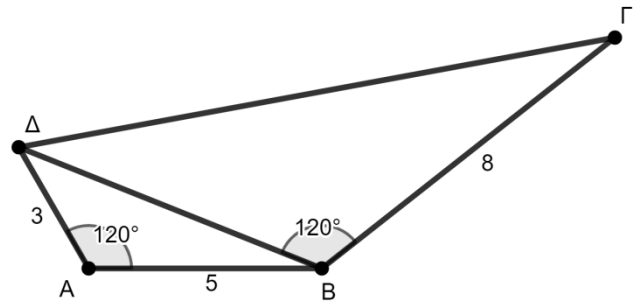


10.4 ΑΛΛΟΙ ΤΥΠΟΙ ΕΜΒΑΔΟΥ - 10.5 ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

ΘΕΜΑ 2 29784

Στο τετράπλευρο του παρακάτω σχήματος έχουμε για τις πλευρές $AB=5$, $BΓ=8$, $AD=3$ και για τις γωνίες $\widehat{DAB} = 120^\circ$ όπως και $\widehat{DBG} = 120^\circ$.

- Να δείξετε ότι το μήκος της BD είναι 7 μονάδες.
- Να υπολογίσετε το μήκος της GD .
- Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου GBD .



ΛΥΣΗ

α) Εφαρμόζουμε το νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ABD :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \sin(\widehat{DAB}).$$

Μετά από αντικατάσταση $BD^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ$ και στη συνέχεια μετά από πράξεις: $BD = 7$ μονάδες μήκους.

β) Εφαρμόζουμε το νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο DBG :

$$GD^2 = BG^2 + BD^2 - 2 \cdot BG \cdot BD \cdot \sin(\widehat{DBG}).$$

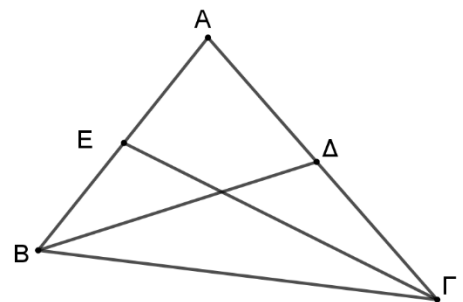
Μετά από αντικατάσταση $GD^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \sin 120^\circ$ και στη συνέχεια μετά από πράξεις: $GD = 13$ μονάδες μήκους.

γ) Για το τρίγωνο GBD ισχύει : $(GBD) = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot BG \cdot \sin(\widehat{DBG})$ δηλαδή, $(GBD) = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ = \frac{56\sqrt{3}}{4}$ τετραγωνικές μονάδες.

ΘΕΜΑ 2 21838

Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ με πλευρές $AB=8$, $AΓ=12$ και γωνία $\widehat{A} = 60^\circ$.

- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$ είναι $(ABΓ)=24\sqrt{3}$.
- Αν BD και $ΓΕ$ διάμεσοι του τριγώνου $ABΓ$, να αποδείξετε ότι :
 - Τα τρίγωνα $BEΓ$ και $AEΓ$ είναι ισοδύναμα.
 - Τα τρίγωνα $EBΓ$ και $ΔΓB$ είναι ισοδύναμα με $(EBΓ)=(ΔΓB)=12\sqrt{3}$



ΛΥΣΗ

α) Είναι $(ABΓ) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AΓ \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$.

- Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος του τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα. Αφού η $ΓΕ$ είναι διάμεσος του τριγώνου $ABΓ$, άρα $(BEΓ)=(AEΓ)$.

- ii. Αφού $(\text{ΒΕΓ})=(\text{ΑΕΓ})$ και $(\text{ΒΕΓ})+(\text{ΑΕΓ})=(\text{ΑΒΓ})$, άρα $(\text{ΒΕΓ})=\frac{1}{2}\cdot(\text{ΑΒΓ})=\frac{1}{2}\cdot 24\sqrt{3}=12\sqrt{3}$. Ομοίως αφού η ΒΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(\Delta \text{ΒΓ})=\frac{1}{2}\cdot(\text{ΑΒΓ})=12\sqrt{3}$, οπότε $(\Delta \text{ΒΓ})=(\text{ΕΒΓ})=12\sqrt{3}$.

