- (iii) Ο αριθμός A διαιρείται με το 3.

Λύση

Σύμφωνα με την πρόταση (i) έχουμε:

$$A - B = 27 \Leftrightarrow 9\beta - 9\gamma = 27 \Leftrightarrow 9 \cdot (\beta - \gamma) = 27 \Leftrightarrow \beta - \gamma = 3. \quad (1)$$

Για την ανίσωση του ερωτήματος (ii) έχουμε:

$$3x + 12 < 5x - 1 \Leftrightarrow 3x - 5x < -12 - 1 \Leftrightarrow -2x < -13 \Leftrightarrow 2x > 13 \Leftrightarrow x > \frac{13}{2}.$$

Άρα, ο μικρότερος ακέραιος που είναι λύση της είναι ο 7, οπότε έχουμε:

$$\beta + \gamma = 7. \quad (2)$$

Με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε

$$2\beta = 10, 2\gamma = 4 \Leftrightarrow \beta = 5, \gamma = 2.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να σκεφθούμε ως εξής: Επειδή οι ακέραιοι β, γ είναι ψηφία με διαφορά $\beta - \gamma = 3$ θα είναι $\beta > \gamma$ και επειδή επιπλέον έχουν άθροισμα 7, οι δυνατές τιμές τους είναι

$$\beta = 7, \gamma = 0 \text{ ή } \beta = 6, \gamma = 1 \text{ ή } \beta = 5, \gamma = 2 \text{ ή } \beta = 4, \gamma = 3.$$

Επειδή πρέπει $\beta - \gamma = 3$ οι αποδεκτές τιμές είναι $\beta = 5, \gamma = 2$.

Άρα ο θετικός ακέραιος A θα έχει τη μορφή $A = \overline{\alpha 5 2}$ με άθροισμα ψηφίων $\alpha + 7$. Επειδή, σύμφωνα με την πρόταση (iii) ο A διαιρείται με το 3, πρέπει και αρκεί ο ακέραιος $\alpha + 7$ να είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε, αφού το α είναι ψηφίο, οι κατάλληλες τιμές του είναι: $\alpha = 2$ ή $\alpha = 5$ ή $\alpha = 8$.

Επομένως, έχουμε $A = 252$ ή $A = 552$ ή $A = 852$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A = \frac{2^3}{31} \cdot \left(2^3 + 2^0 + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right) \text{ και } B = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) : \left(\frac{8}{3^4} - \frac{2}{9^2} \right) + \frac{3}{2^4}.$$

(β) Αν ισχύει ότι:

$$6(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 11\alpha\beta\gamma \text{ και } \alpha\beta\gamma \neq 0,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Gamma = \frac{8-\alpha}{2\alpha} + \frac{12-\beta}{3\beta} + \frac{16-\gamma}{4\gamma}.$$

Λύση

(α) Έχουμε

$$A = \frac{2^3}{31} \cdot \left(2^3 + 2^0 + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{8}{31} \cdot \left(8 + 1 + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{8}{31} \cdot \left(9 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{8}{31} \cdot 9 = \frac{72}{31},$$

$$B = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) : \left(\frac{8}{3^4} - \frac{2}{9^2} \right) + \frac{3}{2^4} = \left(\frac{3}{12} - \frac{1}{12} \right) : \left(\frac{8}{81} - \frac{2}{81} \right) + \frac{3}{16} = \frac{1}{6} \cdot \frac{81}{6} + \frac{3}{16} = \frac{9}{4} + \frac{3}{16} = \frac{39}{16}.$$

$$\text{Επειδή είναι } A - B = \frac{72}{31} - \frac{39}{16} = \frac{72 \cdot 16 - 39 \cdot 31}{31 \cdot 16} = \frac{1152 - 1209}{496} < 0, \text{ έπεται ότι } A < B.$$

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{8-\alpha}{2\alpha} + \frac{12-\beta}{3\beta} + \frac{16-\gamma}{4\gamma} = \frac{8}{2\alpha} - \frac{\alpha}{2\alpha} + \frac{12}{3\beta} - \frac{\beta}{3\beta} + \frac{16}{4\gamma} - \frac{\gamma}{4\gamma} \\ &= 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) - \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

Από την υπόθεση $6(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 11\alpha\beta\gamma$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$ με διαίρεση και των δύο μελών της ισότητας με $6\alpha\beta\gamma \neq 0$ προκύπτει ότι:

$$\frac{6(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)}{6\alpha\beta\gamma} = \frac{11\alpha\beta\gamma}{6\alpha\beta\gamma} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{11}{6},$$

οπότε η παράσταση Γ έχει τιμή

$$\Gamma = 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) - \frac{13}{12} = 4 \cdot \frac{11}{6} - \frac{13}{12} = \frac{44}{6} - \frac{13}{12} = \frac{75}{12} = \frac{25}{4}.$$

Πρόβλημα 2

Ένας πελάτης αγόρασε από μία έκθεση αυτοκινήτων ένα αυτοκίνητο για το οποίο πλήρωσε με μετρητά το μισό της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου, ενώ για τα υπόλοιπα συμφωνήθηκε να πληρώσει με 24 μηνιαίες δόσεις των 500 ευρώ. Με αυτόν το διακανονισμό επιβαρύνθηκε με τόκους που συνολικά αντιστοιχούν στο 10% της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου. Να βρείτε την τιμή πώλησης του αυτοκινήτου και πόσα συνολικά θα πληρώσει συνολικά ο πελάτης.

Λύση.

Αν υποθέσουμε ότι η τιμή πώλησης του αυτοκινήτου είναι x , τότε, σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση:

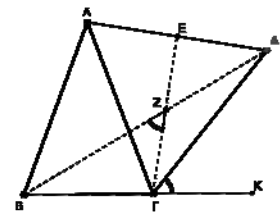
$$\frac{x}{2} + 24 \cdot 500 = x + \frac{10x}{100} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 12000 = x + \frac{x}{10} \Leftrightarrow 5x + 120000 = 10x + x$$

$$\Leftrightarrow 6x = 120000 \Leftrightarrow x = \frac{120000}{6} = 20000.$$

Άρα η τιμή πώλησης του αυτοκινήτου είναι $x = 20000$ ευρώ και ο πελάτης θα πληρώσει συνολικά $x + \frac{10x}{100} = \frac{11x}{10} = \frac{11 \cdot 20000}{10} = 22000$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

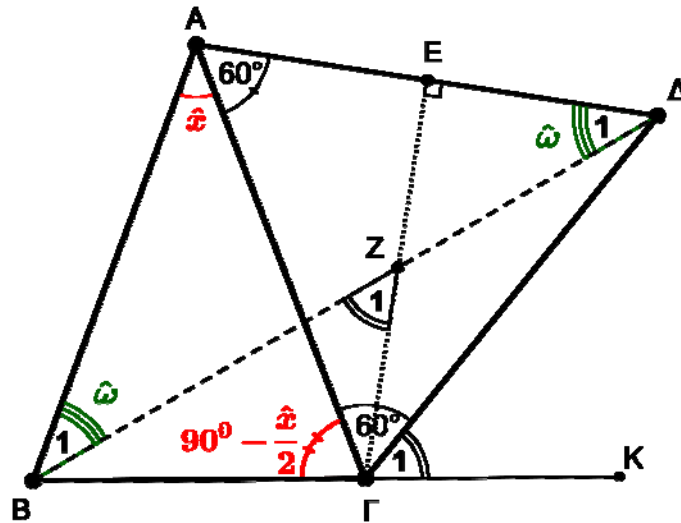
Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$), το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο και E είναι το μέσο του $A\Delta$. Αν το K βρίσκεται στη προέκταση της $B\Gamma$ και οι $BA, \Gamma E$ τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι οι γωνίες $B\hat{Z}\Gamma$ και $K\hat{\Gamma}\Delta$, είναι ίσες.



