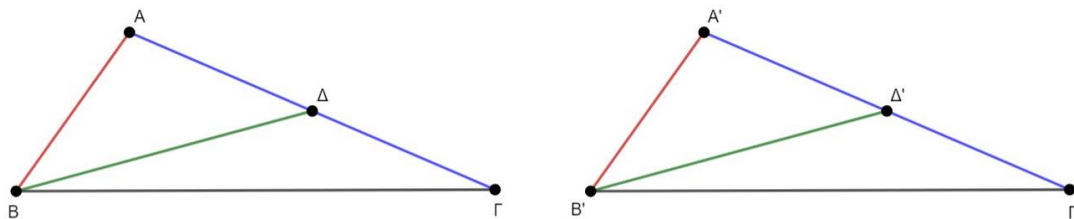


ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1)



α) Συγκρίνω τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A'B'\Delta'$

- $AB = A'B'$ (Από υπόθεση)
- $B\Delta = B'\Delta'$ (Από υπόθεση)
- $A\Delta = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{A'\Gamma'}{2} = A'\Delta'$ (Από υπόθεση)

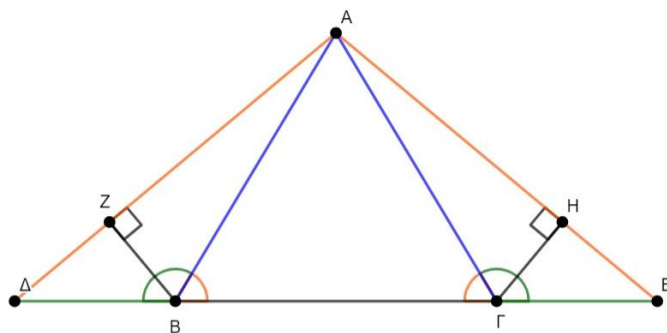
Συνεπώς (από ΠΠΠ) τα τρίγωνα είναι ίσα. Άρα, $\hat{A} = \hat{A}'$

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$

- $AB = A'B'$ (Από υπόθεση)
- $\hat{A} = \hat{A}'$ (Από προηγούμενο ερώτημα)
- $A\Gamma = A'\Gamma'$ (Από υπόθεση)

Συνεπώς (από ΠΓΠ) τα τρίγωνα είναι ίσα.

2)



α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, άρα $AB = A\Gamma$ (1) και $\hat{A}\hat{B}\Gamma = \hat{A}\hat{\Gamma}B$.
Συνεπώς $\hat{A}\hat{B}\Delta = \hat{A}\hat{\Gamma}E$ (2) ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

Συγκρίνω τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$

- $AB = A\Gamma$ (1)
- $\hat{A}\hat{B}\Delta = \hat{A}\hat{\Gamma}E$ (2)
- $B\Delta = \Gamma E$ (Από υπόθεση)

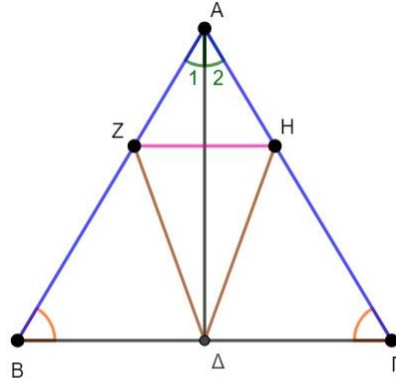
Συνεπώς (από ΠΓΠ) τα τρίγωνα είναι ίσα. Άρα $A\Delta = AE$,
δηλαδή το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές.

β) Αρκεί να δείξω ότι $BZ = \Gamma H$

Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta Z$ και $\Gamma H E$

- $BD = GE$ (Από υπόθεση)
 - $\hat{D} = \hat{E}$ (ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ADE)
- Τα τρίγωνα είναι ίσα ως ορθογώνια με μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες. Συνεπώς $BZ = GH$.

3)



α) Συγκρίνω τα τρίγωνα AZD και AHD

- $AZ = AH$ (Από υπόθεση)
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (AD : διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$)
- AD κοινή πλευρά
- Συνεπώς τα τρίγωνα είναι ίσα

β) Στα ίσα τρίγωνα AZD και AHD οι πλευρές ZD και HD βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες, άρα είναι ίσες.

