

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{x^2}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1}.$$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$. Με αυτό τον περιορισμό έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{x-1} - 1 &= \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1) \frac{x^2}{x-1} - (x-1) = (x-1) \frac{1}{x-1} \\ &\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0, \text{ αφού } x \neq 1.\end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η εξίσωση

$$|2x - 1| = |x + 3|.$$

ΛΥΣΗ

Από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών έχουμε:

$$|2x - 1| = |x + 3| \Leftrightarrow 2x - 1 = x + 3 \text{ ή } 2x - 1 = -(x + 3)$$

Όμως:

$$\checkmark \quad 2x - 1 = x + 3 \Leftrightarrow 2x - x = 4 \Leftrightarrow x = 4$$

$$\checkmark \quad 2x - 1 = -(x + 3) \Leftrightarrow 2x + x = -3 + 1 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}.$$

Επομένως η εξίσωση έχει δυο λύσεις, τους αριθμούς 4 και $-\frac{2}{3}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Να λυθεί η εξίσωση

$$|2x - 3| = 3x - 2.$$

ΛΥΣΗ

Επειδή το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι μη αρνητικό, για να έχει λύση η εξίσωση αυτή πρέπει και το δεύτερο μέλος της να είναι μη αρνητικό. Δηλαδή, πρέπει:

$$3x - 2 \geq 0 \quad (1)$$

Με αυτό τον περιορισμό, λόγω των ιδιοτήτων των απόλυτων τιμών, έχουμε:

$$\begin{aligned} |2x - 3| = 3x - 2 &\Leftrightarrow 2x - 3 = 3x - 2 && \text{ή} && 2x - 3 = 2 - 3x \\ &\Leftrightarrow 2x - 3x = -2 + 3 && \text{ή} && 2x + 3x = 2 + 3 \\ &\Leftrightarrow -x = 1 && \text{ή} && 5x = 5 \\ &\Leftrightarrow x = -1 && \text{ή} && x = 1 \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω λύσεις δεκτή είναι μόνο η $x = 1$, διότι μόνο αυτή ικανοποιεί τον περιορισμό (1).

Για το επόμενο μάθημα: Ασκ. Α' Ομάδας 9, 10, 11 (σελ. 84)