Λύση

Έστω $B\hat{A}\Gamma = \hat{x}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{x} + 2\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ - \frac{\hat{x}}{2}. \quad (1)$$



Από το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$, έχουμε: $A\hat{\Gamma}\Delta = 60^\circ$. Οι γωνίες τώρα $\hat{\Gamma}$, $A\hat{\Gamma}\Delta$ και $\hat{\Gamma}_1$ είναι διαδοχικές με την πρώτη και την τελευταία πλευρά τους αντικείμενες ημιευθείες, έχουμε ότι $\hat{\Gamma} + A\hat{\Gamma}\Delta + \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ$, οπότε

$$\hat{\Gamma}_1 = 180^\circ - 60^\circ - \left(90^\circ - \frac{\hat{x}}{2}\right) \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 30^\circ + \frac{\hat{x}}{2}. \quad (2)$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Delta$, θέτουμε $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \hat{\omega}$ και παίρνουμε:

$$2\hat{\omega} + \hat{x} + 60^\circ = 180 \Leftrightarrow \hat{\omega} = 60^\circ - \frac{\hat{x}}{2}. \quad (3)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο τέλος $E\Delta Z$, έχουμε:

$$\hat{Z}_1 = E\hat{Z}\Delta = 90^\circ - \hat{\omega} \Leftrightarrow \hat{Z}_1 = 30^\circ + \frac{\hat{x}}{2}. \quad (4)$$

Πρόβλημα 4

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο A που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο A όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 5 και στη συνέχεια, από τους ακέραιους που απέμειναν, διαγράφουμε αυτούς που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο A .

Λύση

Το σύνολο $A = \{1, 2, 3, \dots, 2012\}$ έχει 2012 στοιχεία. Τα πολλαπλάσια του 5 που ανήκουν στο σύνολο A είναι της μορφής 5κ , όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$1 \leq 5\kappa \leq 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \kappa \leq \frac{2012}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \kappa \leq 402 \frac{2}{5} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, \dots, 402\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 5 που ανήκουν στο σύνολο A είναι 402.

Τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο A είναι της μορφής 8κ , όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$1 \leq 8\kappa \leq 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \kappa \leq \frac{2012}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \kappa \leq 251 \frac{4}{8} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, \dots, 251\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο A είναι 251.

Όμως υπάρχουν πολλαπλάσια του 8 που είναι και πολλαπλάσια του 5 και έχουν ήδη διαγραφεί. Αυτά είναι όλα τα πολλαπλάσια του $\text{ΕΚΠ}\{5,8\} = 40$ που ανήκουν στο σύνολο Α.

Εργαζόμενοι ομοίως, από τις ανισώσεις

$$1 \leq 40\kappa \leq 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{40} \leq \kappa \leq \frac{2012}{40} \Leftrightarrow \frac{1}{40} \leq \kappa \leq 50 \frac{12}{40} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, \dots, 50\},$$

βρίσκουμε ότι τα κοινά πολλαπλάσια των 5 και 8 μέσα στο σύνολο Α είναι 50.

Επομένως, διαγράψαμε από το σύνολο Α συνολικά $402 + 251 - 50 = 603$ στοιχεία, οπότε απέμειναν τελικά $2012 - 603 = 1409$ στοιχεία.

“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”

ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A = \frac{2^2}{31} \cdot \left(3^3 + 1000^0 + \frac{2}{9} : \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) \text{ και } B = \left(1 - \frac{40}{41} \right) : \left(\frac{80}{3^4} - \frac{79}{9^2} \right) + \frac{67}{41}.$$

Λύση

Έχουμε

$$A = \frac{2^2}{31} \cdot \left(3^3 + 1000^0 + \frac{2}{9} : \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{31} \cdot \left(27 + 1 + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{1} - \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{31} \cdot \left(28 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{112}{31}$$

$$B = \left(1 - \frac{40}{41} \right) : \left(\frac{80}{3^4} - \frac{79}{9^2} \right) + \frac{67}{41} = \frac{1}{41} : \left(\frac{80}{81} - \frac{79}{81} \right) + \frac{67}{41} = \frac{1}{41} : \frac{1}{81} + \frac{67}{41} = \frac{1}{41} \cdot \frac{81}{1} + \frac{67}{41} = \frac{81}{41} + \frac{67}{41} = \frac{148}{41}$$

$$\text{Επειδή } A - B = \frac{112}{31} - \frac{148}{41} = \frac{112 \cdot 41 - 148 \cdot 31}{31 \cdot 41} = \frac{4592 - 4588}{1271} = \frac{4}{1271} > 0, \text{ έπεται ότι } A > B.$$

Πρόβλημα 2

Ένας φορητός υπολογιστής έχει τιμή πώλησης 720 ευρώ σε μετρητά. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 5% πάνω στην τιμή πώλησης. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 24 ισόποσες μηνιαίες δόσεις τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 14% πάνω στην τιμή πώλησης. Να βρείτε σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις πόση θα είναι η μηνιαία δόση.

Λύση.

Όταν ο πελάτης πληρώσει τον υπολογιστή σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 5% πάνω στην τιμή πώλησης., δηλαδή επιβαρύνεται με $720 \cdot \frac{5}{100} = 36$ ευρώ, οπότε θα πληρώσει συνολικά $720 + 36 = 756$ ευρώ. Επομένως η μηνιαία δόση θα είναι $756 : 12 = 63$ ευρώ.

Όταν ο πελάτης πληρώσει τον υπολογιστή σε 24 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 14% πάνω στην τιμή πώλησης, δηλαδή επιβαρύνεται με $720 \cdot \frac{14}{100} = 100,8$ ευρώ, οπότε θα πληρώσει συνολικά $720 + 100,8 = 820,8$ ευρώ. Επομένως η μηνιαία δόση θα είναι $820,8 : 24 = 34,2$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ παράλληλο προς τη βάση ΒΓ και ίσο με την πλευρά ΑΒ. Η ευθεία ΒΔ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\hat{A}\hat{B}\Gamma$.

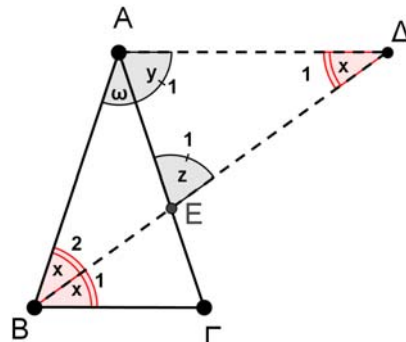
(β) Αν το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\hat{B}\hat{A}\Gamma = \omega$.

Λύση

(α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές ($AB = AD$), οπότε: $\hat{A}_1 = \hat{B}_2$.

Οι ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες, οπότε: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$, ως εντός εναλλάξ γωνίες.

Άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x}$. Επομένως η ΒΔ διχοτομεί την γωνία $\hat{A}\hat{B}\Gamma$.



Σχήμα 1

(β) Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ, έχουμε :

$$\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = 180^\circ \quad (1).$$

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΔ, έχουμε:

$$2\hat{x} + \hat{y} + \hat{\omega} = 180^\circ \quad (2).$$

Από την παραλληλία τέλος των ΑΔ και ΒΓ (με τέμνουσα την ΑΓ), έχουμε:

$$\hat{y} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 2\hat{x} \quad (3).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) (σε συνδυασμό με τη σχέση (3)), έχουμε:

$$3\hat{x} + \hat{z} = 180^\circ \quad (A) \quad \text{και} \quad 4\hat{x} + \hat{\omega} = 180^\circ \quad (B).$$

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\hat{y} = \hat{z}$, τότε $\hat{y} = \hat{z} = 2\hat{x}$ και από τις σχέσεις (Α) και (Β) λαμβάνουμε:

$$\hat{x} = 36^\circ \quad \text{και} \quad \hat{\omega} = 36^\circ.$$

- Αν $\hat{x} = \hat{z}$, τότε από τη σχέση (Α) παίρνουμε: $\hat{x} = \hat{z} = 45^\circ$, οπότε $\hat{B} = 90^\circ$, άτοπο.

- Αν $\hat{x} = \hat{y}$, τότε από τη σχέση (3) παίρνουμε: $\hat{x} = 0^\circ$, άτοπο.

Άρα, αν το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, τότε $\hat{B}\hat{A}\Gamma = \omega = 36^\circ$.

