Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ)
Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

Εκφωνήσεις

2024-2025

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου / Δημήτρης Πατσιμάς / Νίκος Τούντας

www.Askisopolis.gr

Τα θέματα προέρχονται από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

Πραγματικοί αριθμοί

Οι πράξεις των πραγματικών αριθμών και οι ιδιότητές τους

Θέμα 2ο

12685. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$ ισχύει ότι: $(\alpha+\beta)\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=4$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=2$ **β)** $\alpha=\beta$

13088. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί.
Ορίζουμε $A=2(x+y)^2-(x-y)^2-6xy-y^2$.
α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2$.
β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

13053. Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: **i.** $\beta+\gamma=-\alpha$. **ii.** $\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha$

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}$, $\dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=0.$$

13472. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2=2\alpha+\beta$ και $\beta^2=2\beta+\alpha$.
α) Να αποδείξετε ότι: **i.** $\alpha^2-\beta^2=\alpha-\beta$. **ii.** $\alpha+\beta=1$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\alpha^2+\beta^2$.

14458. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x+4y)(x+y)=9xy \ .$$

α) Να αποδείξετε ότι: **i)** $(2y-x)^2=0$ **ii)** $y=\dfrac{x}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y-\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\dfrac{x}{2}\right)^2=10y^2$.

14473. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\dfrac{4x+5y}{x-4y}=-2$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y=2x$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A=\dfrac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$.

14489.Αν οι αριθμοί $2\alpha-1$ και $\beta-1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha\neq 1$ και $\beta\neq 1$ να δείξετε ότι:

α) $2\alpha+\beta=2\alpha\beta$.

β) Οι αριθμοί $x=\alpha-\beta$ και $y=\alpha(1-2\beta)+2\beta$ είναι αντίθετοι.

14555. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x,y ισχύει η σχέση $(x-2y)^2-2(3-2xy)=5y^2-1$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x^2-y^2=5$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P=(x+y)^3(x-y)^3$.

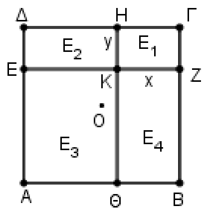
35388. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ με $\beta\neq 0$ και $\delta\neq\gamma$ ώστε να ισχύουν: $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4$ και $\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$.

Θέμα 4ο

15052. Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες ΕΖ και ΗΘ είναι παράλληλες στις πλευρές του. Αν $KZ=x$ και $KH=y$, $x,\ y\in(0,\ 6)$, τότε:



α) Να υπολογίσετε τα $E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4$ με τη βοήθεια των $x,\ y$.

β) Να βρείτε τα εμβαδά $E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4$ των τεσσάρων ορθογωνίων του σχήματος όταν $x=4$ και $y=2$.

γ) Αν επιπλέον ισχύει $E_1+E_3=E_2+E_4$, να αποδείξετε ότι:

i. $xy+9=3(x+y)$.

ii. Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα ΕΖ και ΗΘ διέρχεται από το κέντρο Ο του τετραγώνου.

Θέμα 3ο

14329.Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A=\frac{-\alpha}{\beta}$, $B=\alpha^2$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α , β οι αλγεβρικές παραστάσεις Α,Β είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0.

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί Α,Β είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

Διάταξη πραγματικών αριθμών

Θέμα 2ο

12673.Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < α < β$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{β} < \frac{3}{α}$.

β) Να αποδείξετε ότι $α^3 + \frac{3}{β} < β^3 + \frac{3}{α}$.

12922.Δίνονται οι παραστάσεις: $Α = α^2 + β^2$ και $Β = 2αβ$, $α, β \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $α, β \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $Α = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $Α - Β \geq 0$ για κάθε $α, β \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $α, β \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $Α - Β = 0$.

13266.Δίνονται οι παραστάσεις $Α = α^2 + 4α + 5$ και $Β = (2β + 1)^2 - 1$, με $α, β \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $α, β \in \mathbb{R}$ ισχύει $Α = (α + 2)^2 + 1$.

β) i. Να δείξετε ότι $Α + Β \geq 0$.

ii. Για ποιες τιμές των $α, β \in \mathbb{R}$ ισχύει $Α + Β = 0$;

13323. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17.$$

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε:

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0 .$$

14410.Δίνονται οι παραστάσεις Α και Β με $Α = α^2 + α + \frac{1}{4}$ και $Β = (β - 3)^2$.

α) i. Να δείξετε ότι $Α + Β \geq 0$ για κάθε $α, β \in \mathbb{R}$.

ii. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς $α, β$ έτσι, ώστε $Α + Β = 0$.

β) Υπάρχουν τιμές των $α, β \in \mathbb{R}$, ώστε $Α = -Β$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

14475. Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq α \leq 4$ και $-4 \leq β \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις: **α)** $α + 2β$ **β)** $α - β$

14492.Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

14704.Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$ **β)** $2x - 3y$ **γ)** $\frac{x}{y}$

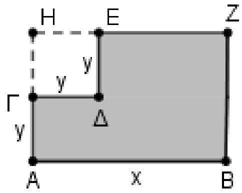
35040. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

γ) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

35549. Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.



α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$.

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

36884. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:
$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.

36899. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \geq 4$ **β)** $\left(\alpha + \dfrac{4}{\alpha}\right) \cdot \left(\beta + \dfrac{4}{\beta}\right) \geq 16$

37179. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$;

37817. Δίνεται η παράσταση $A = x^4 + \dfrac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$, $x \neq \pm\sqrt{2}$.

α) Να δείξετε ότι $A = x^4 + x^2 + 2$.

β)i. Να αιτιολογήσετε γιατί $A > 0$ για κάθε $x \neq \pm\sqrt{2}$.

ii. Για ποια τιμή του x η παράσταση Α παίρνει τη μικρότερη τιμή της;

Θέμα 4ο

14820.α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν οι ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \dfrac{3}{4}$ **ii.** $x^2 - x + 1 \geq \dfrac{3}{4}$

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \dfrac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Δίνεται η παράσταση $A = \dfrac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση Α.

ii. Με τη βοήθεια του β)ι με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση Α μπορεί να πάρει την τιμή $\dfrac{9}{16}$.

Θέμα 3ο

14602. Αν $0<\alpha<1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha^3<\alpha$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$.

14713. Δίνεται η παράσταση $A=\frac{\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18}{\alpha^2+2\alpha}$, $\alpha>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18=(\alpha^2+9)(\alpha+2)$.

β) Για κάθε $\alpha>0$ ισχύει: **i.** $A=\frac{\alpha^2+9}{\alpha}$ **ii.** $A\geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $A=6$;

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Θέμα 2ο

12909. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x-3|<5$.

α) Να δείξετε ότι $x\in(-2,8)$.

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3|<5$.

γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $B=\{-3,-2,-1,0,3,4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A\cup B$ και $A\cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους.

13177.Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α β, για τους οποίους ισχύει $2\leq\alpha\leq 3$ και $-2\leq\beta\leq -1$.

α) Να δείξετε ότι: $|\alpha-3|=3-\alpha$ και $|\beta+2|=\beta+2$.

β) Να δείξετε ότι: $0\leq\alpha+\beta\leq 2$.

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha+\beta|+|\alpha-3|-|\beta+2|$ είναι ίση με 1.

14071. α) Η αλγεβρική παράσταση Κ, που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1, πάνω στον άξονα είναι:

Α. $K=|x+1|+|x-2|$ **Β.** $K=|x-1|+|x+2|$ **Γ.** $K=\left(|x|+1\right)+\left(|x|-2\right)$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν είναι $K=|x+1|+|x-2|$ τότε:

i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης K όταν $x=\frac{3}{2}$.

ii) Αν x>2 να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση Κ και να αποδείξετε ότι Κ > 3.

14412. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha>\beta$, με $\beta>1$ και $\alpha>1$ τότε:

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}-\frac{|1-\alpha|}{1-\alpha}=2$.

β) Να δείξετε $\alpha+\beta>\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}-\frac{|1-\alpha|}{1-\alpha}$.

14491. α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y-3|<1$.

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου.

14572. Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x+2|<1$. Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$. **β)** $|2x+4|<2$.

14599. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x|<2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1<x<1$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(-1,1)$ ισχύει $x^2<1$.

14617. Δίνεται η ανίσωση $|x-7|<1$ (Ι).

α) Να αποδείξετε ότι $x\in(6,8)$.

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k\in(6,8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k}\in(3,4)$.

15054. Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha<0<\beta<\gamma$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός $A=\alpha(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)\beta$ είναι θετικός.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha+|\alpha-\beta|+|\gamma-\beta|-\gamma=0$.

35041. Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3)=3-2x$.

α) Να αποδείξετε ότι $x\le\frac{3}{2}$.

β) Αν $x\le\frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K=|2x-3|-2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

35043. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\frac{|x+1|+|x-5|}{3}$.

35044.Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y, για τους οποίους ισχύει $|y-2|<1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y\in(1,3)$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\frac{|y-1|+|y-3|}{2}$.

35112. Δίνεται η παράσταση: $A=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x\ge2$ είναι $A=3x-4$ **ii)** για κάθε $x<2$ είναι $A=8-3x$.

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x\ge2$ να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4$.

35404. α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3|<1$.

β) Αν για τους x, y ισχύουν $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι $3<x+y<7$.

35412. Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5<x<10$:

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\frac{|x-5|}{x-5}+\frac{|x-10|}{x-10}$.

35415. Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|-|x-2|$.

α) Για $1<x<2$, να δείξετε ότι: $A=2x-3$.

β) Για $x<1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

36777. Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν: $|x-3|\le 2$ και $|y-6|\le 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1\le x\le 5$ και $2\le y\le 10$.

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y.

36894. α) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha+\frac{1}{\alpha}\le -2$.

β) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha|+\left|\frac{1}{\alpha}\right|\ge 2$.

36898. α) Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}-\{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\ge 2$ (1).

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

37200. Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1|<2$, τότε:

α) να δείξετε ότι $x\in(-3,1)$.

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K=\frac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x.

37201. Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|+|y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$.

Να αποδείξετε ότι: **α)** $A=x-y+2$. **β)** $0<A<4$.

Θέμα 4ο

13179. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1\le\beta\le 2$ και $2\le\alpha\le 4$.

α) i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3.

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.

β) i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha}\le 1\le\frac{\alpha}{\beta}$.

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right|=\left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right|$.

33888. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση: $(\alpha-1)(1-\beta)>0$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β.

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=|\alpha-1|+|1-\beta|$.

33896. Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\alpha-2|<1$ και $|\beta-3|\le 2$.

α) Να αποδειχθεί ότι $1<\alpha<3$.

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β.

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha-3\beta$.

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.

36671. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5)\le 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x.

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x+4|+|x-14|=18.$$

36672. Δίνονται τα σημεία A , B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2<x<7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων: **i)** $|x+2|$ **ii)** $|x-7|$

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$$|x+2|+|x-7|.$$

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά.

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

36673. Σε έναν άξονα τα σημεία A , B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$ τότε:

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

Θέμα 1ο

14801.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.

i. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει η πρόταση:
Αν α < β και γ < δ, τότε $\alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\delta$.

ii. Για κάθε $\theta\in(0,+\infty)$ ισχύει: $|x|<\theta\Leftrightarrow -\theta<x<\theta$.

iii. Η εξίσωση $x^3=5$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

iv. Αν ισχύουν α > 0 και Δ < 0 , όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, τότε το τριώνυμο
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x .

v. Ο παρακάτω πίνακας θα μπορούσε να είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το
διάστημα [0, 4].

x	0	1	1	2	4
$y=f(x)$	0	1	-1	2	0,5

β) Να αποδείξετε ότι, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α β, ισχύει η ανισότητα:
$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$

14811. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Το σημείο Μ(x, y) με x > 0 και y < 0 βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

ii. Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ισχύει: $\beta^2=\alpha\cdot\gamma$.

iii. Ισχύει $|\alpha|\ge\alpha$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

iv. Αν α > β και γ > δ, τότε: $\alpha-\gamma>\beta-\delta$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, δ.

v. Η εξίσωση $\alpha x=\alpha$ έχει μοναδική λύση x = 1για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

β) Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β να αποδείξετε ότι: $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$.

14932. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ είναι αδύνατη, όταν $\alpha\ne0$ και $\beta=0$.

ii. Αν $\alpha\le0$ και ν άρτιος φυσικός, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=\alpha$.

iii. Αν α>0 και Δ<0 η ανίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iv. Αν η απόσταση του x από το 0 είναι ίση με 3, τότε x=3 ή x=-3.

v. Η γραφική παράταση μιας συνάρτησης φ έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.

β) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β , να αποδείξετε ότι $|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$.

Ρίζες πραγματικών αριθμών

Θέμα 2ο

12943.Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)$ και $\beta=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα α + β και το γινόμενο αβ.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2=7$.

14452.Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\sqrt{3}-1$ και $\beta=\sqrt{3}+1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=10$.

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+1=5$.

14682.Δίνονται οι αριθμοί: $A=\left(\sqrt{3}\right)^6$ και $B=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A-B=18$.

β)Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3},\sqrt[3]{3}$.

14750.Δίνονται οι ετερόσημοι αριθμοί α, β, με $\alpha=1+2\sqrt{2}$ και $\beta=\sqrt{2}-2$.Να δείξετε ότι:

α) $\alpha^2+\beta^2=15$ **β)** $\sqrt{\alpha^2}+2\sqrt{\beta^2}=5$.

14774.α) Να δείξετε ότι $\left(2+\sqrt{5}\right)^2=9+4\sqrt{5}$ και $\left(1-\sqrt{5}\right)^2=6-2\sqrt{5}$.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}=1+2\sqrt{5}$.

14849. α) Να αποδείξετε ότι $2<\sqrt{5}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2-\sqrt{5}\right)^2=9-4\sqrt{5}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$.

15051.α) Να αποδείξετε ότι $\left(2-\sqrt{5}\right)^2=9-4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $\left(2+\sqrt{5}\right)^2$.