ΘΕΜΑ 2 21196

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές $\beta = 8$ και $\gamma = 6$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ είναι $E = 24$

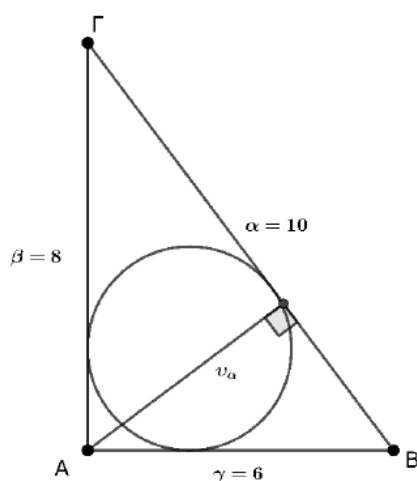
β) Να υπολογίσετε:

- Να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς α του τριγώνου ΑΒΓ.
- Το ύψος του u_α που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα α του τριγώνου.
- Την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ υπολογίζεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma$ όπου β και γ οι κάθετες πλευρές του, επομένως αντικαθιστώντας τα μήκη των πλευρών β και γ του τριγώνου έχουμε:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 24.$$



β)

i. Το μήκος της υποτείνουσας α του ορθογωνίου τριγώνου προσδιορίζεται με την βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος, επομένως:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \text{ άρα } \alpha = \sqrt{100} = 10.$$

ii. Το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \upsilon_{\alpha}$.

Αντικαθιστώντας την τιμή του εμβαδού $E = 24$ από το πρώτο ερώτημα και το μήκος της πλευράς $\alpha = 10$ στον παραπάνω τύπο προκύπτει:

$$24 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \upsilon_{\alpha} \text{ ή } \upsilon_{\alpha} = \frac{24}{5}.$$

iii. Αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου, τότε το εμβαδό του E είναι $E = \tau \cdot \rho$. Η ημιπερίμετρος τ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:

$$\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{10 + 8 + 6}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές του εμβαδού $E = 24$ και της ημιπεριμέτρου $\tau = 12$ στον τύπο $E = \tau \cdot \rho$ έχουμε:

$$24 = 12 \cdot \rho \text{ ή } \rho = 2.$$

ΘΕΜΑ 4 22380

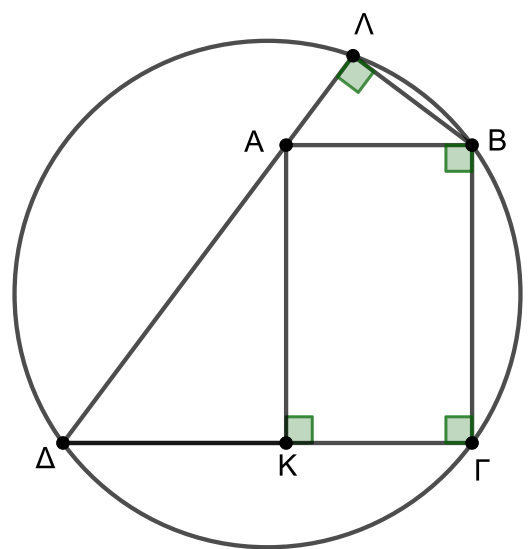
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ$ και $B\Gamma = 16$, $\Gamma\Delta = 22$ και $A\Delta = 20$. Έστω K η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία $\Gamma\Delta$ και Λ η προβολή του σημείου B πάνω στη ευθεία $A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- $K\Delta = 12$,
- το εμβαδόν του τριγώνου $AK\Delta$ είναι 96.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AK\Delta$ και $B\Lambda A$ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $B\Lambda A$.

γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $B\Gamma\Delta\Lambda$.



