

35100

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2 + 10x = 12$.

(Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$.

(Μονάδες 10)

α) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{aligned} -2x^2 + 10x - 12 &= 0 \stackrel{:(-2)}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Για $\alpha = 1$, $\beta = -5$ και $\gamma = 6$, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

β) Πρέπει:

$$x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2.$$

Τότε ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2x^2 + 10x - 12 &= 0 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ή } x = 2) \end{aligned}$$

Η ρίζα $x = 2$ απορρίπτεται λόγω του περιορισμού.

Τελικά η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x = 3$.

34161

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$.

(Μονάδες 12)

β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$.

(Μονάδες 13)

α) Είναι:

$$\begin{aligned}|2x - 1| = 3 &\Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \text{ ή } 2x - 1 = -3 \\&\Leftrightarrow 2x = 4 \text{ ή } 2x = -2 \\&\Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -1\end{aligned}$$

β) Είναι $\alpha = -1$ και $\beta = 2$. Τότε η εξίσωση γράφεται:

$$-x^2 + 2x + 3 = 0.$$

Για $\alpha = -1$, $\beta = 2$ και $\gamma = 3$, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16 > 0.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{2}{-2} = -1 \\ \frac{-6}{-2} = 3 \end{cases}$$

34327

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1)

(Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 7)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β .

(Μονάδες 8)

α) Το τριώνυμο $x^2 - 3x - 4$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $\gamma = -4$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}.$$