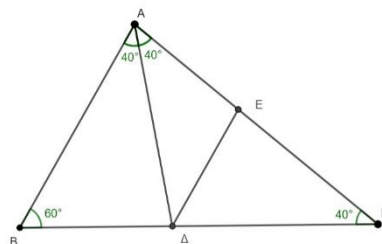
Επίσης, στα ίσα τρίγωνα AZD και AHD οι γωνίες $\hat{AZD}$ και $\hat{AHD}$ βρίσκονται απέναντι από ίσες πλευρές, άρα είναι ίσες.

γ) Εφόσον $\hat{AZD} = \hat{AHD}$ (από προηγούμενο ερώτημα), η AD είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{ZDH}$ του τριγώνου ZDH . Όμως το τρίγωνο ZDH είναι ισοσκελές, αφού $ZD = HD$ (από προηγούμενο ερώτημα). Συνεπώς η διχοτόμος της κορυφής, θα είναι και ύψος. Δηλαδή $AD \perp ZH$.

4) Αρχικά, υπολογίζουμε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} &= 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + (20^\circ + \hat{\Gamma}) + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 80^\circ + 20^\circ + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 180^\circ - 80^\circ - 20^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 80^\circ \Leftrightarrow \frac{2\hat{\Gamma}}{2} = \frac{80^\circ}{2} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 40^\circ. \text{ Συνεπώς } \hat{B} = 60^\circ. \end{aligned}$$

β)



Εφόσον η AD είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, έχουμε ότι:

$B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}E = 40^\circ$. Οι γωνίες $B\hat{A}\Delta$ και $\Delta\hat{A}E$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων AB , ΔE τεμνόμενες από την AD . Άρα $\Delta\hat{A}E = 40^\circ$.

Στο τρίγωνο $A\Delta E$ έχουμε:

$$A\hat{E}\Delta = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ \Leftrightarrow A\hat{E}\Delta = 100^\circ.$$

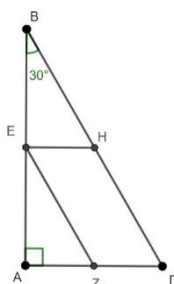
Η γωνία $\Delta\hat{E}\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου $A\Delta E$, άρα

$$\Delta\hat{E}\Gamma = \Delta\hat{A}E + \Delta\hat{A}E = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ.$$

Στο τρίγωνο $E\Delta\Gamma$:

$$E\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ - \Delta\hat{E}\Gamma - E\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ.$$

5)



α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η πλευρά AG βρίσκεται απέναντι από γωνία 30° , άρα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Δηλαδή ισχύει: $AG = \frac{BG}{2}$ (1)

Επίσης, το τμήμα EZ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου, άρα είναι παράλληλο και ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς.

$$\text{Δηλαδή ισχύει: } EZ = \frac{BG}{2} \text{ (2)}$$

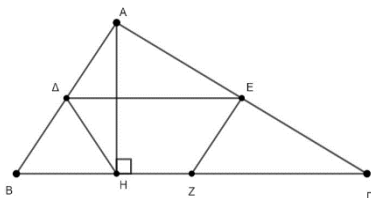
Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι: $EZ = AG$.

β) Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $EH \perp AB$. Επίσης $AG \perp AB$.

Συνεπώς $AG \parallel EH \Leftrightarrow ZG \parallel EH$. Επίσης $EZ \parallel BG \Leftrightarrow EZ \parallel HG$.

Δηλαδή οι πλευρές του τετράπλευρου $EZGH$ είναι (ανά δύο) παράλληλες. Άρα το τετράπλευρο $EZGH$ είναι παραλληλόγραμμο.

6)



α) Το ευθύγραμμο τμήμα DE ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, άρα είναι παράλληλο και ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς. Συνεπώς:

$$DE \parallel BG \Leftrightarrow DE \parallel ZH.$$

β) Στο τετράπλευρο ΔEZH οι απέναντι πλευρές ΔE και HZ είναι παράλληλες ενώ οι ΔH και EZ δεν είναι παράλληλες. Δηλαδή το τετράπλευρο ΔEZH είναι τραπέζιο. Για να είναι ισοσκελές τραπέζιο πρέπει οι μη παράλληλες πλευρές του να είναι ίσες. Δηλαδή, πρέπει να δείξω ότι $\Delta H = EZ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο AHB το ευθύγραμμο τμήμα HZ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα AB , άρα $HZ = \frac{AB}{2}$ (1)

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το ευθύγραμμο τμήμα EZ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών, άρα είναι ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς. Δηλαδή $EZ = \frac{AB}{2}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\Delta H = EZ$.