ΛΥΣΗ

α) i) Το τετράπλευρο $AB\Gamma K$ είναι ορθογώνιο αφού έχει τρεις ορθές γωνίες, άρα $AK = B\Gamma = 16$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AK\Delta$ ($\widehat{AK\Delta} = 90^\circ$), έχουμε

$$K\Delta^2 = A\Delta^2 - AK^2$$

$$K\Delta^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144 = 12^2$$

$$K\Delta = 12.$$

ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ είναι

$$(ΑΚΔ) = \frac{1}{2} ΚΔ \cdot ΑΚ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96.$$

β) Τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι ορθογώνια ($\widehat{ΑΚΔ} = \widehat{ΒΛΑ} = 90^\circ$) και έχουν

$\widehat{Δ} = \widehat{ΛΑΒ}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που τέμνονται από την ΛΔ. Άρα τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι όμοια.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι

$$\lambda = \frac{ΑΔ}{ΒΑ} \text{ ή } \lambda = \frac{20}{10} \text{ ή } \lambda = 2,$$

αφού ΒΑ = ΚΓ από το ορθογώνιο ΑΒΓΚ και ΚΓ = ΓΔ – ΚΔ = 22 – 12 = 10.

Επειδή τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = 2$, ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΚΔ και ΒΛΑ ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, άρα

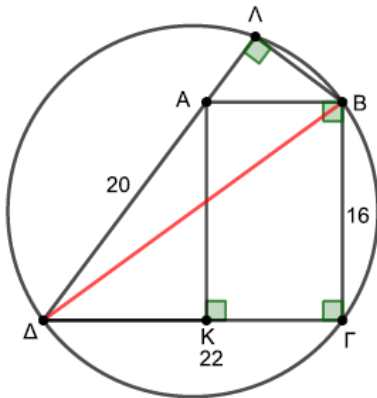
$$\frac{(ΑΚΔ)}{(ΒΛΑ)} = \lambda^2$$

$$\frac{96}{(ΒΛΑ)} = 2^2$$

$$(ΒΛΑ) = \frac{96}{4}$$

$$(ΒΛΑ) = 24.$$

γ) Φέρνουμε τη ΒΔ, η οποία είναι διάμετρος του παραπάνω κύκλου, αφού $\widehat{ΒΓΔ} = 90^\circ$.



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ ($\widehat{ΒΓΔ} = 90^\circ$), έχουμε

$$ΒΔ^2 = ΒΓ^2 + ΓΔ^2$$

$$ΒΔ^2 = 16^2 + 22^2 = 256 + 484 = 740 = 4 \cdot 185$$

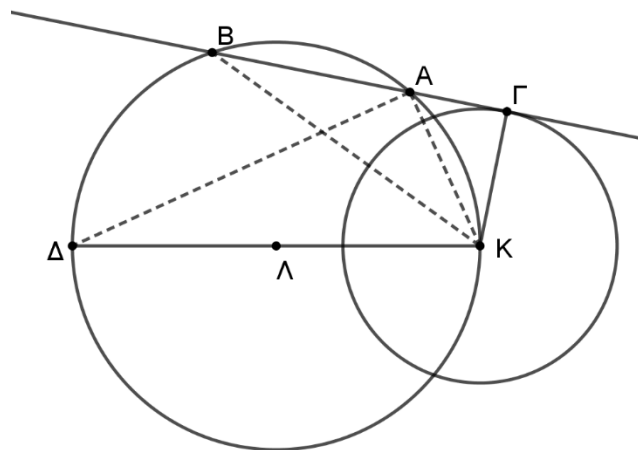
$$ΒΔ = 2\sqrt{185}.$$

Επομένως η διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΒΓΔΛ έχει μήκος

$$2\sqrt{185}.$$

ΘΕΜΑ 4 22568

Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο Λ και ακτίνα $R=10$, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο ενός άλλου κύκλου με κέντρο το σημείο K και ακτίνα $\rho=6$. Η εφαπτομένη του κύκλου (K,ρ) στο σημείο του Γ τέμνει τον κύκλο (Λ,R) στα σημεία A και B . Η προέκταση της $K\Lambda$ προς το Λ τέμνει τον κύκλο (Λ,R) στο σημείο Δ .