Πρόβλημα 4

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 60% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 15% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Αν υπάρχουν 24 μαθητές που δεν παίζουν κανένα από τα δύο αθλήματα, να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Λύση

Ο αριθμός των μαθητών που παίζουν ένα τουλάχιστον από τα δύο αθλήματα είναι σε ποσοστό $(60 + 45) - 15 = 90\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Επομένως ο αριθμός των μαθητών που

δεν ασχολούνται με κανένα από τα δύο αθλήματα είναι σε ποσοστό $100 - 90 = 10\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Σύμφωνα με την υπόθεση, αυτοί οι μαθητές είναι 24, οπότε το Γυμνάσιο

έχει συνολικά $24 \cdot \frac{100}{10} = 240$ μαθητές. Επομένως, οι μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο είναι

$$240 \cdot \frac{60}{100} = 144, \quad \text{ενώ οι μαθητές που παίζουν μπάσκετ είναι} \quad 240 \cdot \frac{45}{100} = 108.$$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε τους αριθμούς

$$A = \left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(3^2 + 2000^0 - \frac{4}{9} : \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \frac{77}{3^4} \quad \text{και} \quad B = \left(4 - \frac{16}{81}\right) : \left(\frac{60}{3^3} - \frac{19}{3^2}\right) + \frac{7}{9}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(3^2 + 2000^0 - \frac{4}{9} : \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \frac{77}{3^4} = \frac{4}{9} : \left(9 + 1 - \frac{4}{9} \cdot 3 + \frac{1}{3}\right) + \frac{77}{81} \\ &= \frac{4}{9} : \left(10 - \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right) + \frac{77}{81} = \frac{4}{9} : 9 + \frac{77}{81} = \frac{4}{81} + \frac{77}{81} = 1. \\ B &= \left(4 - \frac{16}{81}\right) : \left(\frac{60}{3^3} - \frac{19}{3^2}\right) + \frac{7}{9} = \frac{308}{81} : \frac{(60 - 3 \cdot 19)}{27} + \frac{7}{9} = \frac{308}{81} : \frac{3}{27} + \frac{7}{9} = \\ &= \frac{308}{81} \cdot 9 + \frac{7}{9} = \frac{308 + 7}{9} = \frac{315}{9} = 35. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Αγρός έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, ύψος ΑΒ = 800 μέτρα, μικρή βάση ΑΔ, μεγάλη βάση ΒΓ και διαφορά βάσεων ΒΓ – ΑΔ = 800 μέτρα. Δίνεται ακόμη ότι:

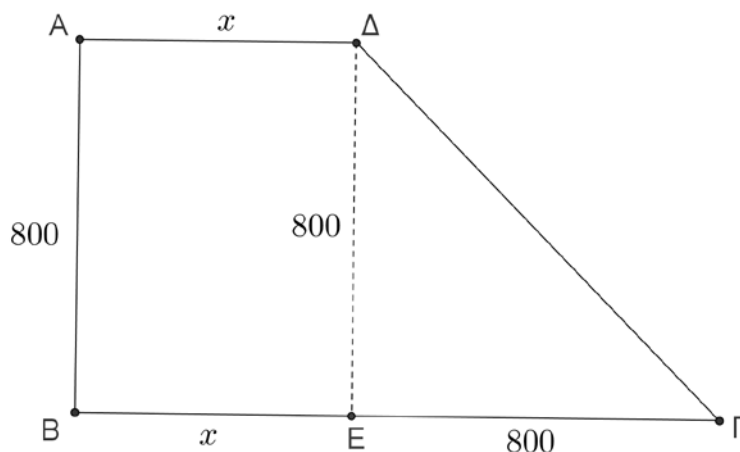
- Η περίμετρος του αγρού είναι μικρότερη από $2810 + 800\sqrt{2}$ μέτρα.
- Το εμβαδό του αγρού είναι μεγαλύτερο από 796 στρέμματα.
- Η μικρή βάση ΑΔ έχει μήκος x μέτρα, όπου x ακέραιος πολλαπλάσιος του 10.

Να βρείτε τα μήκη των βάσεων και το εμβαδόν του αγρού.

(Δίνεται ότι 1 στρέμμα είναι ίσο με 1000 τετραγωνικά μέτρα)

Λύση

Από τις υποθέσεις του προβλήματος είναι ΑΔ = x μέτρα, ΒΓ = $800 + x$ μέτρα, ΑΒ = 800 μέτρα. Αν φέρουμε τη ΔΕ ⊥ ΒΓ, τότε είναι ΑΒΕΔ ορθογώνιο με ΒΕ = x , ΔΕ = 800, οπότε θα είναι ΕΓ = ΒΓ – ΒΕ = ΒΓ – ΑΔ = 800. Έτσι το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε ότι ΓΔ = $800\sqrt{2}$ μέτρα.



Επομένως, η περίμετρος και το εμβαδό του αγρού θα είναι:

$$\Pi(x) = x + 800 + x + 800 + 800\sqrt{2} = 2x + 1600 + 800\sqrt{2}$$

$$E(x) = \frac{2x + 800}{2} \cdot 800 = (x + 400) \cdot 800 = 800x + 320000.$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος προκύπτουν οι ανισώσεις:

$$2x + 1600 + 800\sqrt{2} < 2810 + 800\sqrt{2} \Leftrightarrow 2x < 1210 \Leftrightarrow x < 605$$

$$800x + 320000 > 796000 \Leftrightarrow 800x > 476000 \Leftrightarrow x > 595$$

Επομένως έχουμε $595 < x < 605$ και αφού ο αριθμός x είναι ακέραιος πολλαπλάσιος του 10, έπεται ότι $x = 600$ μέτρα.

Άρα τα μήκη των βάσεων είναι $ΑΔ = 600$ μέτρα, $ΒΓ = 1400$ μέτρα και το εμβαδό του αγρού είναι $800 \cdot 600 + 320000 = 480000 + 320000 = 800000$ τετραγωνικά μέτρα, δηλαδή 800 στρέμματα.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $\hat{Α} = 30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΓΔ$ με $\hat{ΑΔΓ} = 90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς $ΑΓ$ τέμνει την $ΑΓ$ στο μέσο της $Κ$, την $ΑΒ$ στο σημείο $Λ$ και την προέκταση της πλευράς $ΒΓ$ στο σημείο $Μ$. Έστω $Ν$ το συμμετρικό του σημείου $Λ$ ως προς την ευθεία $ΑΓ$. Να βρείτε:

(α) Τα μέτρα των γωνιών $\hat{ΚΜΒ}$ και $\hat{Μ\hat{Α}Λ}$.

(β) Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $ΛΝ$ συναρτήσει του μήκους $\alpha = ΑΔ$.

Λύση

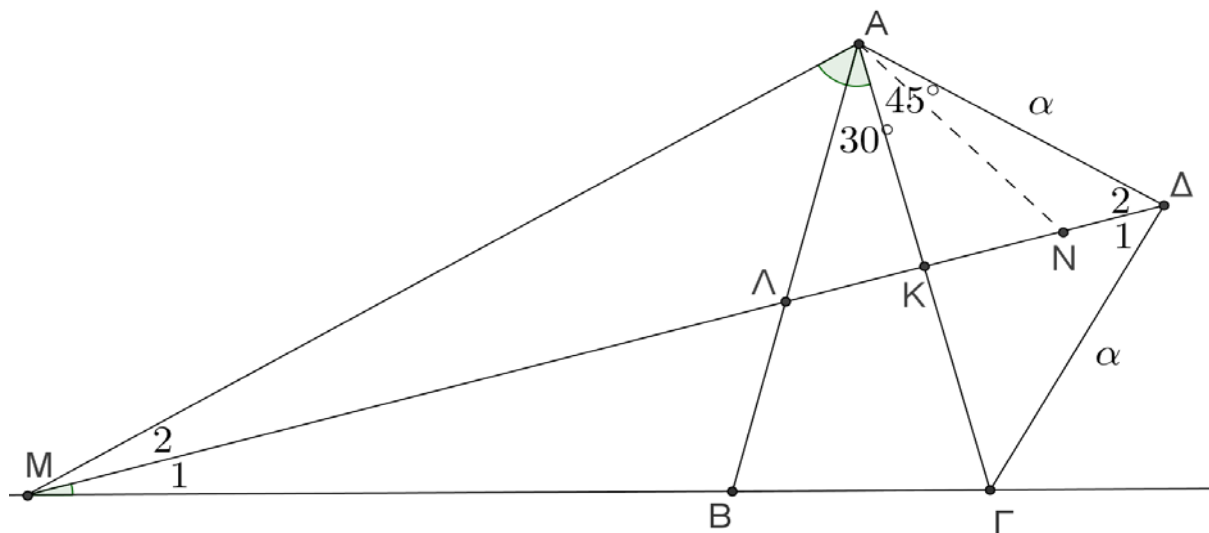
(α) Το τρίγωνο $ΜΚΓ$ είναι ορθογώνιο στο $Κ$ και έχει τη γωνία

$$\hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{Α}}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

