2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Στο Γυμνάσιο μάθαμε την έννοια της τετραγωνικής ρίζας μη αρνητικού αριθμού και τις ιδιότητές της. Συγκεκριμένα μάθαμε ότι:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

Για τις τετραγωνικές ρίζες μη αρνητικών αριθμών γνωρίσαμε τις παρακάτω ιδιότητες:

- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$
- $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η **ν-οστή ρίζα** ενός <u>μη αρνητικού</u> αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο <u>μη αρνητικός αριθμός</u>(1) που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α.

Επίσης γράφουμε

$$\sqrt[1]{\alpha} = \alpha \text{ και } \sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}.$$

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

Αν $\alpha \geq 0$, τότε η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$.

Ιδιότητες των ριζών

Από τον ορισμό της ν-οστής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού α, συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

- Αν $\alpha \geq 0$, τότε:

$$(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = \alpha \text{ και } \sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha.$$

- Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|.$$

Αν α, β ≥ 0, τότε:

1. $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$

2. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ (εφόσον $\beta\neq 0$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta} &\Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta})^{\nu}=(\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta})^{\nu}\\ &\Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu}\cdot(\sqrt[\nu]{\beta})^{\nu}=\alpha\cdot\beta\\ &\Leftrightarrow \alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\beta, \qquad \text{που ισχύει.}\end{aligned}$$

2. Αποδεικνύεται όπως και η 1.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν α και β είναι μη αρνητικοί αριθμοί, να αποδειχθεί η ισοδυναμία:

$$\boldsymbol{\alpha<\beta\Leftrightarrow\sqrt[\nu]{\alpha}<\sqrt[\nu]{\beta}.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\sqrt[\nu]{\alpha}<\sqrt[\nu]{\beta} &\Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu}<(\sqrt[\nu]{\beta})^{\nu}\\ &\Leftrightarrow \alpha<\beta\end{aligned}$$