35033

Δίνονται οι παραστάσεις $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$.

α) Αν $2 < x < 3$, να δείξετε ότι $A = 2x - 4$.

(Μονάδες 7)

β) Αν $2 < x < 3$, να δείξετε ότι $A + B = x - 1$.

(Μονάδες 9)

γ) Υπάρχει $x \in (2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $2 < x < 3$, οπότε $x > 2$, δηλαδή $2x > 4$, οπότε $2x - 4 > 0$.

Άρα:

$$A = |2x - 4| = 2x - 4.$$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε: $A = 2x - 4$.

Επίσης επειδή $2 < x < 3$, είναι $x < 3$, δηλαδή $x - 3 < 0$. Άρα $B = |x - 3| = 3 - x$.

Επομένως:

$$A + B = (2x - 4) + (3 - x) = x - 1.$$

γ) Είναι:

$$A + B = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3 \notin (2,3),$$

Επομένως, δεν υπάρχει $x \in (2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$.

14651

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4(\lambda + \frac{1}{\lambda})x + 16 = 0 \text{ όπου } \lambda > 0 \text{ .}$$

α) Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

(Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda > 0$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Από τους τύπους για το άθροισμα και γινόμενο των ριζών εξίσωσης 2^{ου} βαθμού έχουμε :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4(\lambda + \frac{1}{\lambda})}{1} = 4(\lambda + \frac{1}{\lambda}) \text{ και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{16}{1} = 16$$

Αφού $P = x_1 \cdot x_2 = 16 > 0$ και $S = x_1 + x_2 = 4(\lambda + \frac{1}{\lambda}) > 0$ για κάθε $\lambda > 0$, οι ρίζες x_1, x_2 είναι θετικές και άρα μπορούν να αποτελούν πλευρές ορθογωνίου.

i. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 4(\lambda + \frac{1}{\lambda}) = 8(\lambda + \frac{1}{\lambda})$$

ii. Το εμβαδόν είναι: $\mathrm{E} = x_1 \cdot x_2 = 16$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\Pi \geq 16 \Leftrightarrow$$
$$8\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right) \geq 16 \Leftrightarrow$$
$$\lambda+\frac{1}{\lambda} \geq 2 \Leftrightarrow$$
$$\lambda+\frac{1}{\lambda}-2 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{\lambda^2-2\lambda+1}{\lambda} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda} \geq 0$$, που ισχύει για κάθε $\lambda > 0$.

γ) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\Pi = 16 \Leftrightarrow$$
$$\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda = 1$$

Για $\lambda = 1$ η περίμετρος είναι 16 (δηλαδή $2(x_1+x_2)=16$ και τελικά $x_1+x_2=8$) και το εμβαδόν είναι 16 (δηλαδή $x_1 \cdot x_2 = 16$), οπότε $x_1 = x_2 = 4$. Επομένως το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.