

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (5 - \sqrt{2})x + 6 - 3\sqrt{2} = 0$.

i) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (1 + \sqrt{2})^2$.

ii) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι 3 και $2 - \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \text{i) } \Delta &= [-(5 - \sqrt{2})]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (6 - 3\sqrt{2}) = (5 - \sqrt{2})^2 - 24 + 12\sqrt{2} \\ &= 25 - 10\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - 24 + 12\sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = (1 + \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } x_{1,2} &= \frac{(5 - \sqrt{2}) \pm (1 + \sqrt{2})}{2} \\ x_1 &= \frac{5 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}}{2} = \frac{6}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

4. Αν ο αριθμός ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, να δείξετε ότι ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι η ρίζα της εξίσωσης $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$.

Αν το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ισχύει $\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$.

Είναι $\rho \neq 0$, αφού $\gamma \neq 0$, οπότε έχουμε

$$\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta\frac{1}{\rho} + \gamma\frac{1}{\rho^2} = 0 \Leftrightarrow \gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \beta\left(\frac{1}{\rho}\right) + \alpha = 0$$

που σημαίνει ότι το $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$.

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x + \frac{1}{a} = a + \frac{1}{x}, \quad a \neq 0$

$x \neq 0$

$$ax \cdot x + \cancel{ax} \frac{1}{\cancel{a}} = ax \cdot a + a \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} \Leftrightarrow$$

$$ax^2 + x = a^2x + a \Leftrightarrow$$

$$\underline{ax^2} + \underline{x} - \underline{a^2x} - \underline{a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$ax(x-a) + (x-a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-a)(ax+1) = 0$$

$$\begin{cases} x-a=0 \\ \quad \quad \quad \checkmark \\ ax+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ \quad \quad \quad \checkmark \\ x=-\frac{1}{a} \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha, \beta \neq 0.$$

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x} &= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\beta x \frac{x}{\alpha} + \alpha\beta x \frac{\alpha}{x} = \alpha\beta x \frac{\alpha}{\beta} + \alpha\beta x \frac{\beta}{\alpha} \\ &\Leftrightarrow \beta x^2 + \alpha^2 \beta = \alpha^2 x + \beta^2 x \Leftrightarrow \beta x^2 - \beta^2 x + \alpha^2 \beta - \alpha^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta x(x - \beta) + \alpha^2(\beta - x) = 0 \Leftrightarrow (x - \beta)(\beta x - \alpha^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad \beta x = \alpha^2 \Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad x = \frac{\alpha^2}{\beta}. \end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς β και $\frac{\alpha^2}{\beta}$.

**Για το επόμενο μάθημα: Ασκήσεις από τράπεζα θεμάτων:
35100, 34161, 34327, 34544**