

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η εξίσωση:

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0.$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (1) \quad \text{με παραμέτρους } \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι αν $\gamma < 0$, τότε:

i. $\beta^2 - 4\gamma > 0.$

(Μονάδες 3)

ii. Η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Θέτοντας στην εξίσωση $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ όπου $x^2 = u \geq 0$, γίνεται:

$$u^2 - 8u - 9 = 0.$$

Το τριώνυμο έχει $\alpha = 1, \beta = -8, \gamma = -9$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 64 + 36 = 100 > 0.$$

Οι ρίζες του είναι οι:

$$u_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{100}}{2} = \begin{cases} \frac{8+10}{2} = \frac{18}{2} = 9 > 0 \text{ δεκτή} \\ \frac{8-10}{2} = \frac{-2}{2} = -1 < 0 \text{ απορρίπτεται} \end{cases}.$$

Όμως έχουμε $x^2 = u \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3.$

β) Όπως και στο ερώτημα α), η εξίσωση $x^4 - \beta x^2 + \gamma = 0$, αν θέσουμε όπου $x^2 = u$ με $u \geq 0$, ισοδύναμα γίνεται:

$$u^2 + \beta u + \gamma = 0.$$

i. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$, με:

$$\beta^2 \geq 0 \text{ και}$$

$$\gamma < 0 \text{ οπότε } -\gamma > 0.$$

Συνεπώς, $\Delta > 0$ ως άθροισμα ενός μη αρνητικού και ενός θετικού αριθμού.

ii. Επειδή $\Delta > 0$ το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες u_1, u_2 . Από τους τύπους Vieta το γινόμενο των ριζών είναι $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \gamma < 0$. Άρα, οι ρίζες είναι μη μηδενικές και

ετερόσημες. Έστω $\begin{cases} u_1 < 0, \text{ απορρίπτεται} \\ u_2 > 0 \text{ δεκτή} \end{cases}$.

Τότε έχουμε:

$$x^2 = u_2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{u_2}.$$

Β' τρόπος

$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$$

$$\bullet \text{ για } \beta > 0: -b - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma} < 0$$

$$-b + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma} > 0$$

$$\alpha \text{ γὰρ: } \gamma < 0 \Leftrightarrow -4\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma > \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\beta^2 - 4\gamma} > \sqrt{\beta^2} \stackrel{\beta \geq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{\beta^2 - 4\gamma} > \beta \Leftrightarrow$$

$$-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma} > 0$$

$$\bullet \text{ για } \beta < 0 \quad -\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma} < 0$$

$$\alpha \text{ γὰρ: } \gamma < 0 \Leftrightarrow -4\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma > \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\beta^2 - 4\gamma} > \sqrt{\beta^2} \Leftrightarrow \sqrt{\beta^2 - 4\gamma} > -\beta \Leftrightarrow$$

$$-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma} < 0$$

$$-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma} > 0$$

Άρα, και στις 2 περιπτώσεις η μία από τις

δύο ρίζες της $u^2 - 8u - 9 = 0$ είναι αρνητική

και η άλλη θετική. Άρα η μία απορρίπτεται.

Από τη θετική ρίζα της εξίσωσης $u^2 - 8u - 9 = 0$

Προκύπτουν δύο τιμές για το x .

37181

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0, (1)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ .

(Μονάδες 13)

β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0, (1)$ έχει λύση το 1, ισχύει ότι:

$$1^2 - (\lambda - 1) \cdot 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda + 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 8 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8.$$

β) Για $\lambda = 2$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2 - (2 - 1)x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 6 = 0.$$

Η διακρίνουσα, με $\alpha=1, \beta=-1, \gamma=6$, γίνεται:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 - 24 = -23 < 0$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες για $\lambda = 2$.

**Για το επόμενο μάθημα ασκήσεις από τράπεζα θεμάτων:
14577, 34150, 34154**