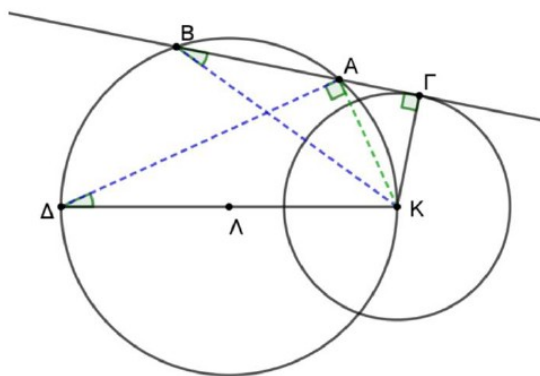


α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα τρίγωνα $K\Gamma B$ και $K\Delta A$ είναι όμοια.
- ii. $KA \cdot KB = 120$

β) Αν είναι $KB=15$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $A\Gamma K$.

ΛΥΣΗ



α)

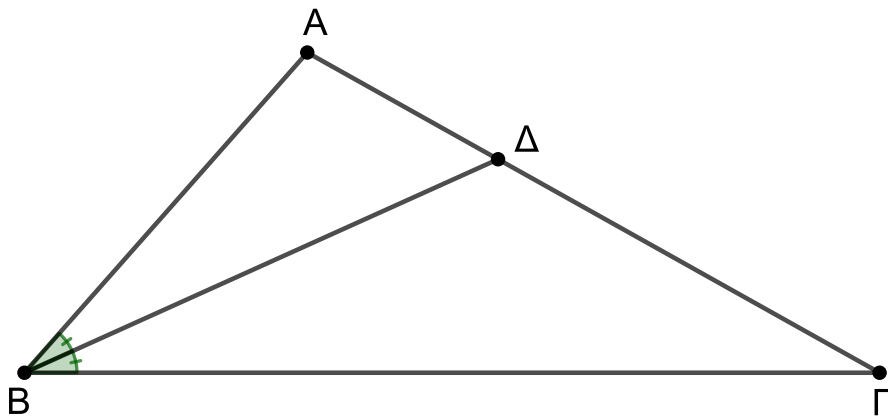
- i. Οι γωνίες $\widehat{K\Gamma B}$ και $\widehat{K\Delta A}$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες του κύκλου (Λ,R) που βαίνουν στο ίδιο τόξο KA , άρα είναι ίσες. Η ευθεία ΓB είναι εφαπτομένη του κύκλου (K,ρ) στο σημείο του Γ , επομένως η γωνία $\widehat{K\Gamma B}$ είναι ορθή. Η $K\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου (Λ,R) και η γωνία $\widehat{K\Delta A}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα είναι ορθή. Τα τρίγωνα $K\Gamma B$ και $K\Delta A$ έχουν $\widehat{K\Gamma B} = \widehat{K\Delta A}$ (ορθές) και $\widehat{K\Gamma B} = \widehat{K\Delta A}$, επομένως έχοντας δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.
- ii. Η $K\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου (Λ,R) , άρα $K\Delta = 2 \cdot R = 20$ και η $K\Gamma$ είναι ακτίνα του κύκλου (K,ρ) , άρα $K\Gamma = \rho = 6$. Εφόσον τα τρίγωνα $K\Gamma B$ και $K\Delta A$ είναι όμοια, έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή $\frac{K\Gamma}{KA} = \frac{KB}{K\Delta} = \frac{\Gamma B}{\Delta A}$. Από την ισότητα $\frac{K\Gamma}{KA} = \frac{KB}{K\Delta}$ έχουμε ότι

$$\frac{6}{KA} = \frac{KB}{20} \text{ ή } KA \cdot KB = 120.$$

β) Αφού είναι $KB=15$ και $KA \cdot KB = 120$ τότε $15 \cdot KA = 120$, άρα $KA=8$. Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $K\Delta A$ έχουμε $K\Gamma^2 + \Gamma A^2 = K\Delta^2$ ή $36 + \Gamma A^2 = 64$ ή $\Gamma A^2 = 28$ ή $\Gamma A = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$. Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $A\Gamma K$ είναι $(A\Gamma K) = \frac{K\Gamma \cdot AK}{2} = \frac{6 \cdot 2\sqrt{7}}{2} = 6\sqrt{7}$.

ΘΕΜΑ 4 22406

Στο παρακάτω σχήμα η ΒΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και επίσης είναι $B\Gamma = 2AB$.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΔ.