β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9-4\sqrt{5}$ και $9+4\sqrt{5}$.

34152. Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\sqrt{(x-2)^2}$ και $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$ όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α;

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β;

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x\le 2$, ισχύει $A=B$.

34155. Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}, B=\sqrt{3}$ και $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B\cdot \Gamma=\sqrt{15}$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α, Β .

34157. Αν είναι $A = 2-\sqrt{3},\ B = 2+\sqrt{3}$, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.
β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

36778. Δίνεται η παράσταση: $K = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.
α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση Κ να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.
β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι παράσταση Κ σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

37172. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A = \left(\sqrt{2}\right)^6,\ B = \left(\sqrt[3]{3}\right)^6$ και $\Gamma = \left(\sqrt[6]{6}\right)^6$.
α) Να δείξετε ότι: $A + B + \Gamma = 23$.
β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

37192. Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):
$$\sqrt{2} \cong 1,41\ ,\ \sqrt{3} \cong 1,73\ ,\ \sqrt{5} \cong 2,24\ ,\ \sqrt{7} \cong 2,64\ .$$
α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}, \sqrt{40}, \sqrt{80}$.
β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$;

37193. Δίνεται η παράσταση: $A = \left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)$
α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

37194.α) Να δείξετε ότι : $3 < \sqrt[3]{30} < 4$.
β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30},\ \ 6-\sqrt[3]{30}$.

37195. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$
α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.
β) Για $x = 5$,να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$.

37196. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x-4}$.
α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.
β) Για $x = 4$,να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2\cdot\left(10-\sqrt{5}\right)$.

37197. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$.
α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.
β) Για $x = -3$, να αποδείξετε ότι: $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$.

37198. Δίνεται η παράσταση: $B=\sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x=4$, να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$.

37199. Δίνονται οι αριθμοί: $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$

α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$.

Θέμα 4ο

14931.Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha=1+\sqrt{2}$ και $\beta=1-\sqrt{2}$

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\alpha^2-\beta^2$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B=\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\beta^2}$.

γ) Αν $A=4\sqrt{2}$ και $B=2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}>\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\beta^2}$.

Θέμα 3ο

14805.Έστω α ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $\alpha=\left|3\sqrt{2}-4\right|+2\left|\sqrt{2}-2\right|$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=\sqrt{2}$. (Θεωρήστε ότι $\sqrt{2}=1,41$)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι $\alpha^3=2\alpha$.

γ) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A=\alpha^3+(\alpha-1)^2$.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Εξισώσεις 1ου βαθμού

Θέμα 2ο

14741. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $K = \dfrac{\alpha\left(\alpha^2 - 2\alpha + 1\right)}{\alpha^3 - \alpha^2}, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $K = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}$.

β) Για κάθε $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 1$,

i. Να δείξετε ότι $K \neq 0$.

ii. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία ισχύει η ισότητα $K(K-2) = 0$.

34146. Δίνεται η εξίσωση: $\left(\alpha + 3\right)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις: **i)** όταν $\alpha = 1$ **ii)** όταν $\alpha = -3$

β) Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

34163. Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$\left(\lambda - 1\right)x = \left(\lambda - 1\right)\left(\lambda + 1\right), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

12857. Δίνεται η εξίσωση $\left(\lambda - 1\right)x - 2\lambda + 2 = 0$.

α) i. Να λύσετε την εξίσωση για λ=-2.

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το x=1 είναι ρίζα της εξίσωσης.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση είναι ταυτότητα

14224. Δίνεται η παράσταση: $A = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x}, \ x \neq 0, x \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $A = \dfrac{x+1}{x}$.

β) i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση Α μηδενίζεται.

ii. Μπορεί η παράσταση Α να πάρει την τιμή 2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34872. Δίνεται η εξίσωση $\kappa x + 3 = 2x$, με παράμερο $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\kappa = 1$ και για $\kappa = 3$.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη για $\kappa = 2$.

36896. Δίνεται η εξίσωση $\left(\lambda - 1\right)x = \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές τιμές για το λ, να γράψετε τρεις εξισώσεις.

β) i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μια και μοναδική λύση.

ii. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) να ισούται με 4.

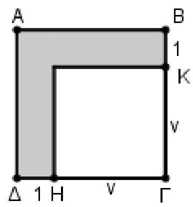
Θέμα 4ο

13170. Υποθέτουμε ότι κάθε κεφάλαιο που κατατίθεται σε έναν λογαριασμό μιας τράπεζας, αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά ε % (το επίσημο επιτόκιο αύξησης που δίνει δηλαδή η τράπεζα είναι ε %).
α) Αποδείξτε ότι αν καταθέσουμε στη συγκεκριμένη τράπεζα κεφάλαιο x € με επιτόκιο ε %, ύστερα από δύο έτη θα εισπράξουμε κεφάλαιο $x\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^2$ €.
β) Ένα κεφάλαιο 15.000 € το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο, κατατέθηκε σε μια τράπεζα Α με επιτόκιο 2% και το άλλο, κατατέθηκε σε μια άλλη τράπεζα Β με επιτόκιο 3%. Ύστερα από 2 χρόνια, εισπράχθηκε, με βάση το α) ερώτημα, και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 15.811 €. Ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β.
i) Να αποδείξετε ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης:

$$\left(1{,}03^2-1{,}02^2\right)\cdot y=15811-15000\cdot 1{,}02^2\,.$$

ii) Να βρείτε το κεφάλαιο που κατατέθηκε σε κάθε τράπεζα.

14543. Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός α γράφεται στη μορφή $\alpha=2k+1$, k ακέραιος.
α) Να γράψετε τους αριθμούς 3,5,7 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.
β) i) Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται πάντα με έναν περιττό ακέραιο.
ii) Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.



γ) Στο σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΓΗΡΚ είναι τετράγωνα με (ΓΗ)=(ΓΚ)=ν και (ΒΚ)=(ΔΗ)=1. Αν γνωρίζουμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 45, να βρεθεί η τιμή του θετικού ακεραίου ν.

Εξισώσεις με απόλυτα

13169. Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3\le x\le 5$, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι $x-5\le 0<x-2$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|-|x-5|=2$.

14649. Δίνεται η παράσταση $K=|x+1|+2$, όπου $x\in\mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι $K=\begin{cases}x+3, & \text{αν } x\ge -1\\ 1-x, & \text{αν } x<-1\end{cases}$.
β) i. Να λυθεί η εξίσωση $|x-2|=4$.
ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης Κ αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

14730. Δίνεται η παράσταση $A=|x-2|+3$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε
i. Την τιμή της παράστασης Α για $x=2^3-3^2$.
ii. Τις τιμές του x, ώστε να ισχύει $A=5$.
β) Να εξετάσετε αν μπορεί η παράσταση Α να πάρει την τιμή 2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

35033. Δίνονται οι παραστάσεις: $A=|2x-4|$ και $B=|x-3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2 \le x < 3$ να αποδείξετε ότι $A+B=x-1$.
β) Υπάρχει $x \in [2,3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Η εξίσωση $x^{\nu}=\alpha$
Θέμα 3ο

14052. α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-1=0$.
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x|+x=0$.
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x|+|x^2-1|+x=0$.

Εξισώσεις 2ου βαθμού
Θέμα 2ο

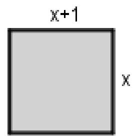
13028. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2-2\alpha x-2\alpha-2=0$ με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ (1).
α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}^*$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 3.
β) Για α=2 να λύσετε την εξίσωση (1).

34161. α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$.
β) Αν α, β με $\alpha<\beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση

$$\alpha x^2+\beta x+3=0.$$

35100. α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2+10x=12$.
β) Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$.

37178. Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x+1)$ μέτρα και x μέτρα.

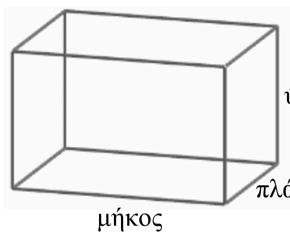


α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.
β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

37181. Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda-1)x+6=0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1 , να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$.
β) Για $\lambda=2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

Θέμα 4ο

12683. Η δεξαμενή του παρακάτω σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.



α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο $16m^3$, να βρείτε τις διαστάσεις της.
β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα. Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει $16m^3$.

γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει 10m^3 πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή.

14651. Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0$, με $\lambda > 0$.

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου.

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda > 0$.

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

14406. Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει: $\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha^{22}\left(\beta^3\right)^8}{\alpha^{-2}\left(\alpha\beta\right)^{25}}$.

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\frac{5}{2}$ να τους υπολογίσετε.

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β, έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο.

33889. α) Να λύσετε τις εξισώσεις: $3x^2 - 14x + 8 = 0$ (1) και $8x^2 - 14x + 3 = 0$ (2).

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (3) και $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ (4), με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$. Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι: Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε:

i) $\rho \neq 0$ **ii)** ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4)

34322. Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση:
$\lambda = \left(2x + 5\right)^2 - 8x$ (1)

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος;

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20, ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;

γ) i. Να δείξετε ότι η σχέση (1) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στη μορφή:

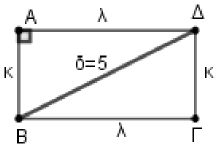
$$4x^2 + 12x + \left(25 - \lambda\right) = 0$$

ii. Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5.

iii. να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ.

34327.α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2-3x-4=0$ (1) .
β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0$.
i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).
ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β.

34390.Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις κ και λ του οποίου η περίμετρος είναι $\Pi=14$ cm και μια διαγώνιος $\delta=5$ cm.



α) i. Με χρήση της ταυτότητας $(\kappa+\lambda)^2=\kappa^2+2\kappa\lambda+\lambda^2$, να δείξετε ότι για το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ισχύει $E=12\ cm^2$.
ii. Να αιτιολογήσετε γιατί οι τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-7x+12=0$.
iii. Να βρείτε τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου.
β) Να δείξετε ότι ένα ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi=14$ cm πρέπει να έχει εμβαδόν $E\le\frac{49}{4}$.

34544. Δίνεται η εξίσωση : $x^2-2\lambda x+4(\lambda-1)=0$ (1) με άγνωστο το x και παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι $\Delta=(2\lambda-4)^2$.
β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.
γ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ ο αριθμός $x=2$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

36651.Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4\lambda+5=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης όταν $\lambda=-2$ και όταν $\lambda=3$.
β) i. Να αποδείξετε ότι αν $\lambda=5$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.
ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.
γ) Αν ισχύει $|\lambda^2-4\lambda-5|=4\lambda-\lambda^2+5,\ \lambda\in\mathbb{R}-\{-1,\ 5\}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

36661. Δίνεται η εξίσωση: $\left(\lambda^2-\lambda\right)\cdot x^2-\left(\lambda^2-1\right)\cdot x+\lambda-1=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$
α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού.
β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή : $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$.
γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.
δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού.

36663.Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά (d+1) cm.
α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.
β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:
i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.
ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

3ο Θέμα

14749. α) i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται η παράσταση: $A = \frac{x}{x-|x|}$.

ii. Για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση Α , να δείξετε ότι $A = \frac{1}{2}$.

β) Για $x < 0$, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x^3}{x-|x|} = \frac{3}{2}x + 2$.

14578. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $\Pi = \frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x}$.

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x} = 0$.

Εξισώσεις που ανάγονται σε 2ου βαθμού

Θέμα 4ο

33826. α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.
β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν $\gamma < 0$ τότε:
i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$
ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Τύποι Vieta

Θέμα 2ο

14577. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x - 2 = 0$ (1).
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1 .
β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1).
γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$, $x \neq 0$, $x \neq -1$.

34150. Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι ώστε: $\alpha + \beta = 12$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 272$.
α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -64$.
β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β .
γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β .

34154. Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3-\sqrt{7}}$ και $B = \frac{1}{3+\sqrt{7}}$

α) Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$.

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς Α,Β .

34436. Δίνονται οι αριθμοί: $A=\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}$ και $B=\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}$.

α) Να δείξετε ότι: **i)** $A+B=\dfrac{1}{2}$ **ii)** $A\cdot B=\dfrac{1}{20}$

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

34920. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+x-1$ (1).
α) Αν x_1,x_2 είναι ρίζες του τριωνύμου (1), να βρείτε την τιμή των παραστάσεων x_1+x_2, x_1x_2 και $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$.

β) Αν $\dfrac{1}{x_1}=-1$ και $\dfrac{1}{x_2}=2$, να βρείτε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τις $\dfrac{1}{x_1}$ και $\dfrac{1}{x_2}$.

35038. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha\cdot\beta=4$ και $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=20$.
α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha+\beta=5$.
β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

36890. α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=3$.
β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α)ερωτήματος.

37171. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha+\beta=2$ και $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30$.
α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-15$.
β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

Θέμα 4ο

14490. Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.
α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω.
β) Δίνεται η εξίσωση $x^2-2x+\lambda-2=0$, με $\lambda\in\mathbb{R}$. Να βρείτε:
i) Το σύνολο Α που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του $\lambda\in\Omega$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.
ii) Την πραγματική τιμή του λ, αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.
γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β ii) να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης.

14759. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^2+6\alpha x+6\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι: $f(\alpha)+f(\beta)\geq\beta^2-36$.
β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες $f(\alpha)+f(\beta)=\beta^2-36$.
γ) Αν $\alpha=2$ και $\beta=-6$
i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=6x$.
ii. Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γi), να δείξετε ότι ισχύει: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{6}$.

33584. Δίνονται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β) Να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = 2$.

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$ τότε:

i) Να δείξετε ότι $x_1 - x_2 = 4$.

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 την τιμή του λ.

33585. Δίνονται η εξίσωση: $\alpha x^2 - \left(\alpha^2 - 1\right)x - \alpha = 0$ με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = \left(\alpha^2 + 1\right)^2$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι $p_1 = \alpha$ και $p_2 = -\dfrac{1}{\alpha}$.