Επομένως θα είναι και $\hat{Β} = \hat{\Gamma} = 75^\circ$, οπότε έχουμε $\hat{ΚΜΒ} = \hat{Μ}_1 = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

Επειδή κάθε σημείο της μεσοκάθετης $ΜΔ$ του ευθυγράμμου τμήματος $ΑΓ$ ισαπέχει από τα άκρα του $Α$ και $Γ$ το τρίγωνο $ΜΑΓ$ είναι ισοσκελές και έχει

$$\hat{Μ\hat{Α}Γ} = \hat{Μ\hat{\Gamma}Α} \Leftrightarrow \hat{Μ\hat{Α}Λ} + \hat{Α} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{Μ\hat{Α}Λ} = \hat{\Gamma} - \hat{Α} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ.$$



(β) Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΔΓ$ έχουμε

$$ΑΓ^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow ΑΓ = \alpha\sqrt{2},$$

οπότε θα είναι:

$$ΑΚ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

Επειδή τα σημεία $Λ$ και $Ν$ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $ΑΓ$, έπεται ότι $ΛΚ = ΚΝ$. Όμως και τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΛ$ και $ΑΝ$ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $ΑΓ$, οπότε $ΑΛ = ΑΝ$ και ομοίως $\hat{Λ\hat{Α}Κ} = \hat{Ν\hat{Α}Κ} = 30^\circ$. Άρα είναι $\hat{Λ\hat{Α}Ν} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο $ΛΑΝ$ είναι ισόπλευρο και έχουμε $ΛΝ = ΑΛ$. Αν είναι $ΑΛ = ΛΝ = x$, τότε θα είναι

$ΑΚ = \frac{ΛΝ}{2} = \frac{x}{2}$, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΛΚ$ λαμβάνουμε:

$$ΑΛ^2 - ΑΚ^2 = ΑΚ^2 \Leftrightarrow x^2 - \frac{x^2}{4} = \left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{4} = \frac{2\alpha^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{2\alpha^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha\sqrt{6}}{3}.$$

Πρόβλημα 4

Σε ένα σχολείο το 55% των μαθητών είναι αγόρια. Το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά. Τα αγόρια που μιλούν γαλλικά, είναι τα $\frac{7}{11}$ των μαθητών που μιλούν γαλλικά. Τα κορίτσια που δεν μιλούν γαλλικά είναι 60. Βρείτε πόσους μαθητές έχει το σχολείο.

Λύση

Έστω x το πλήθος των αγοριών και y το πλήθος των κοριτσιών.

Έστω ακόμη α το πλήθος των αγοριών που γνωρίζουν γαλλικά και κ το πλήθος των κοριτσιών που γνωρίζουν γαλλικά.

Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις.

Εφόσον το 55% των μαθητών είναι αγόρια, θα ισχύει:

$$x = \frac{55}{100}(x + y) \Leftrightarrow 100x = 55x + 55y \Leftrightarrow 9x = 11y \Leftrightarrow y = \frac{9}{11}x \quad (1).$$

Εφόσον το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν Γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν Γαλλικά, θα ισχύει:

$$x - \alpha = \kappa \Leftrightarrow x = \kappa + \alpha \quad (2).$$

Τα αγόρια που μιλούν γαλλικά είναι τα $\frac{7}{11}$ των μαθητών που μιλούν γαλλικά.

Άρα:

$$\frac{7}{11}(\kappa + \alpha) = \alpha \Leftrightarrow \frac{7}{11}x = \alpha \quad (3).$$

Επειδή (τέλος) το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά είναι 60, θα ισχύει η ισότητα:

$$y = \kappa + 60.$$

Προσθέτοντας και στα δύο μέλη (της τελευταίας ισότητας) το α , έχουμε:

$$y = \kappa + 60 \Leftrightarrow y + \alpha = \kappa + \alpha + 60 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} y + \alpha = x + 60 \stackrel{(1),(3)}{\Leftrightarrow} \frac{9}{11}x + \frac{7}{11}x = x + 60 \Leftrightarrow \frac{5}{11}x = 60 \Leftrightarrow x = 132.$$

Άρα το πλήθος των αγοριών είναι 132, το πλήθος των κοριτσιών $y = \frac{9}{11}x = \frac{9}{11} \cdot 132 = 108$,
οπότε το συνολικό πλήθος των μαθητών είναι 240.

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{7}{3} - \frac{49}{9}\right) \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{3} + \left(\frac{3}{2} - \frac{6}{5}\right)^{-2} : \left(2 - \frac{11}{10}\right)^{-2}.$$

Λύση. Έχουμε :

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{7}{3} - \frac{49}{9}\right) \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{3} + \left(\frac{3}{2} - \frac{6}{5}\right)^{-2} : \left(2 - \frac{11}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{21}{9} - \frac{49}{9}\right) \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{3} + \left(\frac{3}{10}\right)^{-2} : \left(\frac{9}{10}\right)^{-2} \\ &= \left(-\frac{28}{9}\right) \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{3} + \left(\frac{3}{10}\right)^{-2} : \left(\frac{9}{10}\right)^{-2} = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \left(\frac{10}{3}\right)^2 : \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{100}{9} \cdot \frac{81}{100} = \frac{81}{9} = 9. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2. Μία οικογένεια αγόρασε ένα ψυγείο με έκπτωση $11\frac{1}{9}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης και ένα πλυντήριο με έκπτωση $14\frac{2}{7}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης. Η συνολική τιμή πώλησης ψυγείου και πλυντηρίου ήταν 3150 ευρώ. Η συνολική έκπτωση που έγινε ήταν 350 ευρώ. Να βρείτε την τιμή πώλησης του ψυγείου και του πλυντηρίου.

Σημείωση: Οι αριθμοί $11\frac{1}{9}\%$ και $14\frac{2}{7}\%$ είναι μεικτοί.

Λύση

Έστω x ευρώ η τιμή πώλησης του ψυγείου, οπότε η τιμή πώλησης του πλυντηρίου θα είναι $3150 - x$ ευρώ. Η έκπτωση για το ψυγείο ήταν $11\frac{1}{9}\% = \frac{100}{9}\%$, οπότε η

έκπτωση για το ψυγείο ήταν $x \cdot \frac{100/9}{100} = \frac{x}{9}$ ευρώ. Επίσης, η έκπτωση για το πλυντήριο

ήταν $14\frac{2}{7}\% = \frac{100}{7}\%$, οπότε η αντίστοιχη έκπτωση για το πλυντήριο ήταν

$$(3150 - x) \cdot \frac{100/7}{100} = \frac{3150 - x}{7} = 450 - \frac{x}{7}. \text{ Άρα έχουμε}$$

$$\frac{x}{9} + 450 - \frac{x}{7} = 390 \Leftrightarrow \frac{x}{9} - \frac{x}{7} = -60 \Leftrightarrow \frac{2x}{63} = 60 \Leftrightarrow x = 63 \cdot 30 \Leftrightarrow x = 1890.$$

Επομένως, η τιμή πώλησης του ψυγείου ήταν 1890 ευρώ και η τιμή πώλησης του πλυντηρίου ήταν $3150 - 1890 = 1260$ ευρώ.