β) Να χωρίσετε το τρίγωνο ΑΒΓ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα.

γ) Έστω ότι $AB = 12$ και $\eta\mu B = \frac{3}{4}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 108.

ii. Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων ΔΒΓ και ΑΒΔ.

ΛΥΣΗ

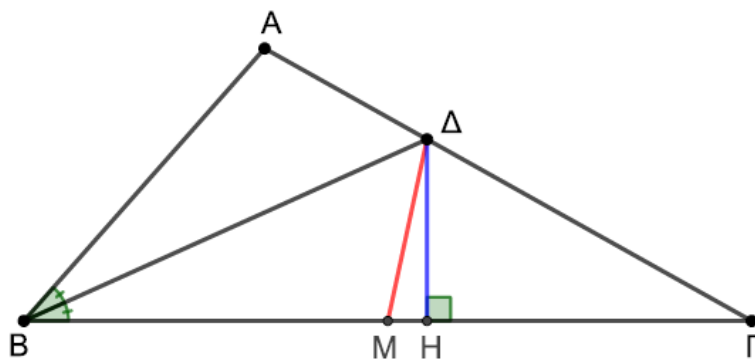
α) Στα τρίγωνα ΔΒΓ και ΑΒΔ, οι γωνίες $\widehat{DB\Gamma}$ και $\widehat{ABD}$ είναι ίσες, αφού η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα

$$\frac{(\Delta B\Gamma)}{(\Delta A\Delta)} = \frac{B\Delta \cdot B\Gamma}{B\Delta \cdot BA} = \frac{B\Gamma}{BA} = \frac{2BA}{BA} = 2, \text{ άρα } (\Delta B\Gamma) = 2(\Delta A\Delta).$$

β) Έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Τότε η διάμεσος ΔΜ του τριγώνου ΔΒΓ το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΜΓ, αφού αυτά έχουν ίσες βάσεις $MB = M\Gamma$ και κοινό ύψος το ΔΗ από την κορυφή Δ. Επομένως θα έχουμε

$$(\Delta MB) = (\Delta M\Gamma) = \frac{1}{2} (\Delta B\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 2(\Delta A\Delta) = (\Delta A\Delta), \text{ άρα}$$

$$(\Delta A\Delta) = (\Delta MB) = (\Delta M\Gamma).$$



γ)

i. Είναι $AB = 12$, $B\Gamma = 2AB = 2 \cdot 12 = 24$ και $\eta\mu B = \frac{3}{4}$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(\Delta B\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot BA \cdot \eta\mu B$

Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot BA \cdot \eta\mu B$

$$\text{ή } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 \cdot \frac{3}{4} \text{ ή } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 \cdot \frac{3}{4} = 108 \text{ ή } (AB\Gamma) = 108.$$

ii. Στο α) ερώτημα βρήκαμε ότι $(\Delta B\Gamma) = 2(\Delta B\Delta)$ και στο γ) i) $(AB\Gamma) = 108$.

Όμως $(\Delta B\Gamma) + (\Delta B\Delta) = (AB\Gamma)$, άρα $2(\Delta B\Delta) + (\Delta B\Delta) = (AB\Gamma)$ ή $3(\Delta B\Delta) = 108$

$$\text{ή } (\Delta B\Delta) = 36.$$

Επίσης θα είναι $(\Delta B\Gamma) = 2 \cdot 36 = 72$.