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε $\left|p_1 - p_2\right| = 2$.

34310. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + \left(2\lambda - 1\right)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

36675. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$.

ii) να βρείτε το λ.

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Ανισώσεις 1^{ου} βαθμού

Θέμα 2ο

36888. α) Να λύσετε την ανίσωση $3x-1<x+9$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $2-\frac{x}{2}\leq x+\frac{1}{2}$.

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

Θέμα 4ο

13312.Δίνεται η εξίσωση $x^2-6x+\lambda=0 \ (1)$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha\cdot\beta=\lambda$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\alpha\cdot\beta\leq 9$.

ii. Να δείξετε ότι $\alpha\cdot\beta=9$ αν και μόνο αν α = β.

γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α, β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

Ανισώσεις με απόλυτα

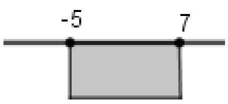
Θέμα 2ο

13025.α) Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{3-2x}{7}\geq 5$.

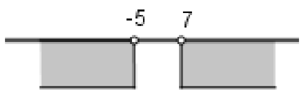
β) Να λύσετε την ανίσωση $|-x-1|\leq 23$.

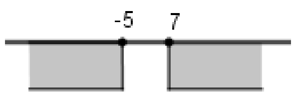
γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

14295. α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-1|\geq 6$ και στη συνέχεια να βρείτε τη θέση του πραγματικού αριθμού x πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις:

1. 

2. 

3. 

4. 

β) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο α) ερώτημα.

14319. Δίνεται η ανίσωση $|2x-5|<3$

α) Να λύσετε την ανίσωση.

β) αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$A=(\alpha-1)(\alpha-5)$$

34148. α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών: **i)** $|2x-3|\le 5$ **ii)** $|2x-3|\ge 1$

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

34149. α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2-x-6=0$ (1).

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1|<2$ (2).

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

35296. α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1|\ge 5$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

36886.α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<2$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x|>5$.

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

36893.α) Να λύσετε την ανίσωση: $|2x-1|\le 7$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1|>2$.

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

36895.α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x+4|=10$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5|>1$.

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

37191.α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών: **i.** $|1-2x|<5$ **ii.** $|1-2x|\ge 1$

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

4ο Θέμα

13474. Δίνονται οι ανισώσεις $|x-1|\le\sqrt{3}\ (1)$ και $3-\frac{x+4}{2}<0\ (2)$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1).

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

δ) Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) τότε και ο αριθμός $\frac{3\alpha+4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση τους.

14650. α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1|\le 3$ (1).

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-1|$.

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-1|\leq 3$.

δ) Να βρείτε τους ακέραιους x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-1|\leq 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

33893.α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-4|<2$.

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i. Να δείξετε ότι $3x-4>0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

iii. Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του 3x από το 19.

Θέμα 3ο

14601. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1|<1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0<x<1$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $1,\ x,\ x^2$.

14753. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $2|x|-2\leq 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι $x\in[-1,1]$.

β) Να δείξετε ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την (1) απέχουν από το -3 απόσταση το πολύ 4.

γ) Για τους πραγματικούς αριθμούς x που ικανοποιούν την (1) να γράψετε την παράσταση $A=|2x-3|-|4-3x|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές.

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Θέμα 2ο

14474. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+3x-5$.

α) Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

35382. Δίνεται η παράσταση: $K=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-3x-2$.

β) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K.

37169. Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$.

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

Ανισώσεις 2ου βαθμού

Θέμα 2ο

12722.Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=x^2-x-3$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$.

β) Να επιλύσετε την ανίσωση $-2f(x)<0$.

12976.α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-x-1$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1-2x)\le -1$.

13321. α) Να λύσετε την εξίσωση $x^4-16=0$. (1)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+3x\le 0$. (2)

γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).

14189. α) Αν $x^2-3x-4<0$, να δείξετε ότι $-1<x<4$.

β) Δίνεται η παράσταση $A=|2x+2|+|x-5|$ με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος α). Να αποδείξετε ότι: $A=x+7$.

34162.α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x-5|\le 3$ και $2x^2-x-1\ge 0$.

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α).

34919. α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-10x+21<0$ (1).

β) Αν η ανίσωση (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $3<x<7$ και ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω ανίσωσης, να δείξετε ότι η παράσταση $A=|x-3|+|x-7|$ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

35030.α) Να αποδείξετε ότι $x^2+4x+5>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση: $B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|$.

35035. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=3x^2+9x-12,\ \ x\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

36887. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2-3x+1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2-3x+1<0$.

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος β).

36892. α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x|}{3}-\frac{|x|+4}{5}=\frac{2}{3}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2+2x+3 \le 0$.
γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α)ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος.

37168. Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2+5x-6<0$ (1) και $x^2-16 \le 0$ (2).
α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2).
β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

37182.α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2-x-2=0$.
β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2-x-2>0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.
γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

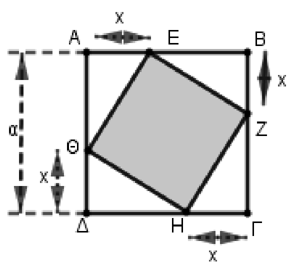
38203.α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2-25=0$.
β) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-36 \le 0$.
γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος.

Θέμα 4ο

13174. Δίνονται οι παραστάσεις $A=\dfrac{-x^2+4|x|-3}{|x|-1}$ και $B=\dfrac{x^2-4|x|+4}{|x|-2}$.
α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις Α και Β;
β) Να δείξετε ότι $A=3-|x|$ και $B=|x|-2$.
γ) Να λύσετε την ανίσωση: $B-A<2d(x,4)-5$.

13176. Δίνονται οι ανισώσεις $|x-1|<2$ και $x^2-3x+2 \ge 0$.
α) Να βρείτε τις λύσεις τους.
β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1,1] \cup [2,3)$.
γ) i) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1,\rho_2 \in (-1,1]$, είναι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;
ii) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1 \in (-1,1]$ και $\rho_2 \in [2,3)$, είναι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

13368. Στο παρακάτω σχήμα οι κορυφές του τετραγώνου ΕΖΗΘ βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ.



α) Αν η πλευρά του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι α και η απόσταση των κορυφών του ΕΖΗΘ από τις αντίστοιχες κορυφές του ΑΒΓΔ είναι x, όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι το εμβαδόν του ΕΖΗΘ δίνεται από τη σχέση: $(ΕΖΗΘ)=x^2+(\alpha-x)^2$ με $0 \le x \le \alpha$.

β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ΕΖΗΘ δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το μισό του εμβαδού ΑΒΓΔ.
γ) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου ΑΒΓΔ αν για $x=1$, το εμβαδόν του ΕΖΗΘ είναι τα δύο τρίτα του εμβαδού του ΑΒΓΔ, δηλαδή: $(ΕΖΗΘ)=\frac{2}{3}(ΑΒΓΔ)$. (Δίνεται $\sqrt{3}\approx 1,73$) .

14123.Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-\alpha x-(\alpha+1)$, $x\in\mathbb{R}$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.
α) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α να βρείτε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.
β) Αν είναι $\alpha>-2$, τότε:
i. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί -1 και $\alpha+1$.
ii. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το μήκος του διαστήματος λύσεων της ανίσωσης $x^2-\ \alpha x-\ (\alpha+1)\le 0$ είναι ίσο με 2024.
iii. Να βρείτε το πρόσημο του $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

14615. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda^2-1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.
α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ, πραγματικές και άνισες ρίζες.
β) Να λύσετε την εξίσωση.
Έστω ρ_1,ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1<\rho_2$.
γ) Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου λ, η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8.
δ) Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1<k<\rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού $k^2-2\lambda k+\lambda^2-1$.

14652. α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2>x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.
β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha>1$.
i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0,\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \sqrt{\alpha}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.
ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha,\ \alpha^2,\frac{\alpha+\alpha^2}{2}$.

14653. Δίνεται η ανίσωση: $|x-1|\le 3$. (1)
α) Να λύσετε την ανίσωση (1) .
β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).
γ) Να βρείτε μία ανίσωση 2ου βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1).
δ) Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιο του, τότε η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.

14654.α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2-3x+2,\ \ x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.
β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β διαφορετικούς από το 0 με $\alpha<\beta$ για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2-3\alpha+2)(\beta^2-3\beta+2)<0$.
i) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha-1$ και $\beta-2$ είναι ομόσημοι.
ii) Να δείξετε ότι $|(\alpha\ -1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2)$.

14924. α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι $\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi+9}{3}\right) - 12 > 0$, όπου π = 3,1415… .

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $\left(|\alpha|+3\right)^2 - \left(|\alpha|+3\right) - 12 < 0$ να δείξετε ότι $\alpha \in (-1,1)$.

14963.Δίνεται η εξίσωση $|x-4| - |x-2| = 2$.

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της παραπάνω εξίσωσης.

β) Να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο $(-\infty, 2]$ και μόνο αυτοί.

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $|x-4| - |x-2| = 2$, τότε να δείξετε ότι $x^2 - 6x + 8 \geq 0$.

32682.α) i. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x+3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$.

β) i. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του αριθμού x.

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18$.

33587.Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου f για τις διάφορες τιμές του x.

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου: $f(2,999) \cdot f(-1,002)$.

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού: $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

33711. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x .

β) Αν $k = -\frac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης: $\mu^2 - 2|\mu| - 8$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

33712. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα του τριωνύμου.

β) i) Αν $\beta \neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν β= 0.

γ) Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

33698.Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

γ) Αν $3<\lambda<12$, τότε:

i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

ii) Αν $x_1,\ x_2$ με $x_1<x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa<0$ και $x_1<\mu<x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa\cdot f(\kappa)\cdot\mu\cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

33890.α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2+1\geq\frac{5}{2}x$ (1)

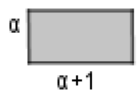
β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση: $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ. **ii)** Να δείξετε ότι: $|\kappa-\lambda|\geq\frac{3}{2}$.

33892. α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2+x-6<0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x-\frac{1}{2}\right|>1$

γ) Δίνεται το διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α και α + 1 όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|>1$. Αν για το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ισχύει $E<6$, τότε:



i) Να δείξετε ότι: $\frac{3}{2}<\alpha<2$

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

34319.Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=3x^2+\kappa x-4$, με παράμετρο $\kappa\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δυο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει $\alpha<x_1<x_2<\beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου: $\alpha\cdot f(\alpha)\cdot\beta\cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34323.Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-x+(\lambda-\lambda^2),\ \lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν $\lambda\neq\frac{1}{2}$ και $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1<x_2$, τότε :

i) να αποδείξετε ότι $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2$

ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$f(x_2), f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right), f(x_2+1)$

34325. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)
α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;
γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$.

34185.α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$.
β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.
γ) Αν $\alpha \in (-6,6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34186. Οι πλευρές x_1 και x_2 ενός ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x + \lambda(2-\lambda) = 0$, με $\lambda \in (0,2)$.
α) Να βρείτε
  i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου.
  ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ.
β) Να δείξετε ότι $E \le 1$, για κάθε $\lambda \in (0,2)$.
γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in (0,2)$ για την οποία το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1. Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

36658. Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y = 60t - 5t^2$
α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;
β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y = 175$ m;
γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m.

36669. Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \le |x| \le 3$ και $x^2 - 4x < 0$.
α) Να βρείτε τις λύσεις τους.
β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2,3]$.
γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

36670. Δίνονται οι ανισώσεις : $|x+1| \le 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.
α) Να λύσετε τις ανισώσεις.
β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3,-1)$.
γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2,2)$.

36678. α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.
β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.
i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: $0,\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2, \sqrt{\alpha}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).
ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+\alpha} < 1+\sqrt{\alpha}$.

Θέμα 3ο

34910. α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 4x + 3 < 0$ (1).
β) Αν η (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $1 < x < 3$ και οι αριθμοί α, β είναι λύσεις της ανίσωσης (1), να δείξετε ότι και ο αριθμός $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης (1).

Πρόοδοι

Ακολουθίες

Θέμα 4ο

13056. Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί. Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $T_\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

•	• • •	• • • • • •	• • • • • • • • • •	…
1	3	6	10	…

α) Να βρείτε τον $10^{ο}$ τριγωνικό αριθμό.
β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός.
γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

Αριθμητική πρόοδος

Θέμα 2ο

14259. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) δίνονται οι δυο πρώτοι όροι, $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_2 = 7$.
α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.
β) Να δείξετε ότι ο $20^{ος}$ όρος της προόδου ισούται με 97 .
γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $2+7+12+...+97$.

14476. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών:1, 3, 5, 7, …
α) i) Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.
ii) Να βρείτε τον τριακοστό της όρο.
β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2 .

14512. α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2 = 1$ και $x^2 = 9$.
β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος αύξουσα σειρά και στη συνέχεια:
i) να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (α_ν) της οποίας να βρείτε την διαφορά ω.
ii) να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_ν).

14573. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.
α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.
β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

14574. Ο 1ος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) ισούται με 2 και ο 3ος όρος ισούται με 8.
α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.
β) Αν είναι ω = 3, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35 .

14597. Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει α καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα .
α)Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το

συλλογισμό σας.
β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς.
γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά;

14656. Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) δίνονται $\alpha_1 = 41$ και $\alpha_6 = 26$.
α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3.
β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu = \nu$.

34145. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.
α) Να δείξετε ότι: $\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7} = 2$.
β) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

34147.Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.
α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.
β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34153. Οι αριθμοί $x+6,\ 5x+2,\ 11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.
α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$.
β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.

34158. Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.
α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.
β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77.
(Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$).

34871. α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε οι αριθμοί $x+2,\ x+1,\ 3x+2$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
β) Για $x = -1$, να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

34877. α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$ (1).
β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

35046. Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.
α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.
β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

35143. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2 = 0,\ \alpha_4 = 4$.
α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.
β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι ίσος με
$\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

35299. Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.
α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς.
β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;
γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

35375. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (αν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.
α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.
β) Να βρείτε τον α_{20}
γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.
35408. Οι αριθμοί $A = 1$, $B = x + 4$, $\Gamma = x + 8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).
α) Να βρείτε τη τιμή του x.
β) Αν $x = 1$ και ο αριθμός Α είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν),
i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω.
ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

36897. α) Να βρείτε το άθροισμα των *ν* πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων1,2,3,…ν .
β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.

