

3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^n = a$

• Έστω η εξίσωση $x^3 = 8$. Όπως αναφέραμε στον ορισμό της n -οστής ρίζας μη αρνητικού αριθμού, η εξίσωση $x^3 = 8$ έχει ακριβώς μια θετική λύση, την $\sqrt[3]{8} = 2$. Η εξίσωση αυτή δεν έχει μη αρνητικές λύσεις, γιατί για κάθε $x \leq 0$ ισχύει $x^3 \leq 0$.

Επομένως η εξίσωση $x^3 = 8$ έχει ακριβώς μια λύση, την $\sqrt[3]{8}$.

Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^n = a$, με $a > 0$ και n περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση, την $\sqrt[n]{a}$.

• Έστω η εξίσωση $x^4 = 16$. Όπως και προηγουμένως η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια θετική λύση, την $\sqrt[4]{16} = 2$. Η εξίσωση αυτή όμως έχει ως λύση και την $-\sqrt[4]{16} = -2$, αφού $(-\sqrt[4]{16})^4 = (\sqrt[4]{16})^4 = 16$.

Επομένως η εξίσωση $x^4 = 16$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, την $\sqrt[4]{16} = 2$ και την $-\sqrt[4]{16} = -2$.

Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^n = a$, με $a > 0$ και n άρτιο φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις $\sqrt[n]{a}$ και $-\sqrt[n]{a}$.

• Έστω η εξίσωση $x^3 = -8$. Έχουμε διαδοχικά:

$$x^3 = -8 \Leftrightarrow -x^3 = 8 \Leftrightarrow (-x)^3 = 8 \Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2.$$

Επομένως η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια λύση, την $-\sqrt[3]{8} = -2$.

Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^n = a$, με $a < 0$ και n περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση, την $-\sqrt[n]{|a|}$.

• Έστω η εξίσωση $x^4 = -4$. Επειδή για κάθε x ισχύει $x^4 \geq 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη.

Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^n = a$, με $a < 0$ και n άρτιο φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη.

Από τα παραπάνω συμπεράσματα και από το γεγονός ότι η εξίσωση $x^v = a^v$, με $v \in \mathbb{N}^*$, έχει προφανή λύση τη $x = a$, προκύπτει ότι:

- Αν ο v περιττός, τότε η εξίσωση $x^v = a^v$ έχει μοναδική λύση, τη $x = a$.
- Αν ο v άρτιος, τότε η εξίσωση $x^v = a^v$ έχει δύο λύσεις, τις $x_1 = a$ και $x_2 = -a$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί η εξίσωση $x^4 + 8x = 0$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}x^4 + 8x &= 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 8) = 0 \\&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^3 = -8 \\&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -\sqrt[3]{8} = -2.\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^3 - 125 = 0$

ii) $x^5 - 243 = 0$

iii) $x^7 - 1 = 0$.

$$\begin{aligned}x^3 - 125 &= 0 \Leftrightarrow \\x^3 &= 125 \Leftrightarrow \\x &= \sqrt[3]{125} \Leftrightarrow \\x &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^5 - 243 &= 0 \Leftrightarrow \\x^5 &= 243 \Leftrightarrow \\x &= \sqrt[5]{243} \Leftrightarrow \\x &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^7 - 1 &= 0 \Leftrightarrow \\x^7 &= 1 \Leftrightarrow \\x &= \sqrt[7]{1} \Leftrightarrow \\x &= 1\end{aligned}$$

Για το επόμενο μάθημα:
Ασκ. Α' Ομάδας 2, 3, 4 (Σελ. 87)