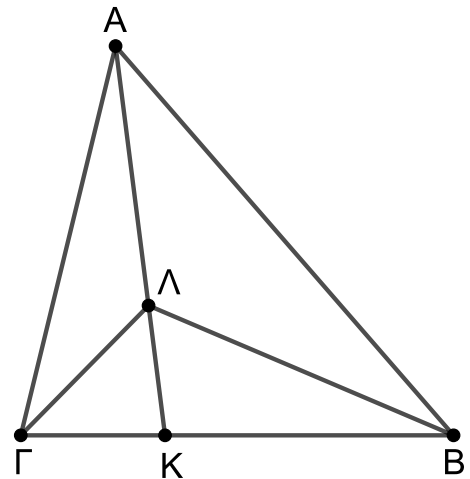
ΘΕΜΑ 4 22375

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην πλευρά $B\Gamma$ παίρνουμε σημείο K ώστε $KB = 2K\Gamma$ και στο ευθύγραμμο τμήμα AK παίρνουμε σημείο Λ ώστε $\Lambda A = 2\Lambda K$. Έστω E_1, E_2, E_3 και E_4 τα εμβαδά των τριγώνων $\Lambda\Lambda\Gamma$, $\Gamma\Lambda K$, $B\Lambda K$ και $\Lambda\Lambda B$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{E_1}{E_2} = 2$ και $\frac{E_4}{E_3} = 2$

ii. $E_1 = E_3$



β) Αν $E_1 = 10$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

ΛΥΣΗ

α) i) Δίνεται $\Lambda A = 2\Lambda K$.

Στα τρίγωνα $\Lambda\Lambda\Gamma$ και $\Gamma\Lambda K$, οι γωνίες $\widehat{\Lambda\Lambda\Gamma}$ και $\widehat{\Gamma\Lambda K}$ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\Lambda\Gamma \cdot \Lambda\Lambda}{\Lambda\Gamma \cdot \Lambda K} = \frac{\Lambda\Lambda}{\Lambda K} = \frac{2\Lambda K}{\Lambda K} = 2 \text{ ή } \frac{E_1}{E_2} = 2 \quad (1).$$

Στα τρίγωνα $\Lambda\Lambda B$ και $B\Lambda K$, οι γωνίες $\widehat{\Lambda\Lambda B}$ και $\widehat{B\Lambda K}$ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$$\frac{E_4}{E_3} = \frac{\Lambda B \cdot \Lambda\Lambda}{\Lambda B \cdot \Lambda K} = \frac{\Lambda\Lambda}{\Lambda K} = \frac{2\Lambda K}{\Lambda K} = 2 \text{ ή } \frac{E_4}{E_3} = 2 \quad (2).$$

ii) Δίνεται $KB = 2K\Gamma$.

Στα τρίγωνα $B\Lambda K$ και $\Gamma\Lambda K$ οι γωνίες $\widehat{K\Lambda B}$ και $\widehat{K\Lambda\Gamma}$ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$$\frac{E_3}{E_2} = \frac{ΚΛ \cdot ΚΒ}{ΚΛ \cdot ΚΓ} = \frac{ΚΒ}{ΚΓ} = \frac{2ΚΓ}{ΚΓ} = 2 \quad \text{ή} \quad \frac{E_3}{E_2} = 2 \quad (3).$$

Από τις (1) και (3) έχουμε

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_3}{E_2}, \text{ οπότε } E_1 = E_3 \quad (4).$$

β) Δίνεται $E_1 = 10$.

Από την (1) έχουμε

$$\frac{E_1}{E_2} = 2 \quad \text{ή} \quad \frac{10}{E_2} = 2 \quad \text{ή} \quad E_2 = 5.$$

Από την (4) έχουμε

$$E_3 = E_1 \quad \text{ή} \quad E_3 = 10.$$

Από την (2) έχουμε

$$\frac{E_4}{E_3} = 2 \quad \text{ή} \quad \frac{E_4}{10} = 2 \quad \text{ή} \quad E_4 = 20.$$

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$(ΑΒΓ) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \quad \text{ή} \quad (ΑΒΓ) = 10 + 5 + 10 + 20 = 45.$$

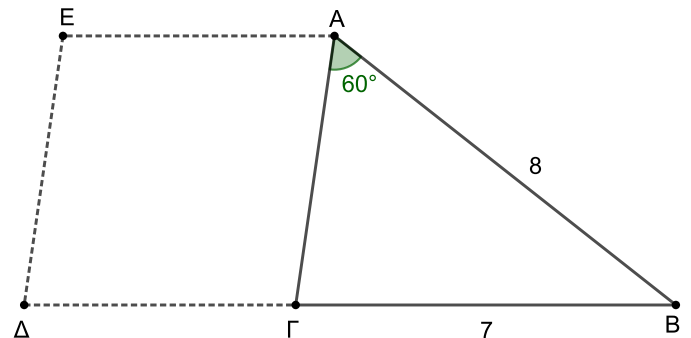
ΘΕΜΑ 4 22369

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = 8$, $ΒΓ = 7$

και $\widehat{Α} = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 3$ ή $ΑΓ = 5$.

