

ΛΥΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 2 22512

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ABΓ έχουμε

$$AB^2 = AG^2 + BG^2 - 2 \cdot AG \cdot BG \cdot \sin \Gamma = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 12 ,$$

$$\text{άρα } AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} .$$

β) Έχουμε $BG^2 = 16$ και $AB^2 + AG^2 = 12 + 4 = 16$.

Επομένως $BG^2 = AB^2 + AG^2$, οπότε το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη BG.

$$\gamma) \text{ Επειδή } \hat{A} = 90^\circ \text{ έχουμε } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AG = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} .$$

ΘΕΜΑ 2 21302

ΛΥΣΗ

α) Το τρίγωνο ABD είναι ορθογώνιο με $\Delta = 90^\circ$ οπότε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ABD έχουμε:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \text{ ή } AD^2 = AB^2 - BD^2 \text{ ή } AD^2 = 5^2 - 3^2 \text{ ή } AD^2 = 16 \text{ ή } AD = 4 .$$

β) Το τρίγωνο AGD είναι ορθογώνιο με $\Delta = 90^\circ$ οπότε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο AGD έχουμε:

$$AG^2 = AD^2 + DG^2 \text{ ή } AG^2 = 4^2 + 8^2 \text{ ή } AG^2 = 16 + 64 \text{ ή } AG^2 = 80 \text{ ή } AG = \sqrt{80} .$$

γ) Για τις πλευρές του τριγώνου ABΓ έχουμε:

$$AB = 5 , BG = BD + DG = 3 + 8 = 11 \text{ και } AG = \sqrt{80} . \text{ Επίσης } BG^2 = 121 \text{ και } AG^2 = (\sqrt{80})^2 = 80 .$$

Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ABΓ είναι η BG, εφόσον $BG^2 > AG^2$.

Συνεπώς η $\hat{A}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου ABΓ, εφόσον βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά του BG.

Επιπλέον $AB^2 + AG^2 = 25 + 80 = 105$ και $BG^2 = 121$ οπότε είναι $BG^2 > AB^2 + AG^2$, άρα η γωνία

$\hat{A} > 90^\circ$ επομένως το τρίγωνο ABΓ είναι αμβλυγώνιο.

ΘΕΜΑ 2 17343

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο AGΔ ισχύει

$$AG^2 = AD^2 + GD^2 - 2AD \cdot GD \cdot \sin \hat{\Delta} .$$

Όμως $\Gamma\Delta = 5$, $A\Delta = 3$ και $\hat{\Delta} = 120^\circ$, άρα $A\Gamma^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos 120^\circ$ ή

$$A\Gamma^2 = 25 + 9 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \text{ ή } A\Gamma^2 = 49 \text{ ή } A\Gamma = 7.$$

Β) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2AB \cdot A\Gamma \cdot \cos \omega.$$

Όμως $AB = 5$, $B\Gamma = 8$ και $A\Gamma = 7$, άρα

$$8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos \omega \text{ ή } 64 = 74 - 70 \cos \omega \text{ ή } 70 \cos \omega = 10$$

$$\text{επομένως } \cos \omega = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}.$$

ΘΕΜΑ 4 22400

α)

i. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 9$, $A\Gamma = 12$ και $B\Gamma = 15$, άρα έχουμε

$$B\Gamma^2 = 15^2 = 225 \text{ και } AB^2 + A\Gamma^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225,$$

$$\text{άρα } B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2.$$

Επομένως από το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος είναι $\hat{A} = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

ii. Επειδή $\hat{A} = 90^\circ$, το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ορθογώνιο, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $\Delta E^2 = A\Delta^2 + A\Gamma^2$ ή $\Delta E^2 = 4^2 + 3^2$ ή $\Delta E^2 = 25$ ή $\Delta E^2 = 5^2$ ή $\Delta E = 5$.

β)

i. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 9$, $A\Gamma = 12$ και $B\Gamma = 10$, άρα έχουμε

$$A\Gamma^2 = 12^2 = 144 \text{ και } AB^2 + B\Gamma^2 = 9^2 + 10^2 = 81 + 100 = 181$$

άρα $A\Gamma^2 < AB^2 + B\Gamma^2$, οπότε $\hat{B} < 90^\circ$. Η οξεία γωνία $\hat{B}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$ αφού βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά την $A\Gamma$. Άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο και όχι ορθογώνιο.

ii. Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $A\Gamma B$ έχουν

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \quad \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad \text{και τη γωνία } \hat{A} \text{ κοινή,}$$

άρα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.

Άρα τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $A\Gamma B$ θα έχουν και τις τρίτες πλευρές ανάλογες με λόγο $\frac{1}{3}$.

$$\text{Επομένως } \frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{1}{3} \text{ ή } \frac{\Delta E}{10} = \frac{1}{3} \text{ ή } \Delta E = \frac{10}{3}.$$