Πρόβλημα 3. Τέσσερα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν πέρυσι για τη μεταφορά των μαθητών τους στο Γυμνάσιο του Δήμου τους συνολικά 9690 ευρώ. Τα χρήματα που πλήρωσε κάθε χωριό ήταν ανάλογα προς τον αριθμό των μαθητών του χωριού που φοιτούσαν στο Γυμνάσιο. Να βρείτε πόσα χρήματα πλήρωσε κάθε χωριό, αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός των μαθητών του χωριού Β ισούται με τα $\frac{3}{4}$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Γ, ο αριθμός των μαθητών του χωριού Α ισούται με τα $\frac{2}{3}$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Β και ο αριθμός των μαθητών του χωριού Δ είναι το άθροισμα των μαθητών των χωριών Α και Γ.

Λύση

Έστω ότι τα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν τα ποσά $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε:

$$\beta = \frac{3\gamma}{4}, \alpha = \frac{2\beta}{3}, \delta = \alpha + \gamma \Rightarrow \alpha = \frac{2\beta}{3}, \gamma = \frac{4\beta}{3}, \delta = \frac{6\beta}{3} = 2\beta$$
$$\frac{3\alpha}{2} = \beta = \frac{3\gamma}{4} = \frac{\delta}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2/3} = \frac{\beta}{1} = \frac{\gamma}{4/3} = \frac{\delta}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4} = \frac{\delta}{6}.$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος το ποσό των 9690 ευρώ πρέπει να διαμεριστεί σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ οποίοι, όπως διαπιστώνουμε από την τελευταία σχέση είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 2, 3, 4 και 6. Επομένως, αρκεί να διαμερίσουμε το ποσό των 9690 ευρώ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 2, 3, 4 και 6. Έτσι, αν διαιρέσουμε τον αριθμό 9690 σε $2+3+4+6=15$ ίσα μέρη έχουμε μερίδιο το ποσό $9690:15=646$ ευρώ. Επομένως, το χωριό Α πλήρωσε $646 \cdot 2=1292$ ευρώ, το χωριό Β πλήρωσε $646 \cdot 3=1938$ ευρώ, το χωριό Γ πλήρωσε $646 \cdot 4=2584$ ευρώ και το χωριό Δ πλήρωσε $646 \cdot 6=3876$ ευρώ.

Διαφορετικά, από τις ισότητες

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4} = \frac{\delta}{6} = \omega \Rightarrow \alpha = 2\omega, \beta = 3\omega, \gamma = 4\omega, \delta = 6\omega,$$

οπότε από την υπόθεση $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 9690$ με αντικατάσταση λαμβάνουμε:

$$2\omega + 3\omega + 4\omega + 6\omega = 9690 \Leftrightarrow 15\omega = 9690 \Leftrightarrow \omega = 646.$$

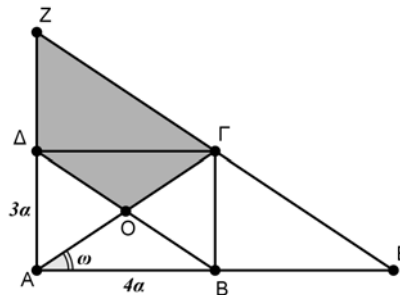
Άρα είναι: $\alpha = 2\omega = 1292$, $\beta = 3\omega = 1938$, $\gamma = 4\omega = 2584$, $\delta = 6\omega = 3876$ ευρώ.

Πρόβλημα 4

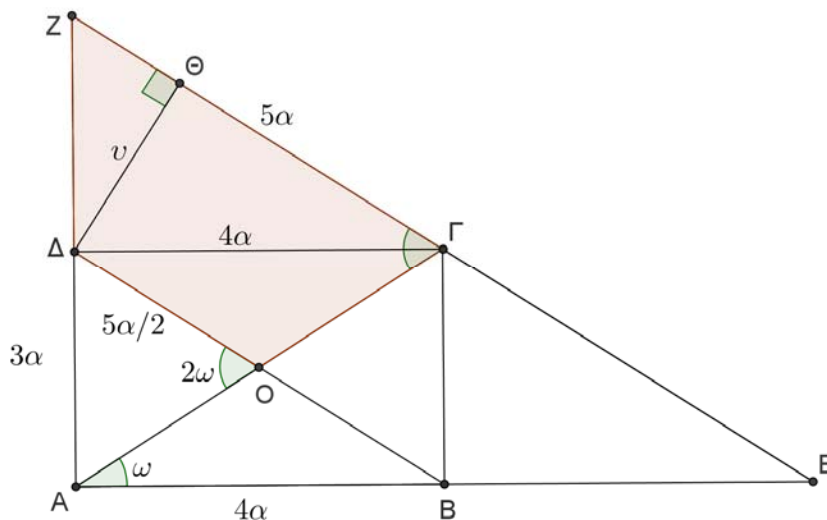
Έστω $AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο με $\hat{A}B = \omega$ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από την κορυφή Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διαγώνιο ΒΔ η οποία τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε και την ευθεία ΑΔ στο σημείο Ζ. Δίνεται ότι:

$$AB = 4\alpha \text{ cm}, \quad A\Delta = 3\alpha \text{ cm}.$$

1. Βρείτε τη γωνία $\hat{A}\Gamma Z$ συναρτήσει της γωνίας ω .
2. Αποδείξτε ότι: $A\Gamma = \Gamma Z = \Gamma E$.
3. Βρείτε το ύψος και το εμβαδόν του τραπέζιου $\Delta O\Gamma Z$.



Λύση



1. Επειδή οι διαγώνιες ορθογωνίου είναι ίσες και διχοτομούνται, έπεται ότι $OA = OB = OG = OD$, οπότε το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με $O\hat{B}A = \omega = O\hat{A}B$. Η γωνία $A\hat{O}D$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο AOB , οπότε θα είναι $A\hat{O}D = O\hat{A}B + O\hat{B}A = 2\omega$. Από την παραλληλία $EZ \parallel BD$, επειδή οι γωνίες $A\hat{G}Z$ και $A\hat{O}D$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά, έχουμε: $A\hat{G}Z = 2\omega$.

2. Επειδή $EZ \parallel BD$ και $GD \parallel AE$, $BG \parallel AZ$, τα τετράπλευρα $DBEG$ και $DBGZ$ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες. Άρα είναι: $BD = GZ = GE$. Όμως οι διαγώνιες παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε $AG = BD$. Επομένως, θα είναι και $AG = GZ = GE$.

3. Το τρίγωνο AGZ είναι ισοσκελές με $AG = GZ$, οπότε το ύψος του $GD = AB = 4\alpha \text{ cm}$ είναι και διάμεσος. Άρα είναι: $AZ = 2 \cdot AD = 6\alpha \text{ cm}$ και $DZ = 3\alpha \text{ cm}$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABD έχουμε:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow BD^2 = (4\alpha)^2 + (3\alpha)^2 = 25\alpha^2 \Rightarrow BD = 5\alpha \text{ cm}.$$

Άρα είναι: $OD = \frac{BD}{2} = \frac{5\alpha}{2}$ και $GZ = 5\alpha \text{ cm}$.

Για το ύψος $\nu = \Delta\Theta$ έχουμε ότι:

$$E(\Gamma\Delta Z) = \frac{\Delta\Gamma \cdot \Delta Z}{2} = \frac{\Gamma Z \cdot \Delta\Theta}{2} \Leftrightarrow \frac{4\alpha \cdot 3\alpha}{2} = \frac{\Gamma Z \cdot \nu}{2} \Leftrightarrow \nu = \frac{12\alpha}{5}.$$

Επομένως, είναι:

$$E(\Delta O \Gamma Z) = \frac{(\Delta O + \Gamma Z)}{2} \cdot \nu = \frac{\left(\frac{5\alpha}{2} + 5\alpha\right)}{2} \cdot \frac{12\alpha}{5} = 9\alpha^2 \text{ cm}^2.$$

“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ” 16 Ιανουαρίου 2016 ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Δίνονται οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί $\alpha = 0, \overline{2}$ και $\beta = 0, \overline{3}$.