Θέμα 4ο

12694. Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.
α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος;
β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι.
γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι.
δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι;

12764. Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.
α) Αν α_ν το πλήθος των καθισμάτων της ν - οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι α_ν είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω.
β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.
γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθήμενους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.

12945. Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3 = 8, \alpha_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56 .

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$.

β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο.

γ) Αν το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της ε(α_ν) ίναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της (β_ν) να βρείτε τον αριθμό ν.

13089. Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ! Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

α) i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_ν , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_ν , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο.

γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

δ) Να δείξετε ότι $\alpha_\nu = \beta_{8-\nu}$ για κάθε $\nu = 1, 2, ..., 7$.

13171. Το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι
$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu = S_\nu = 2\nu^2 + 3\nu,\ \nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 1$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

β) Να αποδείξετε ότι $S_{\nu-1} = 2\nu^2 - \nu - 1,\ \nu \geq 2$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 4\nu + 1,\ \nu \geq 1$.

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω.

13173. Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με γενικό τύπο $\alpha_\nu = 10 + 3\nu$.

α) i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος.

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε ποιοι όροι της (α_ν) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί;

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401.

14809. Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ».
Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων:
ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ…

α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1 = 5$ και να βρείτε τη διαφορά της.

β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για 23^{η} φορά το γράμμα Β.

γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200η θέση στην παραπάνω διαδοχή.

14927. Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να δείξετε ότι το κόστος για ν καλεσμένους είναι $\alpha_\nu = 107\nu + 1210$ (1).

β) Να ερμηνεύσετε τη σημασία

i. του αριθμού 1210 στη σχέση (1).

ii. της διαφοράς $\omega = 107$ της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος.

γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους.

14758. Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα.

α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου;

β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια;

δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το $250^{ο}$ αυτοκίνητο;

14962. Έστω μία αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά $\omega = 3$. Αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $\Delta = [2,8]$ υπάρχουν ακριβώς 3 διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου (α_ν),

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός μηδέν είναι όρος της (α_ν).

β) Να βρείτε τους 3 διαδοχικούς όρους της (α_ν) που υπάρχουν στο $\Delta = [2,8]$.

γ) Αν $\alpha_6 = 14$,

i. να βρείτε τον α_1.

ii. να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της (α_ν) που πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο του 186.

(Δίνεται $\sqrt{4489} = 67$)

32741. Στην Α΄ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με x - 1 μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε x+3 σειρές με x-3 μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x.

β) Να αποδείξετε η Α΄ τάξη έχει 90 μαθητές.

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν.

33579. Οι αριθμοί : $x^2+5,\ x^2+x,\ 2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x.

β) Αν $x = 3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο 4ος όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.
ii) Τον πρώτο όρο της προόδου.
iii) Το άθροισμα $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \ldots + \alpha_{24}$.

33581. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο 3ος όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο 8ος όρος είναι $\alpha_8 = 23$.
α) Να αποδείξετε ότι ο 1ος όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 2$ και η διαφορά της $\omega = 3$.
β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της.
γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \ldots + (\alpha_{31} + 31)$

33583. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$.
α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου.
β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.
γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιο ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

33858. Σε αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa + 1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa > 1$.
α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι περιττός αριθμός .
β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε:
i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$.
ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου.

34746. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$, (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$.
β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

36650. Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21€ ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51θέσεις. Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.
α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.
β) Αν για κάθε $\nu \leq 51$ ο αριθμός α_ν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί α_1, α_2,…,α_{51} είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου.
γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51ος επιβάτης.
δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21€ ανά εισιτήριο.(Δίνεται ότι: $\sqrt{10201} = 101$)

36653. Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_ν) ,όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$. Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι: α_1=x, $\alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4$, $\alpha_3 = x^2 - 2$,όπου $x \in \mathbb{Z}$, τότε :
α) να αποδειχθεί ότι x=3.
β) να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014 .

γ) να υπολογιστεί το άθροισμα $S=α_1+α_3+α_5+ ...+α_{15}$.

36660. Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.
α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το $ν^ο$ όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;
β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20η κυψέλη;
γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.
i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3ηκυψέλη;
ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

36662. Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.
α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.
β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου.
γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

36674. Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.
α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.
γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

37204. Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων .Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 καθίσματα.
α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.
β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου.
γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;
δ) Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:
i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.
ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

1ο θέμα

14935. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ) , γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

ii. Αν ρ > 0, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $|x|<\rho \Leftrightarrow -\rho<x<\rho$.

iii. Η εξίσωση $x^{\nu}=\alpha$, με ν περιττό φυσικό και α < 0, έχει λύση την $x=\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.

iv. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ(3,5) ισχύει $f(5)=3$.

v. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2=\alpha\gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι: $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$.

Γεωμετρική πρόοδος
Θέμα 2ο

12763. Δίνεται μια πρόοδος α_ν με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, ...$

α) Να εξετάσετε αν η α_ν είναι αριθμητική πρόοδος.

β) Να αποδείξετε ότι η α_ν είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το ν-οστό της όρο.

12787. α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$.

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό κ ώστε οι αριθμοί $\kappa - 2, \kappa, 2\kappa + 3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

13319. Δίνονται οι αριθμοί $1 - x,\ \frac{x}{2},\ 2x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε την τιμή του x, αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι 5.

14920. Μια γεωμετρική πρόοδος (α_ν) έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 4$, λόγο $\lambda > 0$ και $\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 2$.

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου.

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

34156. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$.

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

34447. Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0\ (1)$, με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1,\ \beta,\ x_2$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

34874. α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - 5x + 2 = 0\ \ (1)$.

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

35037. Οι αριθμοί $\kappa - 2,\ 2\kappa$ και $7\kappa + 4$, $\kappa \in \mathbb{N}$ είναι , με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν).

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 4$ και να βρείτε το λόγο της προόδου.

β) i) Να εκφράσετε το 2ο όρο, τον 5ο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1.

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$.

35042. α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $x+4,\ 2-x,\ 6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
β) Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε
i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.
ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

35205. α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x,\ 2x+1,\ 5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:
i) $x=1$ **ii)** $x=-1$

35411. α) Αν οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.
β) Αν οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.
γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

36891. Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο, ισχύει: $\alpha_3=1$ και $\alpha_5=4$.
α) Να βρείτε το λόγο της προόδου και τον πρώτο όρο της.
β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_\nu=2^{\nu-3}$.

Θέμα 4ο

12731. Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ $\left(\kappa\neq 0,\ \lambda\neq 0 \text{ και } \lambda\neq 1\right)$. Θεωρούμε τους αριθμούς $\dfrac{\kappa}{\lambda},\kappa,\ \kappa\cdot\lambda$.
α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός.
γ) Αν οι αριθμοί $\dfrac{\kappa}{\lambda},\ \kappa\cdot\lambda$, $\left(\kappa>0,\ \lambda\neq 0 \text{ και } \lambda\neq 1\right)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2+10x+16=0$, να βρείτε τους αριθμούς $\dfrac{\kappa}{\lambda},\kappa,\ \kappa\cdot\lambda$.

12998. Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου $\left(\alpha_\nu\right)$: $\dfrac{27\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{81}{2},\ \dfrac{81\sqrt{3}}{2}$.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
ii. $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^7$
β) Αν $\alpha_7=\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο ν-οστός όρος της γεωμετρικής προόδου.
γ) Αν $\alpha_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda=\sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου (α_ν) είναι ίσο με $\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^{11}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2}$.

14375. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\mu x-2,\ \mu\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.

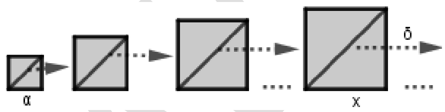
β) Να βρείτε τις τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι αριθμοί $x=-2$ και $x=3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$, ενώ ο $x=1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

γ) Αν επιπλέον οι τιμές $f(-2),\ f(1),\ f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε:

i. Να βρείτε τις τιμές του μ.

ii. Για $\mu=\dfrac{13}{7}$ να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου.

14645. Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α, σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



α) i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x, να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta=\sqrt{2}\cdot x$.

ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο λ = 2 και γενικό όρο $\alpha_\nu=\alpha^2 2^{\nu-1}$.

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8 τ.μ., να βρείτε:

i. την πλευρά α του αρχικού τετραγώνου.

ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 τ.μ..

33891. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα: $\alpha_3=4$, $\alpha_5=16$ και $\lambda>0$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου.

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $\beta_\nu=\dfrac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $S'_{10}=\dfrac{1}{2^9}S_{10}$.

34180. Δίνονται οι αριθμοί $2,\ x,\ 8$ με $x>0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2,\ x,\ 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2,\ x,\ 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, … και (β_ν) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, … τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν).

ii) Να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) να ισχύει: $2(S_\nu+24)=\beta_7$.

34181. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β και εμβαδόν Ε. Οι αριθμοί α, Ε, β με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του εμβαδού Ε.
β) Αν Ε=1 και α + β = 10,
i. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες α και β .
ii. να βρείτε τις διαστάσεις α και β του ορθογωνίου.

36649. Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.
α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;
β)Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με $β_ν$ το πλήθος των βακτηρίων *ν* ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($ν \leq 5$).
i) Να δείξετε ότι η ακολουθία ($β_ν$) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.
ii) Να εκφράσετε το πλήθος $β_ν$ των βακτηρίων συναρτήσει του *ν*.
iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

36677. Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται: Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, το 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα. Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ, το 2ο μήνα 110ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.
α) Να βρείτε
i) το ποσό $α_ν$ που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $ν^ο$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.
ii) Να βρείτε το ποσό $β_ν$ που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $ν^ο$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.
iii) το ποσό $Α_ν$ που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.
iv) το ποσό $Β_ν$ που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.
β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;
ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

37205. Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ.), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει
6 τ.μ., στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.
α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της $5^{ης}$ ημέρας μετά το ατύχημα.
β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.;
γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

Συναρτήσεις

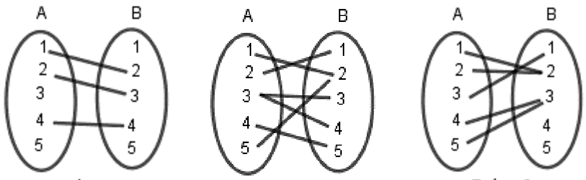
Η έννοια της συνάρτησης
Θέμα 2ο

12765.Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\sqrt{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f για όποιους από τους αριθμούς $-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2},6$ είναι αυτό δυνατό.

12908. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β.



Σχήμα 1 Σχήμα 2 Σχήμα 3

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το Α στο Β ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το Α στο Β.
β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f,
i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.
ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών f(A) της συνάρτησης f.

iii. Να βρείτε τις τιμές f(1) και f(2).

12997.Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α΄ λυκείου ενός Γενικού Λυκείου. Σχηματίζουμε τα σύνολα Α, με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α΄ τάξης ενός Γενικού Λυκείου και Β με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α΄ τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου. Ορίζουμε την αντιστοίχιση f : A→ B σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την g: B→ A με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε
επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.
α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση f : A→ B ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο Α στο σύνολο Β.
β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση g:B→A αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο Β στο σύνολο Α και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.

13026.Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2, & \text{αν x άρρητος} \\ 2x, & \text{αν x ρητός} \end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f\left(\sqrt{2}\right)$ και $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $\left[f\left(x\right)\right]^2=4x-1$.

13031.Δίνεται η συνάρτηση G με $G\left(x\right)=\dfrac{2x+3}{x-4}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της G για $x=2,\ x=0,\ x=-\frac{1}{2}$.

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G .

γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G , στο 3.

13032.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=1-3x,\ g(x)=\sqrt{x+5}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g.

β) Να δείξετε ότι $f(-1)=g(11)$.

γ) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε $f(x)=g(4)$.

14681.Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<0 \\ 2x+2, & x\geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(3)$ και $f(-3)$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x)=8$.

14728.Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x<0 \\ x^2+1, & x\geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$.

β) Για $x\geq 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\geq 2$.

14781.Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x\to y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2,-1,0,\frac{1}{2},1$ και 3 .

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x\to y$ είναι συνάρτηση.

ii. Είναι η αντιστοίχιση $y\to x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x\to y$.

34446.Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: y=35+0,8x.

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

35298.Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} 2x+4, & x<0 \\ x-1, & x\geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-1)=f(3)$.

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$,ώστε $f(x)=0$.

35405.Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{x+2}{x^2-x-6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να δείξετε ότι: $f(2)+f(4)=0$.

37170.Η θερμοκρασία Τ σε βαθμούς Κελσίου (˚C), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση: $T=15+25\cdot x$, όταν $0\le x\le 200$.
α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290˚C. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440˚C; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

37175.Δίνεται η συνάρτηση f, με $f\left(x\right)=\begin{cases}8-x\ ,\alpha\nu\ x<0\\2x+5,\alpha\nu\ x\ge 0\end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι : $f\left(-5\right)=f\left(4\right)$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε $f\left(x\right)=9$.

37185.Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f\left(x\right)=x^2+4x$.

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f\left(x\right)=32$.

37189.Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{x},x\neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=\dfrac{5}{2}$.

37202.α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x-3}$.

Θέμα 4ο

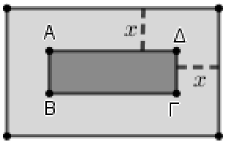
12689. Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:
$Y_1(t) = 150 + 50t$, $t\in\left[0,5\right]$.

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_2(t) = 650 - 25t$.
α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;
β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5^o μέχρι το 10^o λεπτό της κίνησής του;
γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτέρου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.

