

8. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x(x^2 - 1) - x^3 + x^2 = 0$

ii) $(x + 1)^2 + x^2 - 1 = 0.$

$$\begin{aligned}\text{i)} \quad & x(x^2 - 1) - x^3 + x^2 \Leftrightarrow \\ & x^3 - x - x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow \\ & x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \\ & x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ & x = 0 \text{ ή } x = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ii)} \quad & (x + 1)^2 + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ & x^2 + 2x + 1 + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ & 2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \\ & 2x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ & \{x = 0 \text{ ή } x + 1 = 0\} \Leftrightarrow \\ & \{x = 0 \text{ ή } x = -1\}\end{aligned}$$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

$$\begin{aligned}\text{i)} \quad & x(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow \\ & x(x - 2)^2 = (x - 2)^2 \Leftrightarrow \\ & x(x - 2)^2 - (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ & (x - 2)^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ & \{x - 2 = 0 \text{ ή } x - 1 = 0\} \Leftrightarrow \\ & \{x = 2 \text{ ή } x = 1\}\end{aligned}$$

ii) $(x^2 - 4)(x - 1) = (x^2 - 1)(x - 2)$

$$\begin{aligned}\text{ii)} \quad & (x^2 - 4)(x - 1) = (x^2 - 1)(x - 2) \Leftrightarrow \\ & (x - 2)(x + 2)(x - 1) = (x - 1)(x + 1)(x - 2) \Leftrightarrow \\ & (x - 2)(x + 2)(x - 1) - (x - 1)(x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \\ & (x - 2)(x - 1)[(x + 2) - (x + 1)] = 0 \Leftrightarrow \\ & (x - 2)(x + 1)(x + 2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ & (x - 2)(x + 1) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \\ & \{x - 2 = 0 \text{ ή } x + 1 = 0\} \Leftrightarrow \\ & \{x = 2 \text{ ή } x = -1\}\end{aligned}$$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i)} \quad \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x^2-x}$$

i) Για $x \neq 0$ και $x \neq 1$ έχουμε:

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x^2-x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)} \Leftrightarrow$$

$$x(x-1) \frac{x}{x-1} = x(x-1) \frac{1}{x(x-1)} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Από τις οποίες είναι δεκτή μόνο η $x = -1$

$$\text{ii)} \quad \frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0.$$

$$\text{ii)} \quad \frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

Για $x \neq 1$ και $x \neq -1$ έχουμε:

$$\frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 \frac{1}{(x-1)} + (x-1)^2 \frac{2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x-1+2=0 \Leftrightarrow$$

$$x+1=0 \Leftrightarrow$$

$x = -1$ η οποία απορρίπτεται.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.