(α) Να γράψετε τους αριθμούς α και β σε κλασματική μορφή.

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (3\alpha - 5\beta)^{2015} + (18\alpha^2 + \beta^2)^{2016}.$$

Λύση

(α) Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,222 \dots \\ 10\alpha &= 2,222 \dots \\ 10\alpha &= 0,222 \dots + 2 \\ 10\alpha &= \alpha + 2 \\ 9\alpha &= 2 \end{aligned}$$

Άρα είναι $\alpha = \frac{2}{9} \dots$

Εργαζόμενοι ομοίως, βρίσκουμε ότι: $\beta = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

(β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= (3\alpha - 5\beta)^{2015} + (18\alpha^2 + \beta^2)^{2016} = \left(3 \cdot \frac{2}{9} - 5 \cdot \frac{1}{3}\right)^{2015} + \left(18 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^{2016} \\ &= \left(\frac{6}{9} - \frac{15}{9}\right)^{2015} + \left(18 \cdot \frac{4}{81} + \frac{1}{81}\right)^{2016} = (-1)^{2015} + (+1)^{2016} = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.

Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο με τον οποίο είτε πολλαπλασιάσουμε είτε διαιρέσουμε το 2016, προκύπτει ως αποτέλεσμα τέλειο τετράγωνο.

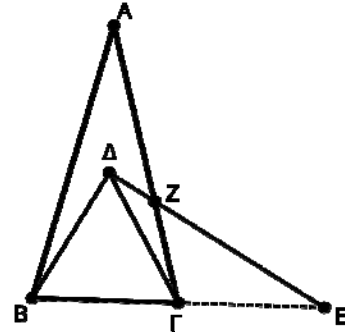
Λύση

Αναλύουμε το 2016 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έχουμε ότι $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Επομένως, όταν ο αριθμός 2016 πολλαπλασιαστεί με κάποιο παράγοντα, για να προκύψει γινόμενο που είναι τέλειο τετράγωνο, θα πρέπει ο παράγοντας αυτός να έχει ως παράγοντες τους αριθμούς 2 και 7 σε περιττό εκθέτη και κάθε άλλο πρώτο παράγοντα σε άρτιο εκθέτη. Ο μικρότερος τέτοιος αριθμός είναι ο $2 \cdot 7 = 14$. Παρατηρούμε ότι και η διαίρεση $2016 : (2 \cdot 7)$ δίνει πηλίκο ίσο με $2^4 \cdot 3^2 = (2^2 \cdot 3)^2 = 12^2$, που είναι τέλειο τετράγωνο. Επομένως ο μικρότερος θετικός ακέραιος με τη ζητούμενη ιδιότητα είναι ο 14.

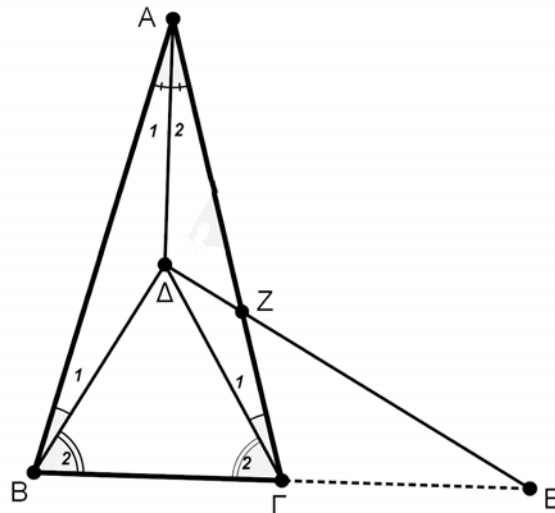
Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$) και $\hat{A} = 30^\circ$. Το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο και το σημείο E βρίσκεται στη προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και είναι τέτοιο ώστε $B\Gamma = \Gamma E$. Αν η πλευρά $A\Gamma$ τέμνεται από τη ΔE στο σημείο Z , τότε:

- (α) Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{A}\hat{B}\Delta$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}\Delta$.
- (β) Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta \Gamma$ είναι ισοσκελή.
- (γ) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ορθογώνιο.



Λύση



(α) Το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο άρα $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2 = 60^\circ$.

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\hat{A} = 30^\circ$ άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 75^\circ$.

Αφαιρώντας τις ισότητες κατά μέλη, έχουμε:

$$\hat{B} - \hat{B}_2 = \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_2 = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 15^\circ.$$

β) Επειδή $AB = A\Gamma$ και $\Delta B = \Delta \Gamma$ η $A\Delta$ είναι μεσοκάθετη της $B\Gamma$, άρα και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, οπότε

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 15^\circ.$$

Άρα τα τρίγωνα $A\Delta \Gamma$ και $A\Delta B$ είναι ισοσκελή.

(γ) Το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές ($\Gamma\Delta = \Gamma E$) με

$$\Delta\hat{E}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_1 + \hat{Z}\hat{\Gamma}E = 15^\circ + (180^\circ - \hat{\Gamma}) =$$

$$= 15^{\circ} + 180^{\circ} - 75^{\circ} = 120^{\circ}.$$

Άρα $\angle \hat{A}E = \angle \hat{E}G = 30^{\circ}$. Επειδή από το ισόπλευρο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι

$$\angle \hat{B}\Delta = \angle \hat{B}\Delta = 60^{\circ},$$

έπεται ότι:

$$\angle \hat{B}AE = 180^{\circ} - (\angle \hat{B}\Delta + \angle \hat{E}B) = 180^{\circ} - (60^{\circ} + 30^{\circ}) = 90^{\circ},$$

οπότε το τρίγωνο BAE είναι ορθογώνιο.

Πρόβλημα 4.

Για την εκτέλεση ενός μεγάλου ερευνητικού έργου στο προαπαιτούμενο χρονικό όριο, ξεκίνησαν να εργάζονται συνολικά 500 ερευνητές. Όταν τελείωσε στην ώρα του το $\frac{1}{4}$

του έργου, αποχώρησαν 100 ερευνητές, οπότε το δεύτερο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με καθυστέρηση. Αποχώρησαν όμως τότε και άλλοι 100 ερευνητές, οπότε το τρίτο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με επιπλέον καθυστέρηση. Πόσοι ερευνητές πρέπει να προσληφθούν, ώστε το έργο να τελειώσει στον προγραμματισμένο χρόνο.

(Υποθέτουμε ότι όλοι οι ερευνητές που εργάστηκαν, αλλά και αυτοί που θα προσληφθούν, δουλεύουν με την ίδια απόδοση)

Λύση

Αφού στο πρώτο τέταρτο δούλευαν όλοι οι ερευνητές, το έργο ολοκληρώθηκε στην ώρα του και υποθέτουμε ότι χρειάστηκαν χρόνο t .

Στο δεύτερο τέταρτο σε κάθε χρονική μονάδα ολοκληρώνεται το $\frac{500-100}{500} = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}$ από το έργο που θα ολοκληρωνόταν αν δούλευαν όλοι. Επομένως, για να ολοκληρωθεί το δεύτερο τέταρτο του έργου χρειάζεται χρόνος $\frac{5}{4}t$.

Όμοια για να ολοκληρωθεί το τρίτο τέταρτο του έργου θα χρειαστεί χρόνος $\frac{5}{3}t$.

Έστω τέλος ότι με την προσθήκη των ερευνητών στο τελευταίο τέταρτο χρειάζεται χρόνος x .

Το έργο για να τελειώσει στην ώρα ή νωρίτερα του χρειάζεται χρόνος τετραπλάσιος από το πρώτο τέταρτο που δούλευαν όλοι, δηλαδή χρόνος μικρότερος ή ίσος με $4t$.