δ) i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

12911. Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15m και 25m. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m (x > 0), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 4x^2 + 80x$, $x > 0$.

β) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500\ m^2$.

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από 500 m^2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

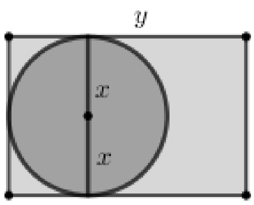
13114.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{|x-1| - |3-3x| + |2x-4|}{2}$.

α) Να δείξτε ότι $f(x) = d(x,2) - d(x,1)$.

β) Αν τα σημεία Α και Β παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $f(x) = 0$ και να προσδιορίσετε τη λύση της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

14122.Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο με μήκος y cm και περίμετρο 10 cm. Μέσα σε αυτό δίνεται κύκλος με ακτίνα x cm, ο οποίος εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ορθογωνίου.



α) i. Να αποδείξετε ότι η σχέση που εκφράζει το μήκος y (σε cm) του ορθογωνίου ως συνάρτηση της ακτίνας x του κύκλου είναι: $y = 5 - 2x$, $x \in \left(0, \dfrac{5}{2}\right)$.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου (σε cm^2) δίνεται από τη σχέση $E_{ορθ} = 10x - 4x^2$, $x \in \left(0, \dfrac{5}{2}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι το μέρος του εμβαδού του ορθογωνίου (σε cm^2) που βρίσκεται έξω από τον κύκλο δίνεται από τη σχέση: $E = 10x - (\pi + 4)x^2$, $x \in \left(0, \dfrac{5}{2}\right)$.

γ) Αν το εμβαδό E του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο είναι ίσο με $(6-\pi)cm^2$ και ο x είναι ένας ρητός αριθμός, τότε να βρείτε:

i. την ακτίνα x του κύκλου.

ii. τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

14375. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \mu x - 2$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι αριθμοί $x = -2$ και $x = 3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, ενώ ο $x = 1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

γ) Αν επιπλέον οι τιμές $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε:

i. Να βρείτε τις τιμές του μ.

ii. Για $\mu=\frac{13}{7}$ να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου.

14562. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}$.

α) i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

ii. Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{x}{x-2}$ για κάθε $x\in A$.

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία y = 1 έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$.

14629.Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ-Λ (Σωστό - Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\frac{1}{3}$ της μονάδας (για κάθε τριάδα λανθασμένων απαντήσεων αφαιρείται μια μονάδα).

α) Να αποδείξετε ότι αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του E(x) δίνεται από τον τύπο: $E(x)=\frac{4}{3}(x-25)$.

β) Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88. Πόσες ήταν οι σωστές και πόσες οι λανθασμένες απαντήσεις που έδωσε;

γ) Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50 . Πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση που είναι 50;

δ) Το άθροισμα των επιδόσεων δυο φοιτητών ήταν 140. Πόσες ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις και των δυο μαζί;

14655.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x και y τέτοια, ώστε x+ y=10.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x)=\frac{1}{2}(10x-x^2), x\in(0,10)$.

β) i. Να αποδείξετε ότι $E(x)\le\frac{25}{2}$ για κάθε $x\in(0,10)$.

ii.Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$;

γ) Αν x=5, ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το είδος του τρίγωνου ως προς τις πλευρές του;

14702.Για της ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου ΑΒΓΔ, με διαστάσεις x και 2x − 1, όπου $x>\frac{1}{2}$.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν Ε της μακέτας σε συνάρτηση του x.

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περίφραξη του πάρκου στη μακέτα, να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x, ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο.

14759.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^2+6\alpha x+6\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(\alpha)+f(\beta)\geq\beta^2-36$.

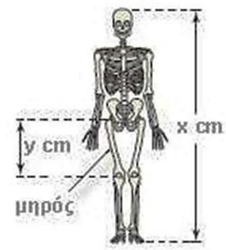
β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες $f(\alpha)+f(\beta)=\beta^2-36$.

γ) Αν $\alpha=2$ και $\beta=-6$:

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=6x$.

ii. Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γi), να δείξετε ότι ισχύει: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{6}$.

32753.Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους *y* (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :



Γυναίκα: $y=0,43x-26$ Άνδρας $y=0,45x-31$

α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

33582.Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi=40\text{cm}$. Αν $x\,\text{cm}$ είναι το μήκος του ορθογωνίου, τότε να δείξετε ότι:

α) $0<x<20$.

β) Το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση: $E(x)=20x-x^2$.

γ) Για το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ισχύει: $E(x)\leq 100$, για κάθε $x\in(0,20)$.

δ) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10 cm.

33586. Δυο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α.). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος Κ(ν) της επιχείρησης, αν γεμίζει τόνερ το μήνα.

β) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα Ε(ν) της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ το μήνα.

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση:

i) να μην έχει ζημιά.

ii) να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

33855.α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

ii. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x+3,\ x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\leq 2$.

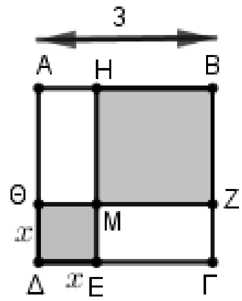
34184.Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$) με κάθετες πλευρές $AB=x$ και $A\Gamma=y$, έτσι ώστε $x+y=10$.

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Ε(x).

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E(x)=\frac{1}{2}\left(-x^2+10x\right)$, να δείξετε ότι $E(x)\leq\frac{25}{2}$, για κάθε $x\in(0,10)$.

γ) Να βρείτε την τιμή του $x\in(0,10)$ ώστε το εμβαδόν Ε(x) να γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$. Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ ;

34182. Στο επόμενο σχήμα δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς ΑΒ=3cm και τυχαίο σημείο Μ που κινείται στη
διαγώνιο ΒΔ (δηλαδή το Μ δεν θα ταυτιστεί με τα άκρα της διαγωνίου).



α) Να εκφράσετε το συνολικό εμβαδόν Ε των σκιασμένων τετραγώνων ΗΒΖΜ και ΘΜΕΔ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Ε (x) .

β) Αν το εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων είναι $E(x)=2x^2-6x+9$, να αποδείξετε ότι $E\geq\frac{9}{2}$, για κάθε $x\in(0,3)$.

γ) Για ποια θέση του Μ πάνω στη ΒΔ το εμβαδόν Ε(x) γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34317. Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}12+0,5x, & \text{αν } 0\leq x\leq 30\\ 0,7x+6, & \text{αν } x>30\end{cases}$.

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό.

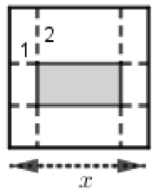
ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού.

iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο: $g(x)=12+0,6x$, για $x\geq 0$.

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλη Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

35724. Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \le x \le 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x) = (x-2)(x-4), 5 \le x \le 10$

β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2.

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2.

36654. Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x) = 12,5x + 120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διάστημα ενός μηνός, από τη συνάρτηση $E(x) = 15,5x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση) .

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

36668. Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (°C) σε βαθμούς Φαρενάιτ (°F), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (°C) σε βαθμούς Κέλβιν (°K), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου (°C) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν (°K) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ (°F) είναι η: $K = \frac{F-32}{1,8} + 273$.

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278°K μέχρι 283°K. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε °F.

36679.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = |x| - 2$.

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x)+2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$.

36680.Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - 4x + \alpha$ και $g(x) = \alpha x - 5$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α.

β) Για $\alpha = 1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$.

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x)-g(x)| = f(x)-g(x)$.

Θέμα 1ο

14801.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.

i. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει η πρόταση:
Αν α < β και γ < δ, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$.

ii. Για κάθε $\theta \in (0, +\infty)$ ισχύει: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

iii. Η εξίσωση $x^3 = 5$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

iv. Αν ισχύουν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x.

v. Ο παρακάτω πίνακας θα μπορούσε να είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα [0, 4].

x	0	1	1	2	4
$y = f(x)$	0	1	-1	2	0,5

β) Να αποδείξετε ότι, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α β, ισχύει η ανισότητα: $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Γραφική παράσταση συνάρτησης
Θέμα 2ο

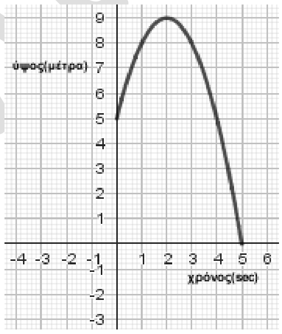
12680. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
β) Να εξετάσετε αν το σημείο Μ(4,3) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.
γ) Να εξετάσετε αν το σημείο Ν(-1,-2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

12686. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$.

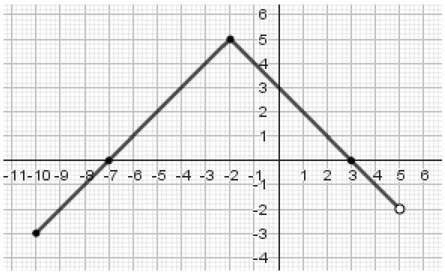
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράσταση της συνάρτησης f με τους άξονες.

12729. Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, ώστε η απόστασή του από το έδαφος (μέτρα) σε σχέση με το χρόνο (sec) να φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



α. Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή;
β. Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;
γ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος.
δ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα συναντά το έδαφος.

12910. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α και το σύνολο τιμών της f(A).
β) Να βρείτε τις τιμές f(-2), f(0), f(3).
γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x)=0$.
δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x)<0$.

13322. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x}{x^2+2}+\sqrt{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .
β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για x=1, x = - 2 και x = 2 .
γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον y΄y άξονα;

14072. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f .
β) Ανήκει το σημείο Μ(1, 3) στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y 'y .

14306. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{5}+3$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης .

β) Να υπολογίσετε το $f(-24)$.

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $(1,3)$ ανήκει στην γραφική παράσταση;

14596. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$ με $x\neq -1$.

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x)=x-3$ για κάθε $x\neq -1$.

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1,-4)$.

14603. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} 2x-5, & x\leq 3 \\ x^2\ , & 3<x<10 \end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1), f(3)$ και $f(5)$.

β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y.

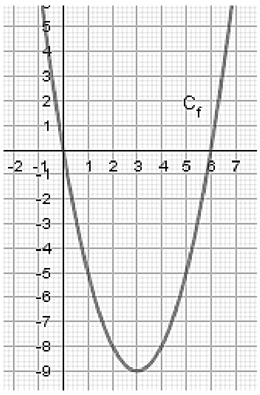
15000. Δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Με τη βοήθεια του σχήματος:

α) Να βρείτε τις τιμές της f για $x = 0, 1, 3, 5$.

β) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x)=0$.

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x)<0$.



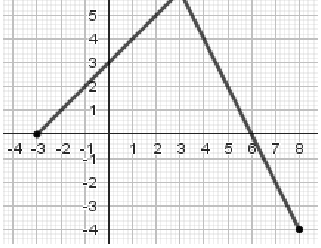
14628. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x}$, $x\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο Α(4,3).

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4,-3)$ είναι σημείο της C_f.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία y = 3.

35034. Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

34159.Δίνεται η συνάρτηση f, με $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

35413.Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $M\left(\alpha,\dfrac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

36885.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) i. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=0$.

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

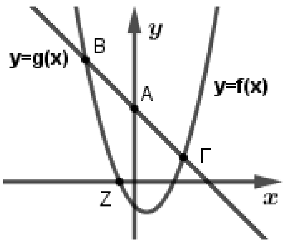
36889.Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^2+2x-15,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f\left(-5\right)+f\left(0\right)+f\left(3\right)$.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

Θέμα 4ο

12628.Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f\left(x\right)=x^2-x-1$ και $g\left(x\right)=3-x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Ζ.

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y=f\left(x\right)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y=g\left(x\right)$.

γ) Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α, η απόσταση των αριθμών $f\left(\alpha\right)$ και $-g\left(\alpha\right)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1.

12788. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\left(x-1\right)^2$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(\sqrt{3}\right)+f\left(-\sqrt{3}\right)=8$.

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=4$.

γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha\neq\beta$ ώστε να ισχύει f(α) = f(β) .
Να αποδείξετε ότι α + β = 2.

12941.Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{9-x^2}{3-|x|}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f .

β) Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x)=3+|x|$.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.

δ) Αν $g(x)=3-x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

12944.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x+\frac{1}{x}$ και $g(x)=x-\frac{1}{x}$, $x\neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=f(2)+g(2)-f\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)$.

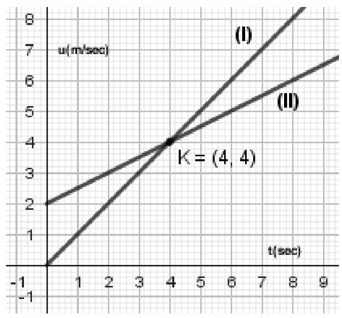
β) Να αποδείξετε ότι $\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2=4$ για οποιοδήποτε αριθμό $x\neq 0$.

γ) Θεωρούμε την ευθεία $y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι $|\alpha|\geq 2$.

12999.Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $u=u_0+\alpha\cdot t$, όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και α η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

α) Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς το χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.

β) Ένα όχημα Α, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση ηρεμίας και τη χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα 4 m/sec, ενώ ένα άλλο όχημα Β, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα 2m/sec.
Οι παρακάτω ευθείες (Ι),(ΙΙ) στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.



i) Ποια από τις δύο ευθείες (Ι), (ΙΙ) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος Α και ποια την ταχύτητα του οχήματος Β;

ii) Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα Α, Β κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή t sec, $t\in(3,5)$.

iii) Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος Α, να σχεδιάσετε στο παραπάνω διάγραμμα μία ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράφει την κίνησή του.

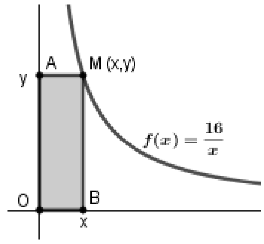
13030.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$ και $g(x)=|x+3|$. Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g.

γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g.

13090.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{16}{x}$, $x>0$.Ένα σημείο Μ(x, y) κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω Α και Β οι προβολές του Μ στους άξονες y΄y και x΄x αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περίμετρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση $\Pi(x)=2x+\frac{32}{x}$, $x>0$ όπου x η τετμημένη του Μ.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜΒ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους.

γ) Αν Μ΄ είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜ΄Β να είναι τετράγωνο τότε:

i. Να δείξετε ότι το Μ΄ έχει τετμημένη 4.

ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο ΟΑΜ΄Β έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ, δηλαδή ότι $\Pi(x)\geq\Pi(4)$ για κάθε $x>0$.

13120.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-(\lambda-1)x-4\lambda^2$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

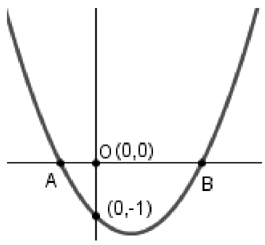
α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο σημεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Για $\lambda\neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου Α(4,4) ως προς τον άξονα x΄x να ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

δ) Για $\lambda=-1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x .

13168.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+2\lambda x+\gamma$ με $x\in\mathbb{R}$ και παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ η οποία τέμνει τον άξονα y′y στο (0, −1) για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\gamma=-1$

ii. Η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από την ευθεία $y=-\lambda^2-1$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x′x σε δύο σημεία Α και Β με συντεταγμένες $A\left(-\lambda-\sqrt{\lambda^2+1},0\right)$ και $B\left(-\lambda+\sqrt{\lambda^2+1},0\right)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των Α και Β είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2 για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

13313. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^7-x}{x^3-x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f.

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες x΄x και y΄y.

γ) Να δείξετε ότι $f(x)=x^4+x^2+1$ για κάθε $x\in A$.

δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x)=3$ έχει λύση στο Α.

13479. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|3x-12|-|2x-8|-3|x^2-16|$.

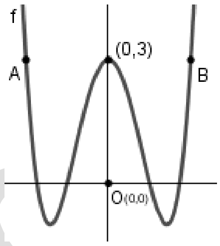
Αν $|x| \le 4$, τότε:

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές.

β) Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$.

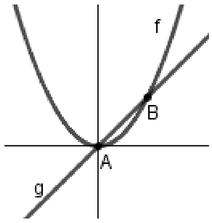
i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.
ii. Αν το σημείο Μ(μ+ 1, −20) ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να βρείτε την ακέραια τιμή του μ.

13454.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^4 - 4x^2 + \gamma$ η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y.



α) Να δείξετε ότι γ = 3.
β) Αν Α($\alpha^2 - 3$,3) και Β(5 – 3α, 3) είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f, όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι α = 1 και να γράψετε τον τύπο της f.
γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x′x.
δ) Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ), να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα x′x.

13557.Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$ που τέμνονται στα σημεία Α,Β.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β .
β) Αν Α(0, 0), Β(1,1) , τότε:
i. Με βάση το σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g .
ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο i. ερώτημα.

γ) Αν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta}$ για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς α, β με $\beta \neq 0$,

να δείξετε (με βάση τα παραπάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε) ότι $|\alpha| < |\beta|$.

14185.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x \in A$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία y = 1.

14190.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

β) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\alpha - 1$ έχουν την ίδια τεταγμένη.

γ) Θεωρούμε μεταβλητό σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη β > 0. Από το Μ φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες x΄x, y΄y και έστω Α και Δ τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τους άξονες, όπου το Α ανήκει στον x΄x και το Δ στον y΄y .

Αποδείξτε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου ΟΑΜΔ είναι $\left[\sqrt{2}(\beta+1)\right]^2$.

14225.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-1}$.

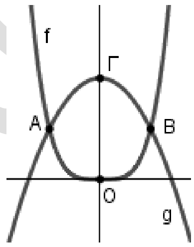
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α.

β) Να δείξετε ότι $f(x)=x^2-6x+8,\ x\in A$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία y = 3.

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x)=x^4-6x-4$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f.

14307.Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^4$ και $g(x)=2-x^2$. Τα σημεία ΑΒ, είναι τα σημεία τομής των γραφικών παρατάσεων των f g, ενώ Γ είναι τ0 σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα y΄y.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ.

Αν $A(-1,1), B(1,1), \Gamma(0,2)$:

β) Με βάση το διπλανό σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα β).

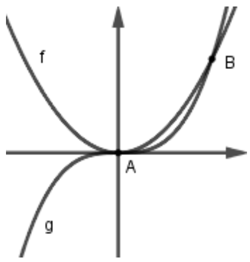
14459.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ και η ευθεία $y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι αν $0<\alpha<1$, τότε η C_f έχει με την ευθεία δυο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τετμημένες.

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $|xf(x)|\le\dfrac{1}{2}$.

14665.Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=x^3$ που τέμνονται στα σημεία Α και Β.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β.

β) Με βάση το σχήμα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει $x^3<x^2$.

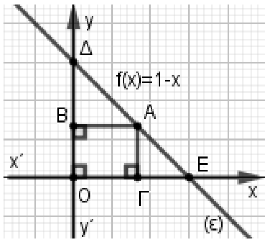
γ) Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Για τον πραγματικό αριθμό π = 3,1415… να δείξετε ότι:

i. $(\pi-3)^3<(\pi-3)^2$ **ii.** $\pi^3-10\pi^2+33\pi-36<0$

14744.α) Να αποδείξετε ότι $x-x^2\le\dfrac{1}{4}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Πότε ισχύει το ίσον;

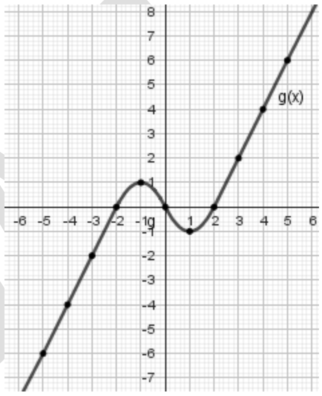


β) Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί η γραφική παράσταση (ε) της συνάρτησης $f(x)=1-x$, $x\in\mathbb{R}$, η οποία τέμνει τους άξονες $x΄x$ και $y΄y$ στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Ένα μεταβλητό σημείο Α, με τετμημένη α, κινείται επί της ευθείας (ε) και μεταξύ των σημείων Δ και Ε. Φέρνουμε από το Α καθέτους στους άξονες και έστω Β και Γ τα σημεία τομής με $y΄y$ και $x΄x$ αντίστοιχα.

i. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΟΓ.

ii. Να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του εμβαδού του μεταβλητού ορθογωνίου ΑΒΟΓ είναι $\frac{1}{4}$. Για ποια θέση του σημείου Α επιτυγχάνεται αυτή η τιμή;

14745. δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g(x). Κάποια σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες έχουν σημειωθεί με έντονο τρόπο.



α) Να λύσετε την ανίσωση $-2\le g(x)\le 0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $|g(x)|\le 2$.

γ) i. Να βρείτε το πλήθος λύσεων των εξισώσεων $g(x)=\frac{4}{5}$ και $g(x)=-1$.

ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x)=k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k.

14760.Δίνεται η συνάρτηση: $g(x)=\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x-12}}\right]^3\cdot\left(x^2-16\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.

β) Να δείξετε ότι $g(x)=\frac{x+4}{x+3}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τους άξονες.

14763.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{3\sqrt{x^2-8x+\lambda}}{x-4}+2$, για $x\neq 4$ και $\lambda\ge 16$.

α) Να βρείτε το $\lambda\ge 16$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο της $M(0,-1)$.

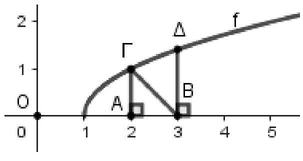
β) Αν $\lambda=16$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases}-1, & x<4\\ 5, & x>4\end{cases}$.

ii. Να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της f.

iii. Για $x<4$, να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f των οποίων η απόστασή τους από το σημείο $A(-1,-1)$ είναι 10 μονάδες μήκους.

14771.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x-\alpha}$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.



α) Με βάση το σχήμα, να δείξετε ότι $\alpha=1$.

β) Αν $\alpha=1$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

γ) i. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ είναι $(2,1)$ και $(3,\sqrt{2})$ αντίστοιχα.

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΒΓ.
iii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.

14786.Δίνονται τα σημεία $A(\lambda,1)$ και $B(2-\lambda^2,\mu)$ με $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

α) Αν τα σημεία Α, Β είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x, να βρείτε τις τιμές των λ, μ.
β) Αν επιπλέον το σημείο Α βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, να βρείτε την τιμή του λ.
γ) Για $\lambda=-2$ και $\mu=-1$
i. Να βρείτε την απόσταση των σημείων Α, Β.
ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

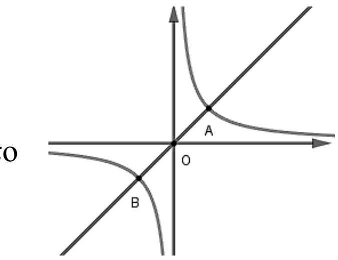
14810.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-7x+\kappa,\ \kappa\in\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη y = 10.
α) Να αποδείξετε ότι κ = 10.
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα x΄x .

γ) Έστω $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$, $\alpha<\beta$ δυο σημεία της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x .

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha<\dfrac{2\alpha+3\beta}{5}<\beta$.

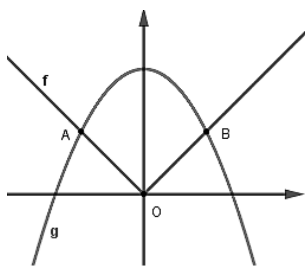
ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f με τετμημένη $x_0=\dfrac{2\alpha+3\beta}{5}$ βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα x΄x.

14925.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και η ευθεία ΑΒ με εξίσωση $y=x$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των Α, Β και να δείξετε ότι το Ο είναι το μέσο του ΑΒ.
Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f.
β) Να δείξετε ότι το συμμετρικό Μ ΄του Μ ως προς το Ο(0,0) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.
γ) Αν $A(1,1), B(-1,-1), M'(-x,-y)$ να δείξετε ότι $(AB)\le(MM')$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ και να εξετάσετε πότε $(AB)=(MM')$.

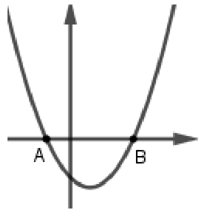
14926.Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=|x|$ και $g(x)=2-x^2$.



Τα Α , Β είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β .
β) Αν $A(-1,1)$ και $B(1,1)$,
i. Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι: $f(x)<g(x)$.

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x)<g(x)$ επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα βi.

14961. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-x-1$. Αν A(ω,0), B(φ,0)



α) Να δείξετε ότι

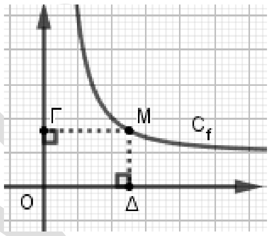
i. $\omega+\varphi=1$ **ii.** $\omega\cdot\varphi=-1$

β) Να δείξετε ότι $(OB)>(OA)$.

γ) Αν ένας θετικός αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, να δείξετε ότι β > φ.

δ) Να δείξετε ότι $\varphi<\frac{5}{3}$.

16153.Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=1+\frac{4}{x^2}$.

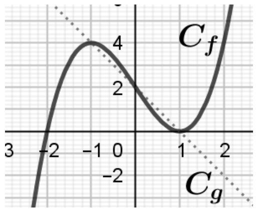


α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Έστω $\alpha>0$ η τετμημένη ενός τυχαίου σημείου Μ της γραφικής παράστασης της f. Αν ονομάσουμε Ε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΓΜΔ του σχήματος, να αποδείξετε ότι: **i.** $E=\alpha+\frac{4}{\alpha}$. **ii.** $E\geq 4$.

32742.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x)=-2x+2$.Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:



α) τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=-2x+2$.

β) τις τιμές $f(-1),\ f(0),\ f(1)$.

γ) τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

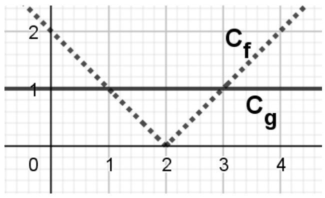
δ) τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A=\sqrt{f(x)+2x-2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

33597.Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x)=|x-2|$ και $g(x)=1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος, να βρείτε

i) τα σημεία τομής των C_f και C_g.

ii) τις τιμές του x, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g.



β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση

$$A=\frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}\ .$$

33701.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(x-1)^2-4$ και $g(x)=|x-1|+2$ με $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.
γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

33894.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} x-3 & , x>2 \\ -x+3, & x\le 2 \end{cases}$.

γ) i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y .

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$.

33895.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=2x-\alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,-1)$.

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y .

34309.Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=x+\alpha$, με $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Για $\alpha=1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία.

γ) Για $\alpha>1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

35385.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+\beta$, $g(x)=x+\beta$, όπου $x\in\mathbb{R}$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\dfrac{3\beta}{2},-3-\dfrac{\beta}{2}\right)$.

α) Να αποδείξτε ότι $\beta=-1$.

β) Για $\beta=-1$

i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες x΄x , y΄y.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{f(x)}{g(x)}+\dfrac{g(x)}{f(x)}=3$.

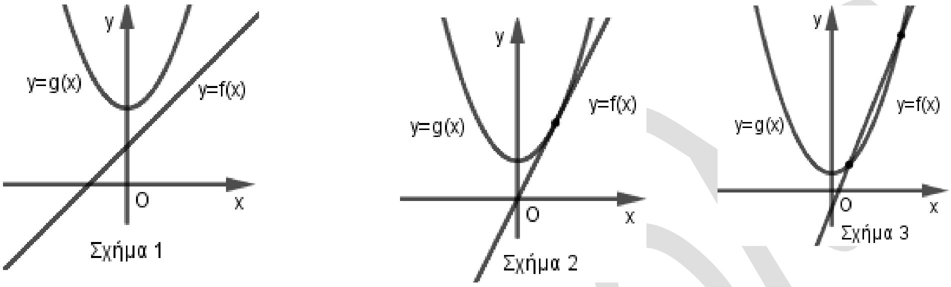
35409.Δίνεται το τριώνυμο $x^2-\lambda x+1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=\lambda^2-4$.

