

Στη συνέχεια θα επιλύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή με τη μέθοδο της «συμπλήρωσης του τετραγώνου».

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 && [\alpha \neq 0] \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x &= -\frac{\gamma}{\alpha} \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{\beta}{2\alpha} &= -\frac{\gamma}{\alpha} \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} &= -\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 &= \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2} \quad (2)$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\Delta > 0$, τότε έχουμε:

$$x + \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x + \frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

δηλαδή

$$x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Επομένως η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), έχει δύο λύσεις άνισες, τις:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Για συντομία οι λύσεις αυτές γράφονται

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}.$$

- Αν $\Delta = 0$, τότε η εξίσωση (2) γράφεται:

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) \cdot \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \quad \text{ή} \quad x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{\beta}{2\alpha}\end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση έχει **διπλή ρίζα** την $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

- Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), δεν έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή είναι **αδύνατη** στο $\mathbb{R}$.

Η αλγεβρική παράσταση $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, από την τιμή της οποίας εξαρτάται το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$, ονομάζεται **διακρίνουσα** αυτής.

Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$
$\Delta > 0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
$\Delta = 0$	Έχει μια διπλή ρίζα τη $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.
$\Delta < 0$	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Στην περίπτωση που η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1 , x_2 , έχουμε:

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$, τότε έχουμε τους τύπους:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = \frac{\gamma}{\alpha}$$

που είναι γνωστοί ως τύποι του Vieta.

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με τη βοήθεια των τύπων του Vieta, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0 \end{aligned}$$

Η τελευταία μορφή της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ μας δίνει τη δυνατότητα να την κατασκευάσουμε, όταν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.

Για το επόμενο μάθημα:
Ασκ. Α' Ομάδας 1 (σελ. 93)