Άρα, έχουμε τη σχέση:

$$t + \frac{5}{4}t + \frac{5}{3}t + x = 4t \Leftrightarrow x = t \left(3 - \frac{5}{4} - \frac{5}{3} \right) = t \frac{(36-15-20)}{12} = \frac{1}{12}t$$

Επομένως, αν έγινε πρόσληψη y ερευνητών στο τελευταίο τέταρτο δούλεψαν

$300 + y$ επιστήμονες και για το τελευταίο τέταρτο χρειάστηκαν χρόνο $x = \frac{500}{300+y}t$,

οπότε πρέπει $\frac{500}{300+y}t = \frac{1}{12}t \Rightarrow 6000 = y + 300 \Rightarrow 5700 = y$

Επομένως πρέπει να προσληφθούν 5700 επιστήμονες.

Πρόβλημα 1

(α) Να βρεθούν όλα τα μη μηδενικά κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, με α, β μη αρνητικούς ακέραιους και $\alpha + \beta = 4$.

(β) Για το μικρότερο από τα κλάσματα του προηγούμενου ερωτήματος να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \left(2 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \frac{6}{7} - 3 \left(\frac{2 \cdot \alpha}{\beta} - \frac{9}{27}\right)$.

Λύση

(α) Αφού το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι μη μηδενικό πρέπει $\alpha \neq 0$ και αφού το β είναι παρονομαστής πρέπει $\beta \neq 0$. Αφού α, β είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $\alpha + \beta = 4$ πρέπει να ισχύει $\alpha < 4$ και $\beta < 4$. Επομένως, έχουμε:

$$\alpha = 3, \beta = 1, \frac{\alpha}{\beta} = 3, \quad \alpha = 2, \beta = 2, \frac{\alpha}{\beta} = 1 \quad \text{και} \quad \alpha = 1, \beta = 3, \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{3}.$$

(β) Το μικρότερο από τα κλάσματα που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα είναι το $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{3}$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= \left(2 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \frac{6}{7} - 3 \left(\frac{2 \cdot \alpha}{\beta} - \frac{9}{27}\right) = \left(2 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{6}{7} - 3 \left(\frac{2 \cdot 1}{3} - \frac{9}{27}\right) \\ &= \frac{7}{3} \cdot \frac{6}{7} - 3 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ο θετικός ακέραιος A έχει το γινόμενο των ψηφίων του ίσο με 12, το άθροισμα των ψηφίων του ίσο με 9 και επιπλέον διαιρείται με το 4. Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του A .

Λύση

Επειδή είναι $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ τα δυνατά ψηφία του A , έτσι ώστε αυτά να έχουν άθροισμα 9 είναι τα εξής:

(α) 2,6,1 (τριψήφιος αριθμός)

(β) 3,4,1,1 (τετραψήφιος αριθμός)

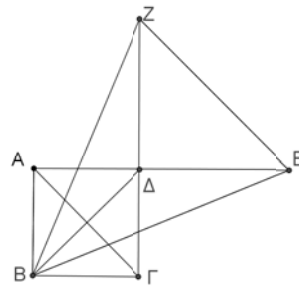
(γ) 2,2,3,1,1 (πενταψήφιος αριθμός)

Η μικρότερη δυνατή τιμή μπορεί να προκύψει από την περίπτωση (α). Δεδομένου ότι ένα αριθμός διαιρείται με το 4, όταν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4, οι δυνατές τιμές του A είναι οι 216 και 612. Επομένως η μικρότερη δυνατή τιμή του A είναι **216**.

Η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του A μπορεί να προκύψει από την περίπτωση (γ). Δεδομένου ότι ένα αριθμός διαιρείται με το 4, όταν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4, οι δυνατές τιμές του A πρέπει να έχουν τελευταίο διψήφιο τμήμα το 12 ή το 32. Όμως για τον προσδιορισμό της μεγαλύτερης δυνατής τιμής του A πρέπει το πρώτο ψηφίο του να είναι το 3. Επομένως η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του A είναι **32112**.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α . Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = B\Delta$ και την πλευρά $\Gamma\Delta$ κατά τμήμα $\Delta Z = B\Delta$.

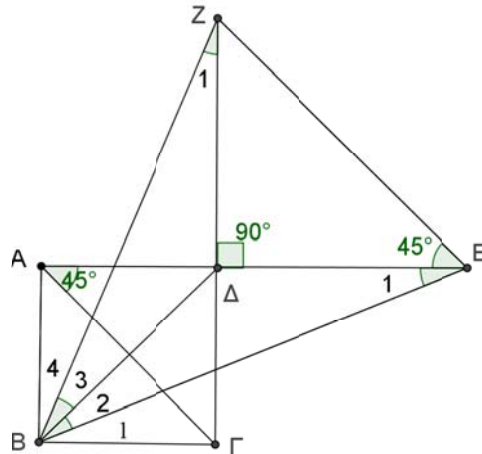


(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\Delta\hat{B}E$ και $\Delta\hat{Z}B$.

(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $A\Gamma$ και EZ είναι παράλληλες.

Σημείωση: Στην κόλλα σας να κάνετε το δικό σας σχήμα.

Λύση



Σχήμα 1

(α) Επειδή $AE \parallel B\Gamma$ και τέμνονται από την ευθεία BE έχουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, δηλαδή

$$\hat{B}_1 = \hat{E}_1 \quad (1)$$

Επειδή από υπόθεση $\Delta E = \Delta B$, το τρίγωνο ΔBE είναι ισοσκελές και έχει:

$$\Delta\hat{B}E = \hat{B}_2 = \hat{E}_1 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει η ισότητα:

$$\Delta\hat{B}E = \hat{B}_2 = \hat{B}_1 \quad (3)$$

Επειδή το τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές ($B\Gamma = \Gamma\Delta$, $\hat{\Gamma} = 90^\circ$) θα έχουμε:

$$\Gamma\hat{B}\Delta \equiv \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 45^\circ \stackrel{(3)}{\Rightarrow} 2 \cdot \Gamma\hat{B}\Delta = 45^\circ \Rightarrow \Gamma\hat{B}\Delta = 22,5^\circ$$

Με το ίδιο σκεπτικό όπως προηγουμένως έχουμε ότι $\hat{B}_3 = \hat{Z}_1$, αφού $\Delta B = \Delta Z$, $\hat{B}_4 = \hat{Z}_1$, αφού $AB \parallel \Gamma Z$. Επίσης είναι $A\hat{B}\Delta = \hat{B}_3 + \hat{B}_4 = 45^\circ$, οπότε λαμβάνουμε τελικά $\Delta\hat{Z}B = \hat{Z}_1 = 22,5^\circ$.

(β) Επειδή τα τρίγωνα $\Delta\Gamma A$ και ΔEZ είναι ορθογώνια ισοσκελή θα έχουμε $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{E}Z = 45^\circ$, οπότε οι ευθείες $A\Gamma$ και EZ τεμνόμενες από την ευθεία AE σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Επομένως οι ευθείες $A\Gamma$ και EZ είναι παράλληλες.

Πρόβλημα 4

Ένας πεζοπόρος περπατάει από το χωριό Α για να πάρει το τρένο στην πόλη Β. Ο πεζοπόρος σε μία ώρα προχώρησε κατά 4 χιλιόμετρα και τότε διαπίστωσε ότι περπατώντας με αυτή την ταχύτητα θα έφθανε στο σταθμό μία ώρα αργότερα από την αναχώρηση του τρένου. Για αυτό το λόγο στο υπόλοιπο της διαδρομής κινήθηκε με 6 χιλιόμετρα την ώρα και έτσι έφθασε στο σταθμό μισή ώρα νωρίτερα από την αναχώρηση του τρένου. Να βρείτε την απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β.

Λύση

Έστω ότι η απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β είναι x χιλιόμετρα. Με την ταχύτητα που έτρεχε ο πεζοπόρος θα κάλυπτε την απόσταση σε $\frac{x}{4}$ ώρες, οπότε η ώρα που ξεκινούσε από το χωριό Α και η ώρα

αναχώρησης του τρένου διέφεραν κατά $\frac{x}{4} - 1$ ώρες.