β) Έστω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο όπως στο παρακάτω σχήμα.



i. Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 5$.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι $(ΑΒΓ) = 10\sqrt{3}$.

iii. Προεκτείνουμε τη ΒΓ κατά τμήμα $ΓΔ = ΑΓ$ και σχηματίζουμε τον ρόμβο ΑΓΔΕ.

Να βρείτε το εμβαδόν του ρόμβου ΑΓΔΕ.

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ΑΒ = 8$, $ΒΓ = 7$ και $\widehat{Α} = 60^\circ$, οπότε από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot \text{συν } Α$$

$$7^2 = 8^2 + ΑΓ^2 - 2 \cdot 8 \cdot ΑΓ \cdot \text{συν } 60^\circ$$

$$49 = 64 + ΑΓ^2 - 16 \cdot ΑΓ \cdot \frac{1}{2}$$

$$ΑΓ^2 - 8 \cdot ΑΓ + 15 = 0$$

$$ΑΓ = 3 \quad \text{ή} \quad ΑΓ = 5.$$

β) i) Στο τρίγωνο ABΓ είναι $AB = 8$, $BΓ = 7$ και $AΓ = 3$ ή $AΓ = 5$, άρα η μεγαλύτερη πλευρά του είναι η $AB = 8$, οπότε $AB^2 = 8^2 = 64$.

Αν $AΓ = 3$ θα είναι $AΓ^2 + BΓ^2 = 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$, οπότε

$AB^2 > AΓ^2 + BΓ^2$, άρα $\hat{\Gamma} > 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ABΓ είναι αμβλυγώνιο, άτοπο.

Αν $AΓ = 5$ θα είναι $AΓ^2 + BΓ^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$, οπότε

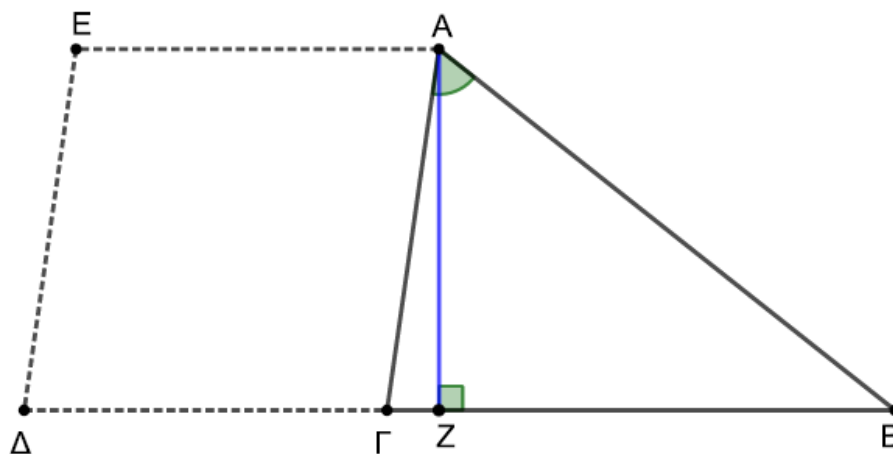
$AB^2 < AΓ^2 + BΓ^2$, άρα $\hat{\Gamma} < 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ABΓ είναι οξυγώνιο.

Επομένως $AΓ = 5$.

ii) Στο τρίγωνο ABΓ είναι $AB = 8$, $AΓ = 5$ και $\hat{A} = 60^\circ$, οπότε από τον τριγωνομετρικό τύπο του εμβαδού έχουμε

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot A\Gamma \cdot AB \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}.$$

iii) Έστω AZ το ύψος του τριγώνου ABΓ από την κορυφή A. Τότε αυτό θα είναι ύψος και του ρόμβου AΓΔΕ με αντίστοιχη βάση την ΓΔ. Είναι $ΓΔ = AΓ = 5$ επειδή το AΓΔΕ είναι ρόμβος.



