5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με **λ** και τον λέμε **λόγο της προόδου**.
Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) υποθέτουμε πάντα ότι $\alpha_1 \neq 0$, οπότε, αφού είναι και $\lambda \neq 0$, ισχύει $\boldsymbol{\alpha_\nu \neq 0}$ **για κάθε** $\boldsymbol{\nu \in \mathbb{N}^*}$. Επομένως, η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda$$

Ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

Γεωμετρικός μέσος

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, τότε ισχύει

$$\frac{\beta}{\alpha} = \lambda \ \text{ και } \ \frac{\gamma}{\beta} = \lambda, \quad \text{επομένως} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \ \text{ ή } \ \beta^2 = \alpha\gamma$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$, τότε έχουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$, που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου. Ο θετικός αριθμός $\sqrt{\alpha\gamma}$ λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των α και γ.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου

Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι $S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το νº όρο των αριθμητικών προόδων:

i) 7, 10, 13, … **ii)** 11, 13, 15, … **iii)** 5, 2, −1, …

iv) 2, $\frac{5}{2}$, 3, … **v)** −6, −9, −12, …

1. i) $\alpha_\nu = 7 + (\nu - 1)\cdot 3 = 3\nu + 4$

ii) $\alpha_\nu = 11 + (\nu - 1)2 = 2\nu + 9$

iii) $\alpha_\nu = 5 + (\nu - 1)(-3) = -3\nu + 8$

iv) $\alpha_\nu = 2 + (\nu - 1)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\nu + \frac{3}{2}$

v) $\alpha_\nu = -6 + (\nu - 1)(-3) = -3\nu - 3.$

2. Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμιά από τις αριθμητικές προόδους:

i) Τον α_{15} της −2, 3, 8, … **ii)** Τον α_{20} της 11, 18, 25, …

iii) Τον α_{30} της 4, 15, 26, … **iv)** Τον α_{35} της 17, 25, 33, …

v) Τον α_{50} της 1, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, … **vi)** Τον α_{47} της $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, 2, …

2. i) $\alpha_{15} = -2 + (15 - 1)\cdot 5 = 68$

ii) $\alpha_{20} = 11 + (20 - 1)\cdot 7 = 144$

iii) $\alpha_{30} = 4 + (30 - 1)\cdot 11 = 323$

iv) $\alpha_{35} = 17 + (35 - 1)\cdot 8 = 289$

v) $\alpha_{50} = 1 + (50 - 1)\cdot\frac{2}{3} = \frac{101}{3}$

vi) $\alpha_{47} = \frac{1}{2} + (47 - 1)\cdot\frac{3}{4} = 35$.

3. **i)** Αν ο $6^{\text{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι 12 και ο $10^{\text{ος}}$ όρος είναι 16, να βρείτε τον $1^{\text{ο}}$ όρο και τη διαφορά της προόδου.

ii) Ομοίως, αν είναι $\alpha_5 = 14$ και $\alpha_{12} = 42$.

iii) Ομοίως, αν είναι $\alpha_3 = 20$ και $\alpha_7 = 32$.

3. i) Έχουμε $\alpha_6 = \alpha_1 + 5\omega$, επομένως $\alpha_1 + 5\omega = 12$ και $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega$, επομένως $\alpha_1 + 9\omega = 16$.

Λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 + 5\omega = 12 \\ \alpha_1 + 9\omega = 16 \end{cases}$

βρίσκουμε $\boldsymbol{\omega = 1}$ και $\boldsymbol{\alpha_1 = 7}$.

ii) Ομοίως έχουμε $\begin{cases} \alpha_1 + 4\omega = 14 \\ \alpha_1 + 11\omega = 42 \end{cases}$

και από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\omega = 4 \text{ και } \alpha_1 = -2.}$$

iii) Ομοίως έχουμε $\begin{cases} \alpha_1 + 2\omega = 20 \\ \alpha_1 + 6\omega = 32 \end{cases}$

και από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\omega = 3 \text{ και } \alpha_1 = 14.}$$