Μετά την πρώτη ώρα ο χρόνος που είχε ο πεζοπόρος για να φθάσει έγκαιρα στο σταθμό ήταν $\left(\frac{x}{4} - 1\right) - 1 = \frac{x}{4} - 2$ ώρες. Τα χιλιόμετρα που απέμεναν ήταν $x - 4$

και για να τα καλύψει ο πεζοπόρος χρειάστηκε $\frac{x-4}{6}$ ώρες. Σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned}\frac{x}{4} - 2 - \frac{x-4}{6} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{4} - \frac{x-4}{6} = \frac{1}{2} + 2 \Leftrightarrow \frac{x}{4} - \frac{x-4}{6} = \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{3x}{12} - \frac{2x-8}{12} &= \frac{30}{12} \Leftrightarrow 3x - (2x-8) = 30 \Leftrightarrow 3x - 2x + 8 = 30 \Leftrightarrow x = 22.\end{aligned}$$

Επομένως η απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β ήταν 22 χιλιόμετρα.

78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ” 20 Ιανουαρίου 2018

Ενδεικτικές λύσεις Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{2\beta + \alpha}{\beta} \right) \cdot \frac{500}{3} - 18 \cdot \left(\frac{\alpha - 11\beta}{\beta} \right),$$

αν δίνεται ότι: $\frac{\alpha}{\beta} = 10$.

Λύση

$$\begin{aligned}1^{\text{ος}} \text{ Τρόπος} \quad A &= \left(2 + \frac{\alpha}{\beta} \right) \cdot \frac{500}{3} - 18 \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} - 11 \right) = (2 + 10) \cdot \frac{500}{3} - 18 \cdot (10 - 11) \\ &= 12 \cdot \frac{500}{3} - 18 \cdot (-1) = 4 \cdot 500 - 18 \cdot (-1) = 2000 + 18 = 2018.\end{aligned}$$

2^{ος} Τρόπος

Επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = 10$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha = 10\beta$. Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned}A &= \left(\frac{2\beta + 10\beta}{\beta} \right) \cdot \frac{500}{3} - 18 \cdot \left(\frac{10\beta - 11\beta}{\beta} \right) = \left(\frac{12\beta}{\beta} \right) \cdot \frac{500}{3} - 18 \cdot \left(\frac{-\beta}{\beta} \right) \\ &= \frac{12}{1} \cdot \frac{500}{3} - 18 \cdot (-1) = 4 \cdot 500 + 18 = 2000 + 18 = 2018.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων που πρέπει να αφαιρεθούν από το σύνολο $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$, έτσι ώστε το γινόμενο όλων των στοιχείων του που θα απομείνουν να είναι τέλει τετράγωνο ακεραίου;

Λύση

Το γινόμενο των στοιχείων του συνόλου A γράφεται:

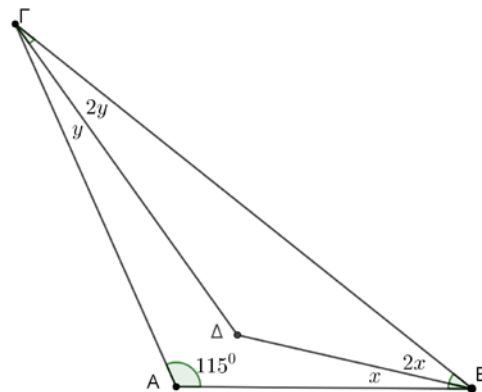
$$\Gamma = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 = 2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2^4 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 5 = 2^{18} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$$

Στο τελευταίο γινόμενο πρώτων παραγόντων πρέπει οι εκθέτες να είναι άρτιοι, οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι πρέπει σίγουρα να αφαιρεθεί ο παράγοντας 7, ο οποίος υπάρχει μόνο στην ανάλυση του 14. Επομένως πρέπει να αφαιρεθεί ο αριθμός 14. Τότε το γινόμενο που προκύπτει είναι $\Gamma = 2^{17} \cdot 3^4 \cdot 5^2$ στο οποίο ο εκθέτης του 2 είναι περιττός. Για να γίνει άρτιος πρέπει να αφαιρεθεί περιττός αριθμός παραγόντων ίσων με 2. Για αυτό έχουμε δύο επιλογές. Η μία είναι να αφαιρέσουμε τον αριθμό 2 και η άλλη είναι να αφαιρέσουμε τον αριθμό 8. Στην πρώτη περίπτωση το γινόμενο που θα προκύψει είναι το $\Gamma_1 = 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^2 = (2^8 \cdot 3^2 \cdot 5)^2$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση το γινόμενο είναι $\Gamma_2 = 2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5^2 = (2^7 \cdot 3^2 \cdot 5)^2$. Επομένως ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων του συνόλου A που πρέπει να αφαιρέσουμε είναι 2, δηλαδή τους αριθμούς 2 και 14 ή τους αριθμούς 8 και 14.

Πρόβλημα 3

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 115^\circ$ θεωρούμε στο εσωτερικό του σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Delta\hat{B}\Gamma = 2 \cdot \Delta\hat{B}A$ και $\Delta\hat{\Gamma}B = 2 \cdot \Delta\hat{\Gamma}A$. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$.

Λύση



Σχήμα 1

Αν θέσουμε $\Delta\hat{B}A = x$, τότε $\Delta\hat{B}\Gamma = 2 \cdot \Delta\hat{B}A = 2x$. Ομοίως, αν $\Delta\hat{\Gamma}A = y$, τότε $\Delta\hat{\Gamma}B = 2 \cdot \Delta\hat{\Gamma}A = 2y$.

Από το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε

$$\hat{A} + 3x + 3y = 180^\circ \Rightarrow 3(x + y) = 180^\circ - 115^\circ \Rightarrow x + y = \frac{65^\circ}{3}.$$

Από το τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ έχουμε

$$B\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ - 2x - 2y = 180^\circ - 2(x + y) = 180^\circ - 2 \cdot \frac{65^\circ}{3} = 180^\circ - \frac{130^\circ}{3} = \frac{410^\circ}{3}.$$

Πρόβλημα 4

Ο Γιάννης πήγε στην αγορά έχοντας μαζί του κέρματα των δύο ευρώ και του ενός ευρώ. Ο αριθμός των κερμάτων του ήταν 40. Για την αγορά που έκανε ξόδεψε ακριβώς το ένα τρίτο των κερμάτων των δύο ευρώ που είχε μαζί του. Την επόμενη μέρα ξόδεψε το 40% της αξίας των χρημάτων που του είχαν απομείνει. Αν και τις δύο μέρες ξόδεψε συνολικά 40 ευρώ, να βρεθεί πόσα κέρματα των δύο ευρώ είχε αρχικά μαζί του..

Λύση

Έστω x τα κέρματα των δύο ευρώ που είχε αρχικά. Αφού χρησιμοποίησε το ένα τρίτο αυτών, σημαίνει ότι το x είναι πολλαπλάσιο του 3 και ότι το ένα τρίτο αυτών ισούται με $\frac{x}{3}$ και αυτά

έχουν αξία $\frac{2x}{3}$. Η αξία των χρημάτων που έδωσε την πρώτη μέρα είναι $\frac{2x}{3}$, επομένως τη δεύτερη

μέρα του απέμειναν $\frac{2x}{3} \cdot 2 + 40 - x = 40 + \frac{x}{3}$ ευρώ. Αφού ξόδεψε το 40% αυτών, τη δεύτερη

μέρα ξόδεψε $\left(40 + \frac{x}{3}\right) \cdot \frac{4}{10} = 16 + \frac{2x}{15}$ ευρώ. Επομένως συνολικά, την πρώτη και τη δεύτερη μέρα

ξόδεψε $2 \cdot \frac{x}{3} + 16 + \frac{2x}{15} = 16 + \frac{12x}{15}$ ευρώ.

Από την εκφώνηση ξέρουμε τώρα ότι ξόδεψε 40 ευρώ, οπότε

$$16 + \frac{12x}{15} = 40 \Leftrightarrow \frac{12x}{15} = 24 \Leftrightarrow 12x = 360 \Leftrightarrow x = 30.$$

Επομένως είχε αρχικά μαζί του 30 κέρματα των δύο ευρώ και 10 κέρματα του ενός ευρώ με συνολική αξία 70 ευρώ.