Από το (β ii) είναι $(AB\Gamma) = 10\sqrt{3}$. Επειδή $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot AZ$ και $B\Gamma = 7$, θα έχουμε

$$\frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot AZ = 10\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot AZ = 10\sqrt{3}$$

$$AZ = \frac{20\sqrt{3}}{7}.$$

Επομένως το εμβαδόν του ρόμβου AΓΔΕ είναι

$$(A\Gamma\Delta E) = \Gamma\Delta \cdot AZ = 5 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{7} = \frac{100\sqrt{3}}{7}.$$

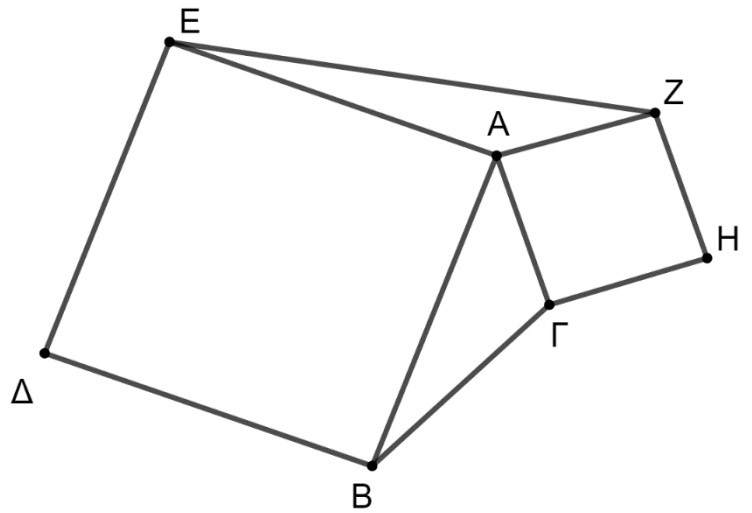
ΘΕΜΑ 4 21839

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $AB = 6$ cm και $AΓ = 3$ cm και $\hat{A}$ οξεία. Εξωτερικά του τριγώνου με πλευρές τις πλευρές AB και AΓ αντίστοιχα του τριγώνου ABΓ σχηματίζουμε τα τετράγωνα ABΔΕ και AΓΗΖ και φέρνουμε την ΕΖ, όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα.

β) Αν το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου ΕΖΗΓΒΔ είναι $(ΕΖΗΓΒΔ)=54\text{cm}^2$:

- Να αποδείξετε ότι η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\widehat{A}=30^\circ$.
- Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.



ΛΥΣΗ

α) Είναι $\widehat{B\hat{A}G} + \widehat{E\hat{A}Z} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ$ και άρα οι γωνίες ΒΑΓ και ΕΑΖ είναι παραπληρωματικές. Γνωρίζουμε όμως ότι αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των

γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα $\frac{(AB\Gamma)}{(E\Lambda Z)} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{AE \cdot AZ} = 1$ οπότε

$(AB\Gamma)=(E\Lambda Z)$.

β)

- Από το α) ερώτημα έχουμε ότι $(AB\Gamma)=(E\Lambda Z)$ και από υπόθεση είναι $(ΕΖΗΓΒΔ)=54$.

Είναι $(AB\Gamma)+(AB\Delta E)+(AEZ)+(A\Gamma HZ)=(ΕΖΗΓΒΔ)$ ή $(AB\Gamma)+36+(AB\Gamma)+9=54$ ή $2 \cdot (AB\Gamma)=9$

ή $(AB\Gamma)=\frac{9}{2}$ ή $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu\widehat{A}=\frac{9}{2}$ ή $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \eta\mu\widehat{A}=\frac{9}{2}$ ή $\eta\mu\widehat{A}=\frac{1}{2}$ και εφόσον η γωνία $\widehat{A}$ είναι

οξεία, έχουμε ότι $\widehat{A}=30^\circ$.

- Από νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2 \cdot AB \cdot A\Gamma \cdot \cos 30^\circ = 6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 45 - 18\sqrt{3}$$

Άρα το εμβαδόν του ζητούμενου τετραγώνου είναι $E=B\Gamma^2=45-18\sqrt{3}$.