

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

Να κάνετε τα 4 πρώτα θέματα

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5+\sqrt{5}}, B = \frac{1}{5-\sqrt{5}}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $A + B = \frac{1}{2}$

ii) $A \cdot B = \frac{1}{20}$

β) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού.

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) παίρνει τη μορφή:

$$\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0.$$

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2^{ου} βαθμού.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε:

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$,

ii) να βρείτε τον αριθμό λ .

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$.

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:

- i. Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$.
- ii. Να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ .

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2 - 14x + 8 = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad 8x^2 - 14x + 3 = 0 \quad (2).$$

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4),$$

με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$.

Να αποδείξετε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε

- i. $\rho \neq 0$.
- ii. $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (4).

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η εξίσωση: $x^4 - 8x - 9 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (1) \quad \text{με παραμέτρους } \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι αν $\gamma < 0$, τότε:

- i. $\beta^2 - 4\gamma > 0$.
- ii. Η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$ (1) με άγνωστο το x και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι η $\Delta = (2\lambda - 4)^2$.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ ο αριθμός $x = 2$ είναι λύση της εξίσωσης (1).