33889

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2 - 14x + 8 = 0 \quad (1)$$

και

$$8x^2 - 14x + 3 = 0 \quad (2)$$

(Μονάδες10)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \qquad \text{και} \qquad \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4),$$

με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$.

Να αποδείξετε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i. $\rho \neq 0$.

(Μονάδες 5)

ii. $\dfrac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (4).

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $3x^2 - 14x + 8$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 196 - 96 = 100 > 0$, οπότε η εξίσωση $3x^2 - 14x + 8 = 0$ έχει δυο ρίζες άνισες, τις

$x_1 = \dfrac{-(-14) + \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \dfrac{14+10}{6} = 4$ και

$x_2 = \dfrac{-(-14) - \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \dfrac{14-10}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Το τριώνυμο $8x^2-14x+3$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-14)^2-4\cdot 8\cdot 3=196-96=100>0$, οπότε η εξίσωση $8x^2-14x+3=0$ έχει δυο ρίζες άνισες, τις

$x_1=\dfrac{-(-14)+\sqrt{100}}{2\cdot 8}=\dfrac{14+10}{16}=\dfrac{24}{16}=\dfrac{3}{2}$ και

$x_2=\dfrac{-(-14)-\sqrt{100}}{2\cdot 8}=\dfrac{14-10}{16}=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$.

β) Ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει: $\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma=0$. (5)

i. Εάν $\rho=0$, τότε από την σχέση (5) προκύπτει $\gamma=0$, άτοπο, αφού $\alpha\cdot\gamma\neq 0$. Άρα $\rho\neq 0$.

ii. Ο $\dfrac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (4) αν και μόνο αν $\gamma\left(\dfrac{1}{\rho}\right)^2+\beta\cdot\dfrac{1}{\rho}+\alpha=0 \overset{(\cdot\rho^2)}{\Leftrightarrow} \gamma+\beta\rho+\alpha\rho^2=0$, που ισχύει λόγω της σχέσης (5).

34322

Μια υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που προκύπτει από τη σχέση:

$$\lambda = (2x+5)^2 - 8x \qquad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός x είναι ο -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος αριθμός λ;

(Μονάδες 4)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός λ είναι ο 20, ποιος είναι ο εισαγόμενος αριθμός x;

(Μονάδες 6)

γ)

i. Να δείξετε ότι η σχέση (1) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στη μορφή:

$$4x^2 + 12x + (25-\lambda) = 0.$$

(Μονάδες 2)

ii. Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5.

(Μονάδες 6)

iii. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές που μπορεί να έχει ο εξαγόμενος αριθμός λ.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Αντικαθιστούμε στην δοθείσα ισότητα $x = -5$ και βρίσκουμε:

$$\lambda = (2\cdot(-5)+5)^2 - 8\cdot(-5) =$$
$$= (-10+5)^2 + 40 = (-5)^2 + 40 =$$
$$= 25 + 40 = 65.$$

β) Αντικαθιστούμε στην δοθείσα ισότητα $\lambda = 20$ και έχουμε:

$$20 = (2x+5)^2 - 8x$$

ή ισοδύναμα

$$20 = 4x^2 + 20x + 25 - 8x$$

και τελικά

$$4x^2 + 12x + 5 = 0.$$

Το τριώνυμο $4x^2 + 12x + 5$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 144 - 80 = 64 > 0$$

και ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 8}{8} = \begin{cases} \dfrac{-12+8}{8} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-12-8}{6} = -\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

γ)

i. Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$\lambda = (2x+5)^2 - 8x \Leftrightarrow \lambda = 4x^2 + 20x + 25 - 8x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0 \qquad (2)$$

ii. Για να μπορεί ο εξαγόμενος αριθμός λ να είναι 5, με βάση τη σχέση (2) θα πρέπει να υπάρχει x τέτοιος ώστε:

$$4x^2 + 12x + (25 - 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 5 = 0.$$

Το τριώνυμο $x^2 + 3x + 5$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 9 - 20 = -11 < 0$. Άρα, η τελευταία εξίσωση είναι αδύνατη. Οπότε, για καμία τιμή του x δεν μπορεί ο εξαγόμενος αριθμός λ να είναι 5.

iii. Οι δυνατές τιμές που μπορεί να έχει ο αριθμός λ, είναι αυτές για τις οποίες η εξίσωση (2) έχει πραγματικές ρίζες. Αυτό ισχύει αν και μόνο αν $\Delta \geq 0$ όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $4x^2 + 12x + (25 - \lambda)$. Οπότε, ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot (25 - \lambda) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 144 - 400 + 16\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$16\lambda \geq 256 \Leftrightarrow \lambda \geq 16.$$