

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να λυθεί η εξίσωση:

$$x^2 - 2|x| - 3 = 0.$$

ΛΥΣΗ

Επειδή $x^2 = |x|^2$, η εξίσωση γράφεται:

$$|x|^2 - 2|x| - 3 = 0.$$

Αν θέσουμε $|x| = \omega$, τότε η εξίσωση γίνεται

$$\omega^2 - 2\omega - 3 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τις $\omega_1 = 3$ και $\omega_2 = -1$. Από αυτές δεκτή είναι μόνο η θετική, αφού $\omega = |x| \geq 0$. Επομένως $|x| = 3$, που σημαίνει $x = -3$ ή $x = 3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{2x^2+x-1}{x^2-x}$$

ΛΥΣΗ

Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $x - 1 \neq 0$ και $x^2 - x \neq 0$, δηλαδή $x \neq 0$ και $x \neq 1$. Με αυτούς τους περιορισμούς του x έχουμε:

$$\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{2x^2+x-1}{x^2-x} \Leftrightarrow x(x-1) \frac{3x-1}{x-1} - x(x-1) \frac{2}{x} = x(x-1) \frac{2x^2+x-1}{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow x(3x-1) - (x-1)2 = 2x^2+x-1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$. Από αυτές, λόγω του περιορισμού, δεκτή είναι μόνο η $x_2 = 3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Να λυθεί η εξίσωση:

$$2x^4 - 7x^2 - 4 = 0 \quad (1)$$

ΛΥΣΗ

Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται:

$$2y^2 - 7y - 4 = 0 \quad (2)$$

Η εξίσωση $2y^2 - 7y - 4 = 0$ έχει ρίζες τις $y_1 = 4$ και $y_2 = -\frac{1}{2}$. Επειδή $y = x^2 \geq 0$, δεκτή είναι μόνο η $y_1 = 4$.

Επομένως, οι ρίζες της (1) είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 = 4$, δηλαδή οι $x_1 = -2$ και $x_2 = 2$.

**Για το επόμενο μάθημα: ασκ. Α' ομάδας
11, 12, 14, 15 (σελ. 94)**