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με $f(x)=\lambda x-\lambda+2$ και $g(x)=x^2-\lambda+3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση από την οποία μπορούμε να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x^2-\lambda x+1=0$.

ii. Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται οι γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ. Με δεδομένο ότι $\lambda \in \{1,2,4\}$, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ σε καθένα από τα σχήματα, δικαιολογώντας την απάντηση σας.



35410.Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-2\lambda x+4\lambda+5$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

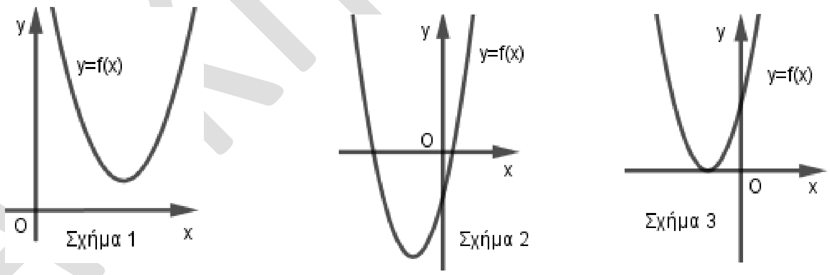
α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=4\lambda^2-16\lambda-20$.

β) Θεωρούμε την συνάρτηση f, που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2-2\lambda x+4\lambda+5$.

Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ.

i. Για τα δύο πρώτα σχήματα δίνεται ότι η παράμετρος $\lambda \in \{-2,4\}$. Να βρείτε σε ποια τιμή του λ αντιστοιχεί το καθένα από τα σχήματα αυτά, δικαιολογώντας την απάντηση σας.

ii. Για το σχήμα 3 να βρείτε τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος $\lambda \in \mathbb{R}$, δικαιολογώντας την απάντηση σας.



36657.Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2$ και $g(x)=\lambda x+(1-\lambda)$, $x \in \mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2$.

36676.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x-\alpha+2$ και $g(x)=x^2-\alpha+3$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α.

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$.

ii) Για $\alpha=2$ υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

γ) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ίδιο με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2-\alpha x+1=0$ και στη συνέχεια ότι για $\alpha=3$, $\alpha=-2$, $\alpha=1$ έχουν αντίστοιχα δύο, ένα, κανένα σημεία τομής.

37206.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+3x+2$ και $g(x)=x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x+\alpha$. Να δείξετε ότι:

i) Αν $\alpha>1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) Αν $\alpha<1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

Θέμα 3ο

14604. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\le 3\\ x^2, & 3<x<10\end{cases}$.

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1), f(3)$ και $f(5)$.

γ) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη $y=21$.

14752.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α.

β) Να δείξετε ότι το σημείο $M\left(1,-\sqrt{2}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

14754. α) Να δείξετε ότι $x^2+2x+4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

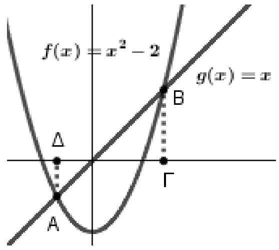
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left|\dfrac{x^3-8}{x-2}\right|$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α.

γ) Να δείξετε ότι $f(x)=x^2+2x+4$ για κάθε $x\in A$.

δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της g, όπου $g(x)=6x$.

14673.Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2-2$ και $g(x)=x$.



α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β είναι $A(-1,-1)$ και $B(2,2)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-x-2<0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\omega^2-|\omega|-2<0$.

37190.α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A=x^3-x^2+3x-3$.

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{3}{x}$ και $g(x)=x^2-x+3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,\ 3)$.

Θέμα 1ο

14782. α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Τα σημεία $A(x,y)$ και $B(-x,y)$ είναι για κάθε τιμή των x y, συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

ii. Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ με $\alpha<0$ και ν περιττό, έχει ακριβώς μία λύση την $-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.

iii. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $|\alpha|+|\beta|=|\alpha+\beta|$

iv. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0$.

v. Για κάθε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με λόγο λ = 1, το άθροισμα των ν πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο $S_\nu=\nu\cdot\alpha_1$.

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ να δείξετε ότι $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

14813.Α1. Στις τέσσερις πρώτες ερωτήσεις να γράψετε στην κόλλα σας το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι σωστή ή το γράμμα Λ αν η πρόταση είναι λάθος, μετά από τον αριθμό της ερώτησης. Στην πέμπτη ερώτηση να γράψετε το γράμμα της σωστής απάντησης μετά από τον αριθμό της ερώτησης.

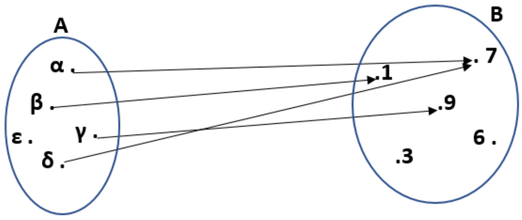
i) Αν $\alpha\leq 0$ και ν άρτιος, τότε ισχύει $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=|\alpha|$.

ii) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$ μπορεί να τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ακριβώς δύο σημεία.

iii) Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (α_ν) με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω. Το άθροισμα S_ν των ν πρώτων διαδοχικών όρων της (α_ν) δίνεται από την σχέση $S_\nu=\dfrac{\nu}{2}\left[\alpha_1+(\nu-1)\omega\right]$.

iv) Η εξίσωση $\alpha\cdot x+\beta=0$ είναι αδύνατη ως προς x, όταν $\alpha=0$ και $\beta\neq 0$.

v) Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια αντιστοιχία στοιχείων ενός συνόλου Α σε στοιχεία ενός συνόλου **Β.** Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό;



A) η αντιστοιχία αυτή παριστάνει συνάρτηση από το σύνολο Α στο σύνολο Β.

B) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι στο 3 και στο 6 δεν αντιστοιχεί κανένα στοιχείο του Α.

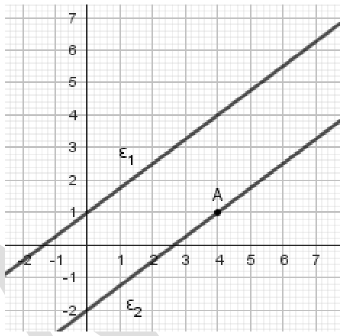
Γ) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι τα διαφορετικά στοιχεία α και δ του συνόλου Α αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο του συνόλου Β, το 7.
Δ) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι το στοιχείο ε δεν αντιστοιχεί σε κανένα στοιχείο του Β.
Α2. Έστω x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο πραγματικές ρίζες του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι, αν για την μεταβλητή x ισχύει $x < x_1$ ή $x > x_2$ τότε το τριώνυμο $f(x)$ γίνεται ομόσημο του α.

14935. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ) , γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.
i. Για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.
ii. Αν $\rho > 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$.
iii. Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με ν περιττό φυσικό και $\alpha < 0$, έχει λύση την $x = \sqrt[\nu]{|\alpha|}$.
iv. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ(3,5) ισχύει $f(5) = 3$.
v. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.
β) Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$.

Η συνάρτηση y=αx +β
Θέμα 2ο

12630. Δίνεται η ευθεία $y=\alpha x+\beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο (1,1).
α) Να βρείτε τις τιμές των α και β.
β) Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα y΄ y .
γ) Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.

12631. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες, την (ε_1) με εξίσωση $y=\frac{3}{4}x+1$ και την (ε_2) που διέρχεται από το σημείο Α (4, 1) και είναι παράλληλη στην (ε_1).



α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε_2).
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2).
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε_2) με τους άξονες.

12684. Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $y=-\frac{1}{2}x-2$ και μια ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο Α (- 4, 1) και είναι παράλληλη στην (ε_1).
α) Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ε_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα y΄ y.
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον άξονα x΄x.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2). Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες;

12730. Δίνεται η ευθεία $y=\alpha x+\beta$.
α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45^o και διέρχεται από το σημείο Α(0, 3).
β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ αν η ευθεία $y=\lambda x+\kappa$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y=x+3$ και τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο με τετμημένη 2.

12856. Δίνεται ευθεία ε: y=αx+5.Αν η ευθεία δ : $y=-3x-6$ είναι παράλληλη στην (ε), τότε:
α) i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε.
ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x΄x;
β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

12913.α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2+2x-3.
β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-1}$.
i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της παραπάνω συνάρτησης f.
ii. Να δείξετε ότι $f(x)=x+3$ για κάθε $x\in A$.
iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

12939.Έστω η ευθεία $\varepsilon_1: y=\alpha x+\beta$, η οποία τέμνει τον άξονα y΄y στο Α (0,- 6) και τον άξονα x΄x στο σημείο Β(-3, 0).
α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .
β) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη με την ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα

αξόνων .

13033.Δίνεται η ευθεία (ε): $y=-\frac{1}{2}x+4$.

α) i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε).
ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον x΄x άξονα;
β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία Α(6, 1), Β(-2, 3) και Γ(8, 0) είναι σημεία της ευθείας (ε).
γ) Να βρείτε την τιμή του $k\in\mathbb{R}$ ώστε το σημείο (k,5) να είναι σημείο της ευθείας (ε).

13054.Δίνονται οι ευθείες ε_1 : $y=(3\alpha+4)x-4$ και ε_2: $y=(3-4\alpha)x+4,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

α) Αν α=1, να βρείτε:
i. Τις εξισώσεις των ευθειών.
ii. Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα xx'.
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

13178.Δίνεται το σημείο Μ(3,4) .
α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Μ και από το Ο(0,0).
β) Δίνεται το σημείο Ν (- 3, λ) με $\lambda\in\mathbb{R}$ το οποίο ανήκει στην ευθεία ΟΜ.
i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.
ii. Αν Ν (- 3,- 4) να εξετάσετε αν τα σημεία Μ Ν, είναι συμμετρικά ως προς το Ο.

13318.Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=-x+\sqrt{2},\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0), f(\sqrt{2}), f(-\sqrt{2}), \left[f(-\sqrt{2})\right]^2$.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες x′x και y′y και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

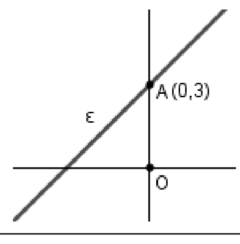
13400.Δίνεται η ευθεία ε: y = − x + 2.
α) Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x′x.
β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.
γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε.

13471.Θεωρούμε τα σημεία $A(2,1), B(-1,-5), \Gamma(27,50)$ και την ευθεία ε: $y=\lambda x-3$. Αν το σημείο Α είναι πάνω στην ευθεία, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$.
β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β είναι πάνω στην ευθεία.
Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο Γ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

14575.Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x)=\frac{x^2-3x}{x-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f .
β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x$, για κάθε $x\in A$.
γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

14641.Η διπλανή ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45° .
α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε.
β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε.
γ) Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x΄x .



(Δίνεται ότι $εφ45^\circ = 1$)

21239. Η ευθεία $y = αx + β$ με $α, β \in \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $Α(0, -2)$ και διέρχεται από το σημείο $Β(-2, -4)$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α, β.
β) Για α = 1 και β = - 2 , να βρείτε για ποιες τιμές του x η ευθεία βρίσκεται κάτω από τον x΄x άξονα.

35201.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = αx + β$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία A(1, 6), B(-1, 4), να βρείτε τις τιμές των α, β.
β) Αν α=1 και β=5, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y.

37183. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = αx + β$, με $α,\ β \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(0) = 5$ και $f(1) = 3$.

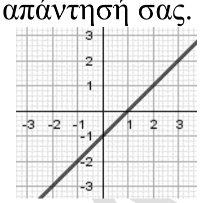
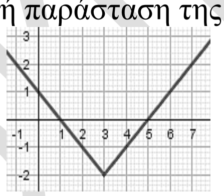
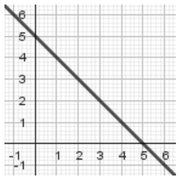
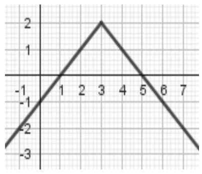
α) Να δείξετε ότι $α = -2$ και $β = 5$.
β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Θέμα 4ο

12681. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x-3| + 4 - (|6-2x| + 2)$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2 - |x-3|$.

β) Αφού δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x-1, & αν\ x < 3 \\ 5-x, & αν\ x \geq 3 \end{cases}$, να επιλέξετε το σωστό και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Η γραφική παράσταση της f είναι:

γ) i. Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε την ευθεία y = −1 και με τη βοήθειά της να λύσετε την ανίσωση $2 - |x-3| > -1$.

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

12682. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - (x-1)^2$ και $g(x) = |x-1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$.

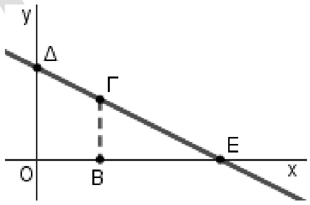
α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα x΄x .

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ -x+3, & x < 1 \end{cases}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση C_g.

γ) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

12689. Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:
$Y_1(t)=150+50t,\ t\in[0,5]$.
Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:
$Y_2(t)=650-25t$.
α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;
β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5^{o} μέχρι το 10^{o} λεπτό της κίνησής του;
γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτέρου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.
δ) i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;
ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

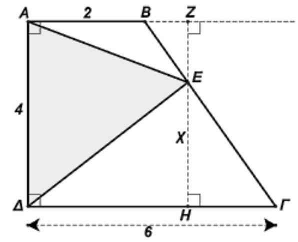
12728. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον y΄y άξονα, Ε ένα σημείο του x΄ x άξονα και Ο είναι η αρχή των αξόνων.
Η εξίσωση της ευθείας ΔΕ είναι: $y+\frac{1}{2}x=4$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Ε και Δ .
Ένα σημείο $Γ(t, y_Γ)$ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ και Β ένα σημείο του x΄x άξονα, τέτοιο ώστε ΒΓ να είναι παράλληλη στον y΄y άξονα.
β) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι $y_Γ=4-\frac{1}{2}t$.
γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t)=4t-\frac{1}{2}t^2$ εκφράζει το εμβαδόν του τραπεζίου ΟΒΓΔ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος.
δ) Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ισούται με 9, 75 τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .

12788. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2,\ x\in\mathbb{R},\ α\neq β$.
α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3})+f(-\sqrt{3})=8$.
β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία y = 4 .
γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με ώστε να ισχύει f(α) = f(β) . Να αποδείξετε ότι α + β = 2.

12834. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε ΑΒ=2, ΑΔ=4, ΓΔ=6, ενώ η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και επίσης κάθετη στην ΓΔ. Το σημείο Ε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ και ονομάζουμε x την απόσταση του Ε από την ΓΔ.

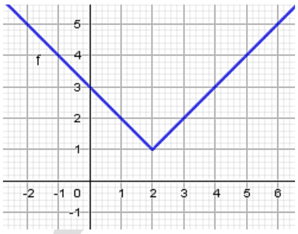


α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΔ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=-2x+12$.

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης;
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right)+f\left(\frac{2}{16}\right)+f\left(\frac{3}{16}\right)+f\left(\frac{4}{16}\right)+...+f\left(\frac{64}{16}\right)$.

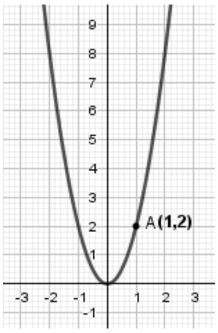
12914. Έστω η ευθεία ε: y = c, με παράμετρο $c\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x)=|x-2|+1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c\in\mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία;
ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α)i).
β) Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία Α, Β. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3-c,c)$ και $B(c+1,c)$.
γ) i. Αν Α, Β τα σημεία του ερωτήματος β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος ΑΒ είναι $(AB)\le 2$;
ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)i).

12921.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2|\kappa|x-2$ και η ευθεία ε: $y=2x-\kappa^2$, $\kappa\in\mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.
β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ.
γ) Για κ = -3 να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f.
δ) Αν Α και Β τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (ΑΒ).

12942. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2$, $x\in\mathbb{R}$ με παράμετρο α.



α) Αν το σημείο Α(1, 2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι α = 2.
β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο (1,6) και έχει κλίση λ = 2.
ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.
γ) i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x)<2x+4$.
ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.

12944.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x+\frac{1}{x}$ και $g(x)=x-\frac{1}{x}$, $x\ne 0$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=f(2)+g(2)-f\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι $(f(x))^2-(g(x))^2=4$ για οποιοδήποτε αριθμό $x\ne 0$.

γ) Θεωρούμε την ευθεία y = α, $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι $|\alpha|\ge 2$.

13055.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+5,\ x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $y=2x+\beta,\ \beta\in\mathbb{R}$.

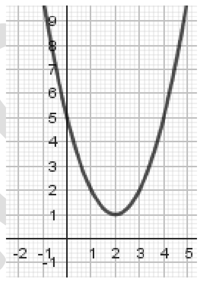
α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2+x)=f(2-x)$.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=f(3,52)-f(0,52)+f(3,48)-f(0,48).$$

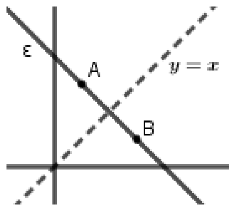
γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν β =–5.
δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β, ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία.

13091.Στο διπλανό παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-4x+5$.



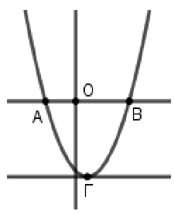
α) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = 7 και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας.
β) i. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.
ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β)i.
γ) Έστω ότι μια ευθεία y = λ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2, με $x_1<x_2$. Να δείξετε ότι $x_1+x_2=4$.

13298.Τα σημεία Α και Β είναι σημεία του 1ου τεταρτημόριου και είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο y = x της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Αν $A(x_A,y_A)$ και $B(x_B,y_B)$να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου Α με τις συντεταγμένες το σημείου Β.
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από τα Α κα Β έχει κλίση $\alpha=-1$.
γ) Αν επιπλέον τα σημεία Α και Β έχουν συντεταγμένες $(4,\kappa^2-3\kappa+1)$ και $(\kappa-2,4)$ αντίστοιχα, τότε:
i. Να δείξετε ότι κ = 3 και να προσδιορίσετε τα σημεία Α και Β.
ii. Για κ = 3, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.

13314.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-x-3$. Αν Α(α, 0), Β(β, 0), Γ(γ, δ) σημεία της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον x΄x έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε:



α) Να δείξετε ότι $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

β) Να δείξετε ότι $f(\sqrt{2})<0$.

γ) Να δείξετε ότι $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}<\sqrt{2}<\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

δ) Να βρείτε τις τιμές των γ και δ.

13367.Δίνεται η ευθεία ε: $y=\left(\omega^2-6\omega+8\right)x+2$, όπου $\omega\in\mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\omega\in\mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x′x.
β) Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x′x είναι αμβλεία τότε:
i. Να αποδείξετε ότι ω = 3.
ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.
iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε.

13473.Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{1-2x+x^2}$.
α) Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.
Δίνεται επιπλέον $1\le x\le 3$.
β) i. Να δείξετε ότι Α=2.
ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x-3|-|x-1|=2$.
γ) i. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=3-x$ και $g(x)=x-1$ για $1\le x\le 3$.
ii. Για ποιες τιμές του x είναι $|f(x)-g(x)|=2$.

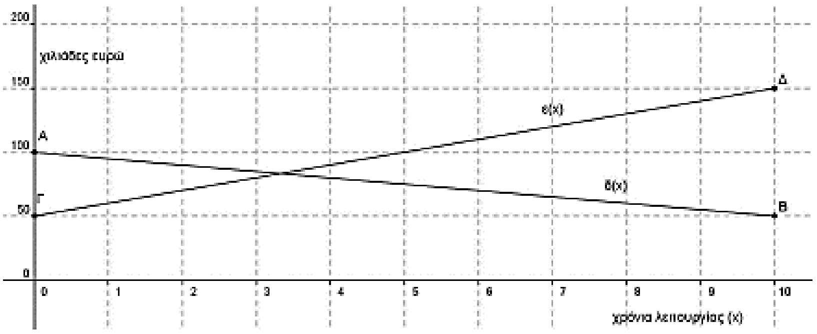
14184.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.
γ) Αν είναι $f(x)=x+2,\ x\ne -1$, τότε:
i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x)=x^2$.
ii. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

14320.Σε κάποιο τόπο, μια χειμερινή μέρα, ξεκινάμε να μετράμε τη θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά. Ο τύπος που δίνει τη θερμοκρασία, x ώρες μετά τις 6 το πρωί, είναι:

$$f(x)=\begin{cases}2x+4, & x\in[0,6]\\ 16, & x\in(6,9]\\ 25-x, & x\in(9,12]\end{cases}$$ και μετριέται σε βαθμούς Κελσίου.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία στον τόπο αυτό, στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και στις 5 το απόγευμα.
β) Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία:
i. Διατηρείται σταθερή.
ii. Είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου.
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

14477. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων η ευθεία ΑΒ με $A(0,100)$ και $B(10,50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μίας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.



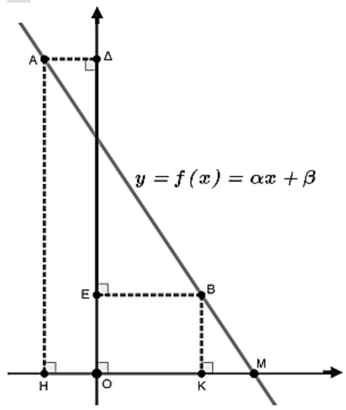
Η ευθεία ΓΔ με $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.

α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τις δαπάνες τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.

β) i) Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x),\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές.

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ΑΒ και ΓΔ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

14556 .Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=f(x)=\alpha x+\beta$, όπου α, β σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $x\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε τα σημεία Α και Β της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x), των οποίων οι προβολές στους άξονες x΄x, y΄y είναι τα σημεία Η,Δ και Κ,Ε αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΗΚ και ΔΕ έχουν μήκη 6 και 9 αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-\frac{3}{2}$.

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σημείο Μ έχει τετμημένη 6, να αποδείξτε ότι $\beta=9$.

γ) Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΟΚ έχει μήκος 4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το σημείο Ε και είναι παράλληλη προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x).

33754. Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο: $y=60+0,20x$,όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km ;

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ;

γ) Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο $y=80+0,10x$ όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

δ) Αν $f(x)=60+0,20\cdot x$ και $g(x)=80+0,10\cdot x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ).

33894.Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-5x+6}{\left|2-x\right|}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδειχθεί ότι $f\left(x\right)=\begin{cases}x-3, & x>2\\ -x+3, & x<2\end{cases}$.

γ) i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y′y.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x\right)\le 0$.

34183. Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία TAXI με το όνομα ‘RED’ χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Μια άλλη εταιρεία TAXI με το όνομα ‘YELLOW’ χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α) i) Αν f(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία ‘RED’ για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)	0	2	8
f (x) (ευρώ)			

ii) Αν g(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία ‘YELLOW’ για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

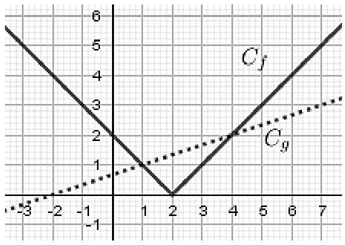
x (km)			
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f , g και τους τύπους τους f(x) , g(x) .

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας ‘RED’ είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

δ) Αν δυο πελάτες Α και Β μετακινηθούν με την εταιρεία ‘RED’ και ο πελάτης Α διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον Β, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β.

34312. Στο διπλανό σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f\left(x\right)=\left|x-2\right|$ και $g\left(x\right)=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}, x\in\mathbb{R}$.



α) Με βάση το σχήμα να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g .

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α).

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση: $K=\sqrt{3\left|2-x\right|-(x+2)}$.

36652.Δίνονται οι συναρτήσεις $f\left(x\right)=4x+2$ και $g\left(x\right)=4x^2-9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα x΄x.

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία (3, 0) και (−3, 0) .

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το Α(0, 3) και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Οx.

36655. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f\left(x\right)=\dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.
γ) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y ΄y αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β.

36659.Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.
α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.
β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.
i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360θερμίδες είναι: $f\left(x\right)=30-\dfrac{3}{4}x$.
ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i),στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.
γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

36681. Για δεδομένο $\lambda\in\mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f\left(x\right)=\left(\lambda+1\right)x^2-\left(\lambda+1\right)x+2$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Α(0,2).
β) Για $\lambda=-1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.
γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β(2, 0), να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x και σε άλλο σημείο.
δ) Για $\lambda=1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x.

36682. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^2+x+1$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα x΄x.
β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.
γ) Έστω Μ(x , y) σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου Μ ισχύει: $\left|2x-1\right|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

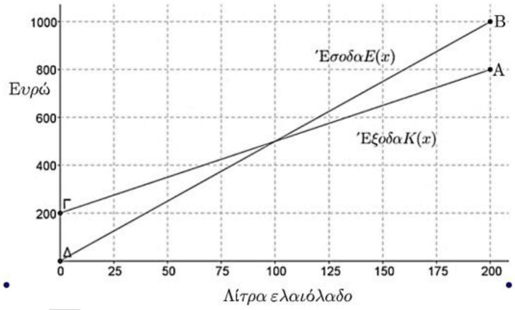
36683.Δίνεται η συνάρτηση f, με $f\left(x\right)=\begin{cases}-x+2, & \text{αν } x<0\\ x+2, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$.

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα y' y .
β) i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.
ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

36684. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=x^2-2x$ και $g(x)=3x-4$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.
β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g.
γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha,\ \alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

37203. Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο.
Στο παρακάτω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα Κ(x) και τα έσοδα Ε(x) από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.
β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;
γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά;
δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων Κ(x) και Ε(x) και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ).

Θέμα 3ο

14576. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=|x|$,για κάθε $x\in A$.

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x>0$.

1ο θέμα

14829.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή **(Σ)** ή Λανθασμένη **(Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Αν $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ τότε $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$.

ii. Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, ισχύει $|-\alpha|=\alpha$.

iii. Η γραφική παράταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα y'y .

iv. Αν το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε $\beta^2-4\alpha\gamma>0$.

v. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: y=\alpha_1x+\beta_1$ και $\varepsilon_2: y=\alpha_2x+\beta_2$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, τότε $\alpha_1=\alpha_2$ και $\beta_1\neq\beta_2$.

β) Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α, β και γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$.

14731.Α. Σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε Σωστό (Σ), αν η πρόταση που διατυπώνεται είναι σωστή και Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta\geq 0$ ισχύει ότι $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

β) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι $|\alpha+\beta|\leq|-\alpha|+|\beta|$.

γ) Κάθε ευθεία η οποία έχει θετική κλίση, σχηματίζει με τον άξονα x΄x οξεία γωνία.

δ) Η εξίσωση $x^3=-8$ είναι αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς.

ε) Αν είναι $\alpha\beta>1$, τότε θα ισχύει αναγκαστικά $\alpha>1$ και $\beta>1$.

Β. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$. Αν έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2, τότε να αποδείξετε ότι το άθροισμά τους είναι ίσο με $x_1+x_2=\dfrac{-\